



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

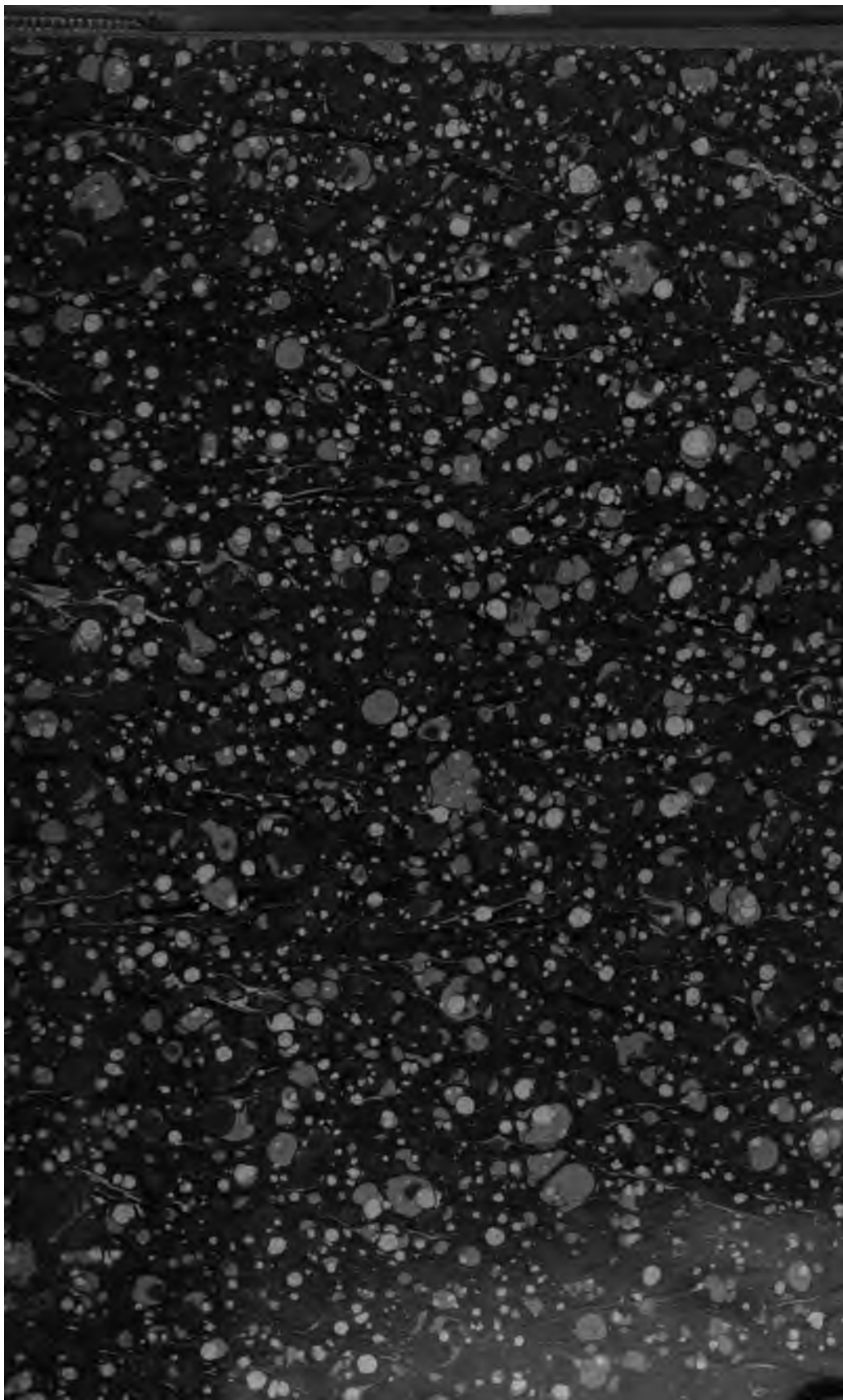
En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>



LELAND STANFORD JR.
UNIVERSITY
LIBRARY

The Gift of

Prof G. A. Miller





49 257

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

FORMÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME QUATORZIÈME.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

—
1886

1000

1000

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

COMMISSION D'IMPRESSION.

(ART. 20 DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.)

MM. HUMBERT,	}	Secrétaires de la Société.
WEILL,		
COLLIGNON,	}	Membres du Conseil.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE,		
JORDAN,		
MANNHEIM.		

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,
PUBLIE
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME QUATORZIÈME. — ANNÉE 1885-86.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1886



ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU MOIS DE JANVIER 1886 (*).

Les initiales S. P. désignent les Sociétaires perpétuels.

Président.....	M. POINCARÉ.
Vice-Présidents	{ M. ANDRÉ. M. COLLIGNON. M. FOURET. M. PICQUET.
Secrétaires	{ M. HUMBERT. M. WEILL.
Vice-Secrétaires.....	{ M. RAFFY. M. PARAF.
Archiviste.....	M. SIMART.
Trésorier.....	M. CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil	{ M. APPELL. M. PICARD. M. CLAYEUX. M. COMBEROUSSE (DE). M. DARBOUX. M. HALPHEN. M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. M. JORDAN. M. LAGUERRE. M. LAISANT. M. MANNHEIM. M. ROUCHÉ.
Membres du Conseil non résidents..	{ M. CREMONA. M. GENTY. M. MATHIEU. M. TCHÉBICHEFF.

(*) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

- ACHARD**, directeur-adjoint de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de Chabrol, 40, à Paris.
- AMIGUES**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, boulevard du Musée, 66, à Marseille.
- ANDRÉ** (Désiré), docteur ès Sciences, rue Gay-Lussac, 25, à Paris.
- APPELL**, maître de conférences à l'École Normale supérieure, rue Soufflot, 22, à Paris.
- ARNAUD**, élève-ingénieur des Ponts et Chaussées, 18, rue Saint-Séverin, à Paris.
- ARON** (Henri), banquier, rue de Grammont, 14, à Paris.
- ASTOR**, chargé de cours à la Faculté des Sciences, boulevard de Bonne, à Grenoble.
- AUBERT**, ingénieur des Mines, à Tunis.
- AUTONNE**, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Lyon.
- BENOIST** (Adolphe), docteur en droit, place du Châtelet, 3, à Chalon-sur-Saône (Saône-et-Loire), S. P.
- BERDELLÉ**, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
- BÈRE**, ingénieur des manufactures de l'État, à Lille.
- BERTRAND** (Joseph), secrét. perp. de l'Académie des Sciences, rue de Seine, 6, à Paris.
- BISCHOFFSHEIM**, banquier, rue Taitbout, 3, à Paris, S. P.
- BIENAYMÉ** (Arthur), ingénieur de la Marine, rue Claude-Bernard, 63, à Paris.
- BIENAYMÉ**, membre de l'Institut (décédé), S. P.
- BONCOMPAGNI** (le prince Balthasar), place Colonna, palais Piombino, à Rome.
- BONNET** (Ossian), membre de l'Institut, 42, rue des Écoles, à Paris.
- BORCHARDT**, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé), S. P.
- BOUCHER**, ancien directeur de l'École préparatoire des Sciences et Lettres, rue du Pin, 9, à Angers.
- BOULANGER**, professeur de Mathématiques, 116, rue Trallier, maison Deloncle, à Mustapha inférieure (Algérie).
- BRAULT** (A.), négociant à Pons (Charente-Inférieure).
- BRESARD**, professeur au lycée Fontanes, rue Vézelay, 3, à Paris.
- BRIOSCHI**, directeur de l'École Polytechnique, à Milan (Italie).
- BRISSE** (Ch.), répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Bécon, 55, à Courbevoie (Seine).
- BROCARD**, capitaine à l'École régimentaire du Génie de Montpellier, S. P.
- CANTOR**, professeur à l'Université de Halle o/d Saal.
- CARON**, professeur de Géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 82, à Paris.
- CASEY** (John), professeur à l'Université catholique de Dublin, Stephens Green, 84.
- CATALAN**, professeur à l'Université, à Liège (Belgique).
- CHASLES**, membre de l'Institut (décédé), S. P.
- CHEMIN**, ingénieur des Ponts et Chaussées, rue de Rennes, 73, à Paris.
- CHRYSTAL**, professeur à l'Université d'Édimbourg (Écosse).
- CIVIALE**, rue de la Tour-des-Dames, 2, à Paris.
- CLAYEUX**, intendant divisionnaire, avenue de Clichy, 52, à Paris.
- CLAUDE-LAFONTAINE**, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris, S. P.
- COLLET**, professeur à la Faculté des Sciences, à Grenoble.
- COLLIGNON**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, rue des Saints-Pères, 28, à Paris.
- COMBEROUSSE** (DE), professeur à l'École Centrale, rue Blanche, 45, à Paris.
- COURCELLES**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, 36, rue Gay-Lussac, à Paris.
- CRAIG** (Thomas), professeur à l'Université John Hopkins, Baltimore (Maryland).
- CREMONA**, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome.
- CRETIN**, professeur au lycée Saint-Louis, rue de Rennes, 107, à Paris.
- DARBOUX**, professeur à la Faculté des Sciences, membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
- DAUTHEVILLE**, maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier (Hérault).
- DAVID**, lieutenant-colonel d'Artillerie en retraite, place de l'École d'Artillerie, 42, à Toulouse.
- DEFFORGES**, capitaine d'infanterie, attaché à l'Etat-major du Ministre de la Guerre, rue de Grenelle Saint-Germain, 123, à Paris.

- DELANNOY**, sous-intendant militaire, à Orléans.
- DEWARTRE**, professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier (Hérault).
- DERUITS**, docteur ès sciences, chargé de Cours à l'Université de Liège (Belgique).
- DEWULF**, lieutenant-colonel, chef du Génie, à Montpellier.
- DOSTOR**, docteur ès sciences, rue de Rennes, 121, à Paris.
- DREYFUS** (Ferdinand), publiciste, rue de l'Université, 25, à Paris.
- DURRANDE**, professeur à la Faculté des Sciences, à Poitiers.
- DYCK WALTHER**, professeur au Polytechnicum, à Munich (Bavière).
- ESCARY**, professeur au Prytanée militaire, à la Flèche (Sarthe).
- FABRE**, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Trudaine, 26, à Paris.
- FERRAZ**, professeur au Lycée, à Toulouse (Haute-Garonne).
- FLEUREAU**, ingénieur des Ponts et Chaussées, au Puy (Haute-Loire).
- FLOQUET**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Jeanne-d'Arc, 9, à Nancy.
- FLYE SAINTE-MARIE**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue du Sommerard, 12, à Paris.
- FONTÈS**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Toulouse (Haute-Garonne).
- FOURET**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Washington, 16, à Paris.
- GABRIEL**, ingénieur des Ponts et Chaussées, agrégé de la Faculté de Médecine, 4, rue Antoine-Dubois, à Paris.
- GAUTHIER-VILLARS**, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris, S. P.
- GEVOCCHI**, professeur à l'Université, rue du Pô, 38, à Turin (Italie).
- GENTY**, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Orléans.
- GERONO**, rue Hallé, 40 et 42, à Paris.
- GIROD** (A.), ingénieur des Manufactures de l'État, 63, quai d'Orsay, à Paris.
- GOFFANT**, 53, rue Nollot, à Paris.
- GOURSAT**, maître de Conférences à l'École Normale supérieure, 83, rue Denfert-Rochereau, à Paris.
- GRAINDONGE**, professeur à l'Université, rue Paradis, 92, à Liège (Belgique).
- GRUEY**, directeur de l'Observatoire, à Besançon.
- GUCCIA** (Jean), via Ruggiero Settimo, 28, à Palerme (Sicile).
- GUELOT**, lieutenant-colonel au 118^e régiment d'infanterie, à
- GUNTHER** (Dr Sigismond), député au Reichstag allemand, à Ansbach (Bavière).
- GUYON**, lieutenant de vaisseau, 13, rue de l'Université, à Paris.
- HAAC**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 1, à Paris.
- HAMCH**, directeur de l'École des Mines, à Lima (Pérou).
- HALPHEN**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Gounod, 8, à Paris, S. P.
- HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des Mines, avenue du Trocadéro, 9, à Paris, S. P.
- HATT**, ingénieur hydrographe, rue de l'Université, 13, à Paris.
- HENRIOT**, ingénieur des Mines, à Charleville (Ardennes).
- HENRY**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Privas (Ardèche).
- HENRY** (Charles), bibliothécaire à la Sorbonne, 5, quai d'Anjou, à Paris.
- HEMMARY**, chef d'escadrons au 17^e régiment d'Artillerie, à Douai (Nord).
- HERMITE**, membre de l'Institut, rue de la Sorbonne, 2, à Paris, S. P.
- HILAIRE**, professeur de Mathématiques, rue d'Arras, 4, à Douai (Nord).
- HIRST**, Athenæum Club, Londres (Angleterre), S. P.
- HOLST** (Elling), stipendiat de l'Université, Pilestrade, 49, à Christiania (Norvège).
- HOUBIGANT**, chef de bataillon du Génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris.
- HUGO** (Comte L.), traducteur au Ministère des Travaux publics, rue des Saints-Pères, 14, à Paris.
- HUGONOT**, capitaine d'Artillerie de la Marine, rue de l'Arsenal, 11, à Paris.
- HUMBERT**, ingénieur des Mines, répétiteur à l'École Polytechnique, 161, boulevard Haussmann, à Paris.
- IMBER**, répétiteur à l'École Centrale, boulevard Beaumarchais, 109, à Paris.
- JABLONSKI**, professeur au lycée Charlemagne, 40, boulevard Saint-Germain, à Paris.
- JACQUIEN**, ingénieur des Ponts et Chaussées, directeur des Travaux publics à Saint-Denis (Réunion).
- JANIN**, chef d'escadron au 17^e régiment d'Artillerie, à la Fère.

- JAVARY, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Le-moine, 28, à Paris.
- JORDAN, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique, rue de Varennes, 48, à Paris, S. P.
- JOUFFRET, chef d'escadrons d'Artillerie, à Palaiseau (Seine-et-Oise).
- JUNG, professeur à l'Institut technique supérieur, 7, via Principe Umberto, à Milan (Italie).
- KÖNIGS, professeur à la Faculté des Sciences, à Toulouse (Haute-Garonne).
- KOSTENEC (Antoine), professeur au lycée communal, à Prague (Bohême).
- KOVALEWSKY (M^{me} DE), professeur à l'Université de Stockholm (Suède).
- KRONECKER (D^r Léopold), professeur à l'Université, Bellevuestrasse, 13, à Berlin.
- LACOR, 13, rue de Mézières, à Paris.
- LAFFON DE LADEBAT, amiral (décédé), S. P.
- LAGUERRE, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, membre de l'Institut, 61, boulevard Saint-Michel, à Paris.
- LAISANT, député, avenue Victor Hugo, 84 bis, à Paris.
- LAQUIÈRE, administrateur de la commune mixte de Tababart (Constantine).
- LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
- LAVRISSÈRE, rue de la Verrerie, 58, à Paris.
- LEAUTÉ, directeur des études à l'école Mouge, 141, boulevard Malesherbes, à Paris.
- LEBON (Ernest), professeur au lycée Charlemagne, 4 bis, rue des Ecoles, à Paris.
- LECORNU, ingénieur des Mines, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Caen (Calvados).
- LEFÈVRE, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, à Bar-le-Duc.
- LEMOINE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Littré, 5, à Paris.
- LE PAIGE, professeur à l'Université, rue des Anges, 21, à Liège (Belgique).
- LE PONT, 42, rue Saint-Pierre, à Caen (Calvados).
- LESAGE, professeur au lycée Charlemagne, 6, rue d'Arras, à Paris.
- LESPIAULT, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux.
- LÉVY (Léon), ingénieur des Mines, rue de Logelbach, 9, à Paris.
- LÉVY (Lucien), directeur des Études de l'École préparatoire de Sainte-Barbe, rue Valette, à Paris.
- LÉVY (Maurice), membre de l'Institut, boul. Saint-Germain, 258, à Paris.
- LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
- LIGUINE, professeur à l'Université, à Odessa (Russie).
- LIE (Sophus), professeur à l'Université de Christiania.
- LINDEMANN, professeur à l'Université, Fragheimer-Pulverplatz, 5, à Königsberg (Allemagne).
- LORIN, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du faubourg Saint-Honoré, 186, à Paris.
- LUCAS, professeur au lycée Saint-Louis, 1, rue Boutarel, à Paris.
- MACÉ DE LÉPINAY, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV, rue de l'Odéon, 21, à Paris.
- MALEYX, professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs, 117, à Paris.
- MALLOIZEL, rue de l'Estrapade, 17, à Paris.
- MALMSTÉN, conseiller d'État, à Upsal (Suède).
- MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris-Passy, S. P.
- MARCHAND, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de Poissy, 13.
- MARSILLY (le général DE), rue Chante-Pinot, à Auxerre.
- MARTIN (Artemas), maître ès-arts, docteur en Philosophie, à Erie (Pennsylvanie).
- MATHIEU (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, rue du Faubourg-Saint-Jean, 22, à Nancy.
- MERCEREAU, licencié ès sciences, rue Gay-Lussac, 38.
- MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
- MOUTARD, examinateur à l'École Polytechnique, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
- NEUBERG, professeur à l'Athénée royal de Liège (Belgique).
- OCAGNE (G.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Rochefort-sur-Mer (Charente-Inférieure).

- OVIDIO** (Enrico D'), professeur à l'Université, piazza Statuto, 17, à Turin.
- PANEK** (Auguste), professeur au lycée communal, à Prague (Bohême).
- PARAF**, agrégé des Sciences mathématiques à l'École Normale supérieure.
- PARMENTIER** (le général), membre du Comité des fortifications, rue du Cirque, 5, à Paris.
- PARRAN**, ingénieur des Mines, avenue de l'Opéra, 26, à Paris.
- PATUNET**, ancien élève de l'École Polytechnique.
- PAUTONNIER** (l'abbé), professeur au collège Stanislas.
- PELLET**, professeur à la Faculté des Sciences, à Clermont-Ferrand.
- PELLETREAU**, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Constantine (Algérie).
- PERCIN**, chef d'escadrons d'Artillerie, à l'École spéciale militaire, à Saint-Cyr.
- PERRIN**, ingénieur en chef des Mines, rue de l'Étoile, 17, au Mans.
- PEROTT** (Joseph), à Port-Navalo, par Arzon (Morbihan), S. P.
- PHILIPPON**, secrétaire de la Faculté des Sciences, à la Sorbonne, à Paris.
- PICARD** (Émile), professeur suppléant à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris.
- PICQUET**, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Michel, 73, à Paris.
- PISTOYE** (DE), capitaine d'Artillerie, rue Montbaurin, 20, à Versailles.
- POINCARÉ**, ingénieur des Mines, maître de Conférences à la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 66, à Paris.
- POKORNY** (Martin), directeur du lycée communal, à Prague (Bohême).
- POLIGNAC** (prince C. DE), villa Jessie, route de Grasse, à Cannes (Alpes-Maritimes), S. P.
- POUSSET**, professeur au lycée, à Poitiers.
- PRICE** (Bartholoméo), professeur à l'Université, à Oxford (Angleterre).
- PUCCIARELLI**, répétiteur au lycée Saint-Louis.
- PUTZ** (le général), commandant l'École d'application de l'Artillerie et du Génie, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
- RADAU**, rue de Tournon, 12, à Paris.
- RAFFY**, agrégé-préparateur à l'École Normale supérieure, rue Denfert-Rochereau, 16, à Paris, S. P.
- RANCY** (DE), directeur général de la Compagnie d'assurances *le Soleil*, rue de Châteaudun, 44, à Paris.
- REINACH** (baron DE), banquier, rue de la Bourse, 4, à Paris.
- REY** (Casimir), professeur à l'École régimentaire du Génie, boulevard de la Reine, 25, à Versailles.
- RIBACOUR**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Vesoul (Haute-Saône).
- RIBOT**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, rue Jacotot, 1, à Dijon.
- RODET**, ingénieur à la Manufacture des tabacs, quai d'Orsay, à Paris.
- ROUART**, ingénieur civil, boulevard Voltaire, 137, à Paris.
- ROUCHE** (Eugène), professeur à l'École Centrale, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.
- ROUQUET**, professeur au lycée, Toulouse (Haute-Garonne).
- ROUSSELIN**, professeur au lycée Fontanes, boulevard Pereire, 124, à Paris.
- SAINT-PAUL** (DUC DE), chef d'état-major de l'artillerie du 10^e corps, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
- SARRAU**, prof. à l'École Polytechnique, avenue Daumesnil, 9 bis, à Saint-Mandé (Seine).
- SANTIAUX**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
- SAUVAGE**, professeur à la Faculté, Marseille (Bouches-du-Rhône).
- SCHLEGEL** (Dr Victor), à Waren (Allemagne).
- SCHOUTE**, professeur à Groningue (Hollande).
- SCHUBERT**, professeur, Steindam, 89, à Hambourg (Allemagne).
- SÉGUY**, rue Pascal, 2, à Paris.
- SÉLIVANOFF**, attaché à l'Université, à Saint-Petersbourg.
- SILVA** (DA).
- SIMART**, lieutenant de vaisseau, examinateur d'admission à l'École navale, rue de Miroménil, 70, à Paris.

SIMONNET, chef d'escadron d'artillerie, à Versailles.
SONINE (Nicolas), professeur à l'Université, à Varsovie (Russie).
STARKOFF (Alexis), professeur à l'École de Commerce, rue Forgowaia, 49, à Odessa (Russie).
STEPHANOS (Dr Cyparissos), professeur à l'Université d'Athènes (Grèce).
STUDNICKA, professeur à l'Université, à Prague (Bohème).
SYLOW, professeur à l'Université, Frederikshald (Norwège, S. V.).
TANNERY (Paul), ingénieur du service de l'expertise à la Manufacture des Tabacs, à Paris, S. P.
TANNERY, sous-directeur de l'École Normale supérieure, 45, rue d'Ulm, à Paris.
TARRY (Gaston), receveur des Contributions diverses, rue Clauzel, à Alger.
TCHÉRICHEFF, membre de l'Académie des Sciences, à Saint-Petersbourg.
TERRIER, professeur de Mathématiques, rue Monsieur-le-Prince, 18, à Paris.
TISSOT, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Voreppe (Isère).
TISSERAND, membre de l'Institut, avenue de l'Observatoire, 5, à Paris.
TRASBOT, ancien élève de l'École Polytechnique, 58, rue de Rennes, à Paris.
TRESCA, ingénieur des Ponts et Chaussées, château de Courtozé, par Vendôme (Loir-et-Cher).
VACQUANT, inspecteur général de l'Université, boulevard Saint-Michel, 12, à Paris.
VANDANE, lieutenant d'artillerie, démissionnaire, rue de la Vignette, 65, à Lille.
VANECEK (J.-S.), professeur au lycée, à Jičín (Bohème).
VICAIRE, ingénieur en chef des Mines, rue Gay-Lussac, 30, à Paris.
VIELLARD, manufacturier, aux forges de Morvillars (territoire de Belfort).
VOLLOT (Jules), professeur de Mathématiques au lycée, à Alger.
WALCKENAER, ingénieur des Mines, 9, rue Bayard, à Paris.
WEILL, professeur de Mathématiques, 8 bis, rue de la Station, au Vésinet (Seine-et-Oise).
WEYR (Dr Édouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohème).
WEYR (Dr Émile), professeur à l'Université, Maria-Theresa-Strasse, 10, à Obermeiding, près Vienne (Autriche).
WILSON, député, au palais de l'Élysée, à Paris.
WORMS DE ROMILLY, ingénieur en chef des Mines, rue de Balzac, 7, à Paris.
ZABOUDSKY, capitaine de l'Artillerie russe, professeur à l'École d'Artillerie, à Saint-Petersbourg.
ZELLER (Charles), recteur du séminaire, à Markgröningen (Wurtemberg).
ZEUTHEN, professeur à l'Université, Citadelsvej, 9, à Copenhague.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

BENOIST, docteur en droit.
BISCHOFFSHEIM, banquier.
BIENAYMÉ, membre de l'Institut (décédé).
BORCHARDT, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé).
BROCARD, capitaine du Génie.
CHASLES, membre de l'Institut (décédé).
CLAUDE-LAFONTAINE, banquier.
GAUTHIER-VILLARS, éditeur.
HALPHEN, répétiteur à l'École Polytechnique.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut.
HERMITE, membre de l'Institut.
HIAT, directeur des études de l'École navale de Greenwich.
JORDAN, membre de l'Institut.
LAFFON DE LADÉBAT, amiral (décédé).

MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique.
PEROTT (Joseph).
POLIGNAC (prince C. DE).
SYLOW, professeur à l'Université, Frederikshald.
TANNERY (Paul), ingénieur des manufactures de l'État.

Modifications survenues depuis le 1^{er} janvier 1885.

DÉMISSIONNAIRES.

BREWARD, architecte, à Paris.
KANTOR (S.), à Prague.
LONGCHAMPS (DE), professeur de Mathématiques spéciales, à Paris.
ROUX, architecte, à Paris.
BÈRE, ingénieur des manufactures de l'État, à Lille.

NOUVEAUX MEMBRES.

CANTOR, professeur à l'Université de Halle.
CRYSTAL, professeur à l'Université d'Édimbourg.
DAUTHVILLE, maître de Conférences à la Faculté de Montpellier.
DENARTRE, professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier.
DYCK WALTHER, professeur au Polytechnicum de Munich.
FERRAZ, professeur au lycée de Toulouse.
GUYON, lieutenant de vaisseau à bord du *Borda*.
JABLONSKI, professeur au lycée Charlemagne.
NEUBERG, professeur à l'Athénée royal de Liège.
ROUQUET, professeur au lycée de Toulouse.
SAUVAGE, professeur à la Faculté de Marseille.
SILVA (DA).

**Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.**

Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.
Académie des Sciences de Berlin.
Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.
Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, à Bruxelles.
Académie des Arts et des Sciences du Connecticut (Etats-Unis d'Amérique).
Académie des Sciences de Munich.
Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.
Académie des Sciences de Paris.
Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg.
Académie des Sciences de Prague.
Académie Royale des *Lincei*, à Rome.
Académie Impériale des Sciences de Vienne.
Acta Mathematica (rédacteur M. Mittag-Leffler, à Stockholm).
American Journal of Mathematics, publié par l'Université de John Hopkins, à Baltimore (rédacteur M. Thomas Craig, à Baltimore).
Annales de l'École Normale supérieure.
Annali di Matematica (rédacteur M. Brioschi, à Milan).
Archiv for Mathematik og Naturvidenskab (rédacteurs MM. S. Lie et W. Muller, à Christiania).

Archiv für Mathematik und Physik (rédacteur Dr Hoppe, Prinzenstrasse, 69, à Berlin, S. W.).

Association française pour l'avancement des Sciences, à Paris.

Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques (rédacteur M. Darboux).

Casopis pro pěstování matematiky a fysiky (rédacteur M. Eduard Weyr, à Prague).

Circolo Matematico, à Palerme.

École Royale Normale supérieure de Pise.

Giornale di Matematiche (rédacteur M. Battaglini, à Rome).

Institut Royal de Luxembourg.

Institut Royal lombard des Sciences et Lettres, à Milan.

Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts, à Venise.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (rédacteur M. Carl Ohrtmann, à Berlin).

Jornal de Sciencias matematicas e astronomicas (rédacteur M. Gomes Teixeira, à Coïmbre).

Journal de l'École Polytechnique.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, à Berlin.

Mathematische Annalen (rédacteur M. Felix Klein, à Leipzig).

Mathesis (rédacteurs MM. Mansion, à Gand, et Neuberg, à Liège).

Meteorologische Zeitschrift.

Réunion des officiers, à Lille.

Société mathématique d'Amsterdam.

Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.

Société philosophique de Cambridge.

Société Royale d'Édimbourg.

Société des Sciences de Finlande, à Helsingfors.

Société Royale des Sciences de Goettingue.

Société mathématique de Hambourg.

Société hollandaise des Sciences, à Harlem (Hollande).

Société mathématique de Kharkoff (Russie).

Société astronomique de Londres.

Société mathématique de Londres.

Société Royale de Londres.

Société mathématique de Moscou.

Société mathématique d'Odessa (Russie).

Société philomathique de Paris.

Société mathématique de Prague.

Société Royale des Sciences de Saxe, à Leipzig.

Société Royale des Sciences d'Upsal (Suède).

Société des Sciences naturelles de Zurich.

Université Royale de Pise.

Tidskrift for Mathematik (rédacteur M. Zeuthen, à Copenhague).

Tijdschrift voor Vormleer, rekenkunde en de beginselen der Viskunde (rédacteur M. Versluys, à Amsterdam).

Zeitschrift für Mathematik und Physik (rédacteur Dr Oscar Schlömilch, à Dresde).

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur un Mémoire de Poisson; par M. Bioche,
professeur au lycée de Poitiers.

(Séance du 18 novembre 1885.)

1. Dans un Mémoire lu à l'Académie des Sciences en 1832 et publié la même année dans le *Journal de Crelle* et dans le *Journal de l'École Polytechnique*, Poisson, après avoir rappelé les théorèmes d'Euler et de Monge, ajoute les observations suivantes :

« Les théorèmes sur la courbure des surfaces que nous venons de rappeler supposent évidemment que les tangentes à toutes les sections faites par ce point que l'on considère sont dans un même plan, ou autrement dit qu'il n'y a en ce point qu'un plan tangent; mais il existe des surfaces où le plan tangent est unique et où cependant ces théorèmes n'ont pas lieu. En ces points singuliers, la direction des lignes de courbure n'est pas indéterminée comme dans les ombilics, mais leur nombre est plus grand que deux; il peut être quatre ou six ou tout autre nombre pair et le rayon de courbure d'une section normale est susceptible de plusieurs maxima et minima dont le nombre total est toujours égal à celui des lignes de courbure. »

Je me propose de faire voir que, lorsque des points de l'espèce

considérée par Poisson se rencontrent sur des surfaces algébriques, ces points ne sont pas simples, comme l'expression de *plan tangent unique* pourrait le faire croire. Il peut arriver, il est vrai, que la surface, lieu des tangentes, se réduise à un plan double ou se décompose en un plan et des cônes imaginaires, de sorte que les tangentes réelles de la surface sont bien toutes dans un même plan. C'est pourquoi il m'a semblé utile de bien préciser la nature de la singularité, d'autant plus qu'il résulte de ce qui suit que les théorèmes de Monge et d'Euler s'appliquent *sans exception* à tous les points simples des surfaces algébriques.

Poisson donnait comme exemple les surfaces représentées par l'équation

$$2z = n^2 \sin u \theta,$$

n étant un nombre entier; z, u, θ des coordonnées semi-polaires. Le rayon de courbure étant donné par

$$\frac{1}{R} = \sin n \theta,$$

on peut disposer de u pour lui donner autant de maxima et minima que l'on veut. Les sections normales de la surface sont des paraboles dont le sommet est à l'origine; les tangentes forment donc un plan. Mais, si l'on transforme l'équation en passant aux coordonnées cartésiennes, on voit que l'origine est un point multiple; l'axe des z étant une ligne multiple de la surface si $n > 2$. Pour $n = 2$ on retrouve le parabolôïde hyperbolique, pour $n = 1$ une surface qui a deux nappes tangentes entre elles à l'origine. L'équation en coordonnées cartésiennes et l'équation en coordonnées semi-polaires ne sont donc pas équivalentes en général.

2. Sans insister davantage sur un exemple particulier, reprenons l'expression générale du rayon de courbure d'une section normale

$$\frac{1}{R} = r \cos^2 \alpha + 2s \cos \alpha \sin \alpha + t \sin^2 \alpha;$$

pour que R soit susceptible de plus de deux maxima ou minima, il faut que les dérivées partielles r, s, t de z dépendent de l'angle α . C'est ce qui ne peut avoir lieu en un point simple d'une surface algébrique.

En effet, une surface algébrique étant représentée par l'équation

$$(1) \quad F(x, y, z) = 0,$$

on ne peut avoir à la fois en un point simple

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0.$$

Or, si l'origine est un point simple, le plan tangent étant le plan des xy , on doit avoir

$$p = 0, \quad q = 0.$$

En différentiant l'équation, (1) on trouve

$$(2) \quad \frac{dF}{dx} + p \frac{dF}{dz} = 0, \quad \frac{dF}{dy} + q \frac{dF}{dz} = 0;$$

puisque, au point considéré, p et q sont nuls, on a

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0$$

et, en vertu de la remarque que l'on vient de faire, il faut que

$$\frac{dF}{dz} \neq 0.$$

De plus $\frac{dF}{dz}$ a une valeur bien déterminée lorsqu'on y fait $x = y = z = 0$, puisque c'est un polynôme entier par rapport à ces variables.

Pour avoir les dérivées r, s, t , je différentie les équations (2)

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d^2 F}{dx^2} + 2p \frac{d^2 F}{dx dz} + p^2 \frac{d^2 F}{dz^2} + r \frac{dF}{dz} = 0, \\ \frac{d^2 F}{dx dy} + q \frac{d^2 F}{dy dz} + p \frac{d^2 F}{dx dz} + pq \frac{d^2 F}{dz^2} + s \frac{dF}{dz} = 0, \\ \frac{d^2 F}{dy^2} + 2q \frac{d^2 F}{dy dz} + q^2 \frac{d^2 F}{dz^2} + t \frac{dF}{dz} = 0. \end{cases}$$

Les équations précédentes donnent pour r, s, t un système de valeurs unique lorsqu'on fait $x = y = z = 0$; car les coefficients des inconnues ont une valeur déterminée différente de zéro; les termes indépendants qui se réduisent à $\frac{d^2 F}{dx^2}$, $\frac{d^2 F}{dx dy}$, $\frac{d^2 F}{dz^2}$, puisque p et q sont nuls, sont également bien déterminés, puisque ce sont des polynômes en x, y, z .

Les points singuliers signalés par Poisson sont donc des points multiples.

3. J'ajouterai une autre remarque. Poisson dit que le nombre total des lignes de courbure est toujours égal au nombre des maxima et des minima du rayon de courbure. Il peut arriver que le premier nombre soit supérieur au second.

En effet, supposons qu'en un point multiple quelconque d'une surface le rayon de courbure d'une section normale s'exprime par

$$\frac{1}{R} = \varphi(\theta);$$

en remplaçant les coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées semi-polaires dans l'équation connue qui donne les directions des lignes de courbure, on trouve que cette équation se transforme en la suivante :

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = 0.$$

Il en résulte bien que les sections de plus grande ou de moins grande courbure sont des lignes de courbure; mais il peut y avoir des valeurs de θ qui vérifient l'équation $\frac{d\varphi}{d\theta} = 0$ sans rendre φ maximum ou minimum. Le nombre des lignes de courbure peut donc être supérieur à celui des lignes de plus grande ou moins grande courbure.

Pour m'assurer qu'il en est bien ainsi et que toutes les racines de l'équation en θ donnent des lignes de courbure, je me sers de la méthode dont Poisson s'est servi pour le cas des ombilics. En général, aucune normale MN à une surface n'est rencontrée rigoureusement par une normale voisine M_1N_1 , quelque rapprochés que soient les points de la surface M, M_1 auxquels elles répondent. Si l'on appelle Δ leur plus courte distance, Δ sera du même ordre que la distance u des deux points pour une direction quelconque. Ce qui caractérise une ligne de courbure, c'est que $\frac{\Delta}{u}$ devient infiniment petit en même temps que u .

Or, OZ étant normale à la surface considérée, la distance Δ d'une normale voisine à OZ est

$$\Delta = \frac{qx - py}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

p, q, x, y correspondant au pied de la seconde normale

$$\frac{\Delta}{u} = \frac{q \cos \theta - p \sin \theta}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

et enfin

$$\lim \frac{\Delta}{u} = \frac{\varphi'(\theta)}{\sqrt{4\varphi^2(\theta) + \varphi'^2(\theta)}}.$$

Donc toutes les directions θ qui annulent $\varphi'(\theta)$ donnent des directions de lignes de courbure, sans qu'il soit nécessaire que la courbure devienne maxima ou minima.

Soit, par exemple, la surface

$$2z = u^2(\cos^2 \theta + 2),$$

on a

$$\frac{1}{R} = \cos^2 \theta + 2,$$

$$\frac{d}{d\theta} \frac{1}{R} = -3 \cos^2 \theta \sin \theta.$$

La section d'azimut $\theta = \frac{\pi}{2}$ n'est pas une section de courbure maxima ou minima, car la dérivée ne change pas de signe; mais cet azimut correspond à une direction de ligne de courbure.

On peut remarquer encore qu'il résulte de l'expression de $\frac{\Delta}{u}$ que le plan tangent en un point d'une ligne de courbure est perpendiculaire à la section normale correspondant à cette ligne, comme dans le cas des points simples, de sorte que, d'une façon générale, les lignes de courbure sont les lignes perpendiculaires aux directions conjuguées, si l'on donne de ces directions la définition que donne Dupin dans ses *Développements de Géométrie*.

4. Enfin, si l'équation $\varphi(\theta)$ a des racines, les sections correspondantes ont des courbures nulles : on peut donc les considérer comme déterminant des directions de lignes asymptotiques.

Donc, les lignes asymptotiques étant données par

$$\varphi(\theta) = 0$$

et les lignes de courbure par

$$\varphi'(\theta) = 0,$$

si le théorème de Rolle est applicable à la première équation, le nombre des lignes de courbure est au moins égal à celui des lignes asymptotiques, car deux lignes asymptotiques sont toujours séparées par un nombre impair de lignes de courbure.

Sur la recherche de deux courbes planes, ou surfaces, dont les points se correspondent chacun à chacun, à la fois par homologie et par polaires réciproques; par M. G. FOURET.

(Séance du 18 novembre 1885.)

Le problème qui fait l'objet de cette Note a déjà été, en ce qui concerne les courbes planes, posé et résolu analytiquement par M. d'Ocagne (1). Nous allons en donner une nouvelle solution entièrement géométrique, et nous l'étendrons ensuite au problème analogue relatif aux surfaces.

La question traitée par M. d'Ocagne peut s'énoncer de la manière suivante :

Trouver dans un plan deux courbes (C) et (C'), polaires réciproques par rapport à une conique (K), et telles que la droite joignant un point quelconque M de l'une d'elles au point M' de contact avec l'autre de la polaire de M par rapport à (K) passe par un point fixe O.

Il est clair, d'abord, que les conditions imposées dans cet énoncé à (C) et à (C') impliquent l'homologie de ces deux courbes. En effet, soit Δ la polaire du point O par rapport à la conique (K). Puisque les points M et M' sont en ligne droite avec O, la tangente en M à (C), qui est la polaire de M', et la tangente en M' à (C'), qui est la polaire de M, se couperont sur Δ . Par conséquent (C) et (C') seront homologues par rapport au point O, centre d'homologie, et à la droite Δ , axe d'homologie.

Considérons maintenant le point T, où la tangente à (C), en un point quelconque M, coupe Δ . La polaire de T par rapport à (K)

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XIII, p. 204.

est OM, puisque cette droite contient le point O, pôle de Δ , et le point M', qui est le pôle de MT. Par suite, les droites MO et MT sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites MA et MB, qui joignent le point M aux points A et B d'intersection de Δ et de (K). La courbe cherchée (C) doit donc être telle que la tangente, en l'un quelconque de ses points M, soit conjuguée harmonique de MO par rapport à MA et à MB⁽¹⁾. Transformons homographiquement cette courbe, en faisant coïncider les points A et B avec les ombilics, ou points communs à tous les cercles du plan. La proportion harmonique, qui se conserve, entre les droites MO, MA, MB et MT, exprime alors que la tangente, en un point quelconque de la courbe transformée, est constamment perpendiculaire à la droite qui joint ce point au point Ω transformé de O.

La transformée homographique de (C) est par suite un cercle ayant Ω pour centre, et la courbe (C) elle-même est l'une quelconque des coniques tangentes respectivement en A et B à OA et à OB, c'est-à-dire bitangentes à la conique (K), en ses points de rencontre avec la droite Δ . La seconde courbe cherchée sera la conique polaire réciproque de (C) par rapport à (K). Nous retrouvons ainsi le résultat que M. d'Ocagne avait obtenu par le calcul.

Proposons-nous maintenant de *trouver deux surfaces (S) et (S'), polaires réciproques par rapport à une quadrique (Q), et telles que la droite joignant un point M quelconque de la première au point M' de contact avec la seconde du plan polaire de M par rapport à (Q) passe par un point fixe O*.

On voit immédiatement, comme pour le problème précédent, que les surfaces cherchées doivent être homologues par rapport au point O, *centre d'homologie*, et au plan polaire Π de O par rapport à la quadrique (Q), qui est le *plan d'homologie*. D'ailleurs, en coupant les surfaces (S), (S') et la quadrique (Q) par un plan quelconque P passant par le point O, nous obtiendrons deux courbes (C), (C'), et une conique (K), par rapport à laquelle (C) et (C') seront polaires réciproques, en même temps qu'elles seront

(1) C'est un cas particulier des courbes *anharmoniques*, qui s'obtiennent, comme nous l'avons fait voir, par l'intégration de l'équation de Jacobi (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII, p. 1693 et 1837).

homologiques par rapport au point O, centre d'homologie, la droite Δ d'intersection des plans P et Π étant l'axe d'homologie.

Par suite, ainsi que nous l'avons démontré plus haut, les courbes (C) et (C') seront des coniques bitangentes entre elles et à la conique (K), en leurs points communs d'intersection avec Δ . On en conclut que les surfaces cherchées (S) et (S') sont des quadriques circonscrites à la quadrique (Q), le long de son intersection avec le plan Π .

Sur une suite récurrente; par M. MAURICE D'OCAGNE.

(Séance du 18 novembre 1885.)

1. Le sujet traité dans le présent Mémoire, quoique élémentaire par le fond, se prête, comme nous espérons le faire voir, à des développements assez curieux.

Nous y envisageons une notion nouvelle qu'on pourrait, sans doute, faire intervenir dans d'autres genres de questions, et dont voici la définition.

Supposons que des quantités $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ dépendent de certains paramètres $p, a, b, c, \dots$, le nombre n de ces quantités étant lui-même fonction des paramètres $p, a, b, c, \dots$:

$$n = \varphi(p, a, b, c, \dots).$$

Supposons en outre que, pour chaque valeur de p , le nombre n ait une limite supérieure N qui dépende uniquement de p ,

$$N = f(p).$$

Si, pour un certain système de valeurs de $p, a, b, c, \dots$, on a

$$\varphi(p, a, b, c, \dots) = N,$$

c'est-à-dire, si le nombre n des quantités Q a la valeur maxima N compatible avec la valeur de p considérée, nous disons qu'il y a *plénitude* des quantités Q.

On trouvera dans ce petit Mémoire plusieurs propriétés nouvelles de la célèbre suite de Fibonacci.

2. Dans une suite récurrente proprement dite chaque terme est une fonction linéaire et homogène d'un certain nombre n des termes qui le précèdent immédiatement.

Une telle suite est définie, en outre de la formule ou *échelle* de récurrence, par les valeurs arbitrairement attribuées aux n premiers termes.

Ainsi la suite récurrente

$$U_0, U_1, U_2, U_3, \dots, U_p, \dots$$

est définie par l'échelle

$$U_p = aU_{p-1} + bU_{p-2} + \dots + lU_{p-n},$$

et par les valeurs des n termes initiaux $U_0, U_1, U_2, \dots, U_{n-1}$.

Si, conservant la même échelle, on suppose tous les termes initiaux nuls, à l'exception du dernier U_{n-1} pris égal à 1, on obtient ce que j'appelle la suite *fondamentale* de la précédente, suite que je représente par

$$u_p = au_{p-1} + bu_{p-2} + \dots + lu_{p-n},$$

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \quad \dots, \quad u_{n-2} = 0, \quad u_{n-1} = 1.$$

Dans ma *Théorie élémentaire des séries récurrentes* (1), j'ai démontré le théorème que voici :

Le terme général d'une suite récurrente, à échelle à n termes, s'exprime en fonction linéaire et homogène de n termes consécutifs de sa suite fondamentale, les coefficients de cette forme étant des fonctions des n termes initiaux de la suite considérée.

3. Je vais rappeler la démonstration que j'ai donnée (2) de ce théorème, pour le cas d'une échelle à deux termes, auquel se rapporte la présente Note.

Étant données la suite définie par

$$U_p = aU_{p-1} + bU_{p-2}$$

et les valeurs des termes initiaux U_0 et U_1 , considérons la suite

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3^e série, t. III, p. 65.

(2) *Loc. cit.*, p. 71.

fondamentale définie par

$$\begin{aligned} u_p &= au_{p-1} + bu_{p-2}, \\ u_0 &= 0, \quad u_1 = 1, \end{aligned}$$

et posons, pour toute valeur de p ,

$$V_p = U_p - U_1 u_p.$$

En vertu des formules précédentes, on voit que

$$V_p = aV_{p-1} + bV_{p-2}.$$

D'ailleurs, on a

$$\begin{aligned} V_0 &= U_0 - U_1 u_0 = U_0, \\ V_1 &= U_1 - U_1 u_1 = 0, \\ V_2 &= aV_1 + bV_0 = bU_0. \end{aligned}$$

Écrivons alors la formule de récurrence qui lie les quantités V , en divisant ses deux membres par bU_0 ,

$$\frac{V_p}{bU_0} = a \frac{V_{p-1}}{bU_0} + b \frac{V_{p-2}}{bU_0}.$$

Comme nous avons

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{bU_0} &= 0 = u_0, \\ \frac{V_2}{bU_0} &= 1 = u_1, \end{aligned}$$

nous en déduisons

$$\frac{V_p}{bU_0} = u_{p-1};$$

par suite,

$$U_p = U_1 u_p + V_p = U_1 u_p + bU_0 u_{p-1},$$

formule qui traduit, pour le cas d'une échelle à deux termes, le théorème énoncé plus haut.

Cette formule n'est pas sans importance. En outre des applications que j'en ai données dans le *Mémoire* d'où elle est extraite, je l'ai appliquée depuis dans ma *Note Sur une série à loi alternée* ⁽¹⁾.

La présente Note a pour but d'en développer une nouvelle application.

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XII, p. 78.

4. J'établirai auparavant quelques propriétés de la suite de Fibonacci, dont j'aurai besoin au cours de ce travail.

On sait que cette suite est définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \\ u_p = u_{p-1} + u_{p-2}.$$

C'est donc une suite fondamentale. Écrivons-en quelques termes

$u_0.$	$u_1.$	$u_2.$	$u_3.$	$u_4.$	$u_5.$	$u_6.$	$u_7.$	$u_8.$	$u_9.$	$u_{10}.$	$u_{11}.$	$u_{12}.$	$u_{13}.$	$u_{14}.$
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

On peut prolonger cette suite au-dessous de u_0 au moyen d'indices négatifs, et je dis que l'on a

$$(2) \quad u_{-p} = (-1)^{p+1} u_p.$$

Supposons, en effet, la formule vraie pour les indices $p-1$ et $p-2$. Nous avons évidemment

$$u_{-p} = -u_{-(p-1)} + u_{-(p-2)} \\ = -(-1)^p u_{p-1} + (-1)^{p-1} u_{p-2} = (-1)^{p+1} (u_{p-1} + u_{p-2}) = (-1)^{p+1} u_p.$$

Or la formule se vérifie pour $p=0$ et $p=1$. Elle est donc établie.

L'équation génératrice de la suite de Fibonacci est

$$(3) \quad x^2 - x - 1 = 0,$$

dont les racines sont

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

positive et supérieure à 1,

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

négative et inférieure à 1 en valeur absolue.

On a, en vertu d'une formule connue,

$$u_p = \frac{x_1^p - x_2^p}{x_1 - x_2}.$$

D'après cela, on peut écrire

$$\sum_{i=0}^{i=p} u_i = \frac{\sum_{i=0}^{i=p} x_1^i - \sum_{i=0}^{i=p} x_2^i}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{x_1^{p+1} - 1}{x_1 - 1} - \frac{x_2^{p+1} - 1}{x_2 - 1}}{x_1 - x_2} \\ = \frac{-(x_1^{p+1} - x_2^{p+1}) + x_1 x_2 (x_1^p - x_2^p) + x_1 - x_2}{(x_1 - x_2)(x_1 - 1)(x_2 - 1)}.$$

Or, x_1 et x_2 étant racines de l'équation (3), on a

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= -1, \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) &= -1; \end{aligned}$$

par suite,

$$\sum_{i=0}^{i=p} u_i = \frac{x_1^{p+1} - x_2^{p+1}}{x_1 - x_2} + \frac{x_1^p - x_2^p}{x_1 - x_2} - 1 = u_{p+1} + u_p - 1$$

ou, d'après la formule de définition,

$$(4) \quad \sum_{i=0}^{i=p} u_i = u_{p+2} - 1.$$

Cherchons maintenant à effectuer la somme

$$\sum_{i=0}^{i=p} (-1)^i u_i = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \dots + (-1)^p u_p.$$

Elle peut s'écrire, en vertu de (2),

$$-(u_0 + u_{-1} + u_{-2} + u_{-3} + \dots + u_{-p});$$

par suite,

$$\sum_{i=0}^{i=p} (-1)^i u_i = - \sum_{i=0}^{i=p} u_{-i}.$$

Pour cette somme, on trouvera, comme précédemment, en représentant par x'_1 et x'_2 les racines de l'équation

$$(5) \quad \begin{aligned} x^2 + x - 1 &= 0, \\ \sum_{i=0}^{i=p} u_{-i} &= \frac{x'_1 x'_2 (x_1^p - x_2^p) - (x_1^{p+1} - x_2^{p+1}) + x'_1 - x'_2}{(x'_1 - x'_2)(x'_1 - 1)(x'_2 - 1)}. \end{aligned}$$

Ici, d'après (5), on a

$$x'_1 x'_2 = -1, \quad (x'_1 - 1)(x'_2 - 1) = 1,$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{i=p} u_{-i} &= - \frac{x_1^{p+1} - x_2^{p+1}}{x'_1 - x'_2} - \frac{x_1^p - x_2^p}{x'_1 - x'_2} + 1 \\ &= -u_{-(p+1)} - u_{-p} + 1 = -u_{-(p-1)} + 1. \end{aligned}$$

Donc

$$(6) \quad \sum_{i=0}^{i=p} (-1)^i u_i = (-1)^p u_{p-1} - 1.$$

Le rapprochement des formules (4) et (6) fait voir que, *si p est impair*, on a

$$\sum_{i=0}^{i=p} u_i = \sum_{i=0}^{i=p+3} (-1)^i u_i,$$

et, *si p est pair*,

$$\sum_{i=0}^{i=p} u_i = - \sum_{i=0}^{i=p+3} (-1)^i u_i - 2.$$

J'établirai enfin, au sujet de la suite de Fibonacci, une dernière formule dont j'aurai besoin plus loin.

On a

$$\frac{u_p}{u_{p-i}} = \frac{x_1^p - x_2^p}{x_1^{p-i} - x_2^{p-i}} = \frac{x_1^i - x_2^i \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{p-i}}{1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{p-i}}.$$

Laissant i fixe, faisons croître p indéfiniment; x_2 étant, en valeur absolue, inférieur à x_1 , on a $\lim \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{p-i} = 0$, et, par suite,

$$(7) \quad \lim \frac{u_p}{u_{p-i}} = x_1^i.$$

5. Je vais maintenant aborder le problème que j'ai en vue dans cette Note, et qui est le suivant :

Entre deux quantités données, en insérer un certain nombre d'autres, telles que, dans la suite ainsi obtenue, chaque terme soit égal à la somme des deux précédents.

Soient a et b les quantités données. Supposons $b > a$. Il s'agit d'insérer, entre a et b , p quantités $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ telles que, quel que soit i , et en posant $x_0 = a, \alpha_{p+1} = b$, on ait

$$x_i = x_{i-1} + x_{i-2}.$$

D'après la formule (1), on aura

$$b = x_{p+1} = x_1 u_{p+1} + a u_p,$$

u_p et u_{p+1} étant les termes d'indices p et $p+1$ dans la suite de Fibonacci. De là, on tire

$$\alpha_1 = \frac{b - au_p}{u_{p+1}}.$$

La formule (1) donne encore

$$\alpha_i = \alpha_1 u_i + au_{i-1} = \frac{b - au_p}{u_{p+1}} u_i + au_{i-1} = \frac{bu_i - a(u_p u_i - u_{p+1} u_{i-1})}{u_{p+1}}.$$

Les quantités a et b étant quelconques, nous pouvons faire $a = u_1$, $b = u_{p+2}$. Nous avons alors $\alpha_{i-1} = u_i$. Donc

$$u_i = \frac{u_{p+2} u_{i-1} - u_1 (u_p u_{i-1} - u_{p+1} u_{i-2})}{u_{p+1}}$$

ou, puisque $u_1 = 1$,

$$u_{p+1} u_i - u_{p+2} u_{i-1} = - (u_p u_{i-1} - u_{p+1} u_{i-2}).$$

Faisant décroître simultanément les indices p et i , on a successivement

$$\begin{aligned} u_{p+1} u_i - u_{p+2} u_{i-1} &= - (u_p u_{i-1} - u_{p+1} u_{i-2}) \\ &= u_{p-1} u_{i-2} - u_p u_{i-3} \\ &= \dots \dots \dots \\ &= (-1)^{i+1} (u_{p-i+2} u_1 - u_{p-i+3} u_0) = (-1)^{i+1} u_{p-i+2}; \end{aligned}$$

par suite,

$$u_p u_i - u_{p+1} u_{i-1} = (-1)^{i+1} u_{p-i+1}.$$

Remarquons en passant que c'est là une propriété intéressante des nombres de Fibonacci (¹), propriété dont la généralité exige la considération des termes à indices négatifs qui ont été définis plus haut. Grâce à cette formule, la valeur de α_i peut être mise sous la forme

$$(8) \quad \alpha_i = \frac{bu_i + a(-1)^i u_{p+1-i}}{u_{p+1}}.$$

Remarquons que les termes u_i et u_{p+1-i} sont équidistants des extrêmes dans la suite

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_{p-1}, u_p, u_{p+1}.$$

ce qui permet de retenir très aisément la formule.

(¹) Pour $i = p$, cette formule donne $u_p^2 = u_{p+1} u_{p-1} + (-1)^{p+1}$.

6. Le problème est résolu ; nous allons le discuter en supposant a et b positifs.

a et b étant positifs, on voit que tous les termes à indice pair sont nécessairement positifs.

Les termes d'indice impair sont positifs à partir du terme x_{2k+1} , tel que

$$\frac{u_{p+2k-2}}{u_{2k-1}} > \frac{b}{a} > \frac{u_{p+2k}}{u_{2k+1}};$$

il y a alors k termes négatifs.

En particulier, si

$$u_p < \frac{b}{a},$$

tous les termes sont positifs. Si de plus

$$\frac{bu_1 - au_p}{u_{p+1}} > a,$$

ces termes vont continuellement en croissant de a à b . Or, puisque $u_1 = 1$, cette condition peut s'écrire

$$b > a(u_p + u_{p+1})$$

ou

$$u_{p+2} < \frac{b}{a}.$$

Il ne peut y avoir de termes négatifs que dans la première moitié de la suite. En effet, si le terme x_{2k+1} est dans la seconde moitié, on a forcément

$$\frac{u_{p-2k}}{u_{2k+1}} < 1,$$

et, comme $\frac{b}{a} > 1$, *a fortiori*,

$$\frac{u_{p-2k}}{u_{2k+1}} < \frac{b}{a},$$

ce qui démontre la proposition avancée.

7. Nous allons maintenant chercher, pour une valeur donnée, le nombre maximum de termes négatifs que peut renfermer la suite considérée.

Supposons d'abord p impair, $p = 2n + 1$.

Il existe alors un terme du milieu, pour lequel $u_i = u_{p+1-i}$; la valeur de ce terme peut donc s'écrire

$$\frac{(b \pm a)u_i}{u_{p+1}},$$

qui est nécessairement > 0 .

Il y a deux cas à considérer suivant que n est pair ou impair.

1° n pair. — Le terme du milieu est α_{n+1} . Le terme précédent α_n étant à indice pair est nécessairement positif. Le terme le plus haut qui puisse être négatif est

$$\alpha_{n-1} = \frac{bu_{n-1} - au_{n+1}}{u_{2n+1}}.$$

Pour qu'il soit négatif, il faut que

$$\frac{u_{n+1}}{u_{n-1}} > \frac{b}{a}.$$

Il y a alors $\frac{n}{2}$ termes négatifs.

2° n impair. — Le terme le plus haut qui puisse être négatif est

$$\alpha_n = \frac{bu_n - au_{n+1}}{u_{2n+1}}.$$

Il le sera, lorsque

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{b}{a},$$

et il y aura alors $\frac{n+1}{2}$ termes négatifs.

Supposons maintenant p pair, $p = 2n$. Il n'y a pas de terme du milieu. Deux cas à considérer :

1° n pair. — Le plus haut des termes qui puissent être négatifs est

$$\alpha_{n+1} = \frac{bu_{n-1} - au_{n+1}}{u_{2n+1}}.$$

Il est négatif pour

$$\frac{u_{n+1}}{u_{n-1}} > \frac{b}{a},$$

et il y a alors $\frac{n}{2}$ termes négatifs.

2° n impair. — Le nombre des termes négatifs est maximum

lorsque

$$\alpha_n = \frac{bu_n - au_{n+1}}{u_{2n+1}}$$

est négatif, c'est-à-dire lorsque

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{b}{a},$$

et ce nombre maximum est $\frac{n+1}{2}$.

Si l'on compare les quatre cas qui viennent d'être envisagés, on voit que l'on peut énoncer cette proposition générale :

Si l'on insère p termes entre a et b , et que $I\left(\frac{p}{2}\right)$ représente le plus grand nombre IMPAIR inférieur ou égal à la partie entière du quotient de p par 2, la suite aura son nombre maximum de termes négatifs si

$$\frac{u_{p-1\left(\frac{p}{2}\right)+1}}{u_{1\left(\frac{p}{2}\right)}} > \frac{b}{a},$$

et ce nombre sera $\frac{I\left(\frac{p}{2}\right)+1}{2}$.

Ce nombre peut encore s'exprimer d'une autre façon. Représentons par $E\left(\frac{N}{2}\right)$ la partie entière du quotient de N par 2 et, ainsi que nous l'avons fait dans une autre Note (1), par $G\left(\frac{N}{2}\right)$ la différence $N - E\left(\frac{N}{2}\right)$. Nous voyons alors que le nombre maximum de termes négatifs peut dans tous les cas s'exprimer par

$$G\left[\frac{E\left(\frac{p}{2}\right)}{2}\right].$$

De là, on déduit cette formule

$$\frac{I\left(\frac{p}{2}\right)+1}{2} = G\left[\frac{E\left(\frac{p}{2}\right)}{2}\right].$$

(1) Voir *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XII, p. 87.

Faisons, par exemple, $a = 1$, $b = 4$, $p = 12$. Nous avons

$$\begin{aligned} I\left(\frac{p}{2}\right) &= 5, \\ p + 1 - I\left(\frac{p}{2}\right) &= 8; \\ \frac{u_8}{u_5} &= \frac{21}{5} \quad \text{qui est} > \frac{b}{a} \text{ ou } 4. \end{aligned}$$

Donc la suite considérée aura son nombre maximum de termes négatifs et ce nombre sera

$$\frac{1 + I\left(\frac{p}{2}\right)}{2} = 3.$$

Effectivement, cette suite est, par application de la formule (8),

$a.$	$\alpha_1.$	$\alpha_2.$	$\alpha_3.$	$\alpha_4.$	$\alpha_5.$	$\alpha_6.$	$\alpha_7.$	$\alpha_8.$	$\alpha_9.$	$\alpha_{10}.$	$\alpha_{11}.$	$\alpha_{12}.$	b
1	$-\frac{140}{133}$	$\frac{92}{133}$	$-\frac{47}{133}$	$\frac{16}{133}$	$-\frac{1}{133}$	$\frac{15}{133}$	$\frac{16}{133}$	$\frac{89}{133}$	$\frac{133}{133}$	$\frac{223}{133}$	$\frac{358}{133}$	$\frac{577}{133}$	4

Elle a bien trois termes négatifs, et il ne saurait, pour $p = 12$, y en avoir davantage, puisque le dernier terme de la première moitié de la suite est α_6 , qui est forcément positif, comme ayant un indice pair.

8. Nous poserons ici la définition qui a été généralisée au début de cette Note, définition qui est indispensable à la facilité du langage. Lorsque, pour une valeur donnée de p , la suite possède le nombre maximum de termes négatifs correspondant à cette valeur de p , nombre qui est, ainsi que nous l'avons vu, égal à $\frac{1 + I\left(\frac{p}{2}\right) + 1}{2}$, nous dirons qu'il y a *plénitude* de termes négatifs. Nous allons faire une étude spéciale de la plénitude.

A cet effet, nous distinguerons quatre cas, comme précédemment. De plus, nous conviendrons, pour abréger l'écriture, de poser

$$\frac{u_{p-1\left(\frac{p}{2}\right)+1}}{u_{1\left(\frac{p}{2}\right)}} = R_p.$$

Il y aura donc, pour des valeurs données de p , a et b , plénitude ou non, suivant que R_p sera supérieur ou inférieur à $\frac{b}{a}$.

PREMIER CAS. — p est de la forme $4n$.

R_p est alors donné par la formule

$$R_p = \frac{u_{\frac{p}{2}+2}}{u_{\frac{p}{2}-1}}.$$

Je dis que ce rapport croît constamment avec p , c'est-à-dire que

$$R_p < R_{p+4}.$$

En effet, cette inégalité peut s'écrire

$$\frac{x_1^{2n+2} - x_2^{2n+2}}{x_1^{2n-1} - x_2^{2n-1}} < \frac{x_1^{2n+6} - x_2^{2n+6}}{x_1^{2n+3} - x_2^{2n+3}}.$$

Chassant les dénominateurs (qui sont positifs), réduisant et tenant compte de ce que $x_1 x_2 = -1$, on met bien aisément cette inégalité sous la forme

$$1 < x_1^4 + x_2^4.$$

Elle se trouve ainsi vérifiée; car, en appliquant, pour l'exposant 5, à l'équation

$$x^2 - x - 1 = 0$$

la formule qui fait connaître la somme des puissances semblables des racines d'une équation (1), on trouve

$$x_1^5 + x_2^5 = 11.$$

Ainsi donc, R_p croît en même temps que p . On trouve, en effet,

p .	R_p .
4	3
8	4
12	4,2
16	4,2307...
20	4,2352...
..	

Dans $\frac{u_{\frac{p}{2}+2}}{u_{\frac{p}{2}-1}}$, l'indice supérieur surpassant l'indice inférieur de

(1) Voir SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure*, t. I, p. 450; 5^e édition.

trois unités, on a, en vertu de la formule (7),

$$\lim R_p = x_1^3 = 4,23603\dots$$

Donc, si $\frac{b}{a} > x_1^3$, on ne peut avoir pour aucune valeur de p , de la forme $4n$, $R_p > \frac{b}{a}$, et, par suite, pour aucune de ces valeurs, il ne peut y avoir plénitude de termes négatifs.

Si, au contraire, $\frac{b}{a} < 3$, pour toute valeur de p de la forme $4n$, on a $R_p > \frac{b}{a}$, et, par suite, pour chacune de ces valeurs, il y a plénitude de termes négatifs.

Si $\frac{b}{a}$ est compris entre 3 et x_1^3 , la plénitude a lieu pour toute valeur de p supérieure à celle pour laquelle on a, pour la première fois,

$$\frac{u_{\frac{p}{2}+2}}{u_{\frac{p}{2}-1}} > \frac{b}{a}.$$

Il est curieux de remarquer l'extrême rapidité avec laquelle croît le nombre des valeurs de p pour lesquelles la plénitude a lieu.

Ainsi, pour $\frac{b}{a} < 3$, ce nombre est nul, et pour $\frac{b}{a} > 2 + \sqrt{5}$ ou 4,23603..., ce nombre est infini. D'ailleurs ce nombre croît avec une rapidité d'autant plus grande que $\frac{b}{a}$ se rapproche davantage de $2 + \sqrt{5}$.

Nous allons mettre ce fait plus en évidence. Pour cela, calculons les intervalles de valeurs de $\frac{a}{b}$, à l'intérieur desquels le nombre des plénitudes possibles reste le même, c'est-à-dire les intervalles tels que $R_{p+4} - R_p$. Puisque $p = 4n$, on a

$$R_{p+4} - R_p = \frac{x_1^{2n+4} - x_2^{2n+4}}{x_1^{2n+1} - x_2^{2n+1}} - \frac{x_1^{2n+2} - x_2^{2n+2}}{x_1^{2n-1} - x_2^{2n-1}}.$$

Réduisant au même dénominateur, effaçant les termes qui se détruisent et tenant compte de ce que $x_1 x_2 = -1$, on met cette différence sous la forme

$$R_{p+4} - R_p = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^{2n} + x_2^{2n} + x_1^2 + x_2^2} = \frac{S_2 - 1}{S_p + S_2}.$$

S_p désignant la somme des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

On a, par application d'une formule connue ⁽¹⁾,

$$(9) \quad \begin{cases} S_p = 1 + p + \frac{p(p-3)}{1 \cdot 2} + \dots \\ + \frac{p(p-\mu-1)(p-\mu-2)\dots(p-2\mu+1)}{1 \cdot 2 \dots \mu} + \dots, \end{cases}$$

en prolongeant ce développement jusqu'à ce qu'il s'arrête de lui-même; par conséquent,

$$\begin{aligned} S_2 &= 3, \\ S_5 &= 11; \end{aligned}$$

donc,

$$R_{p+1} - R_p = \frac{10}{4 + p + \frac{p(p-3)}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{p(p-\mu-1)(p-\mu-2)\dots(p-2\mu+1)}{1 \cdot 2 \dots \mu} + \dots};$$

et l'on voit que cet intervalle décroît rapidement lorsque p augmente.

DEUXIÈME CAS. — p est de la forme $4n + 1$.

R_p est donné par

$$R_p = \frac{u_{p-E(\frac{p}{2})+2}}{u_{E(\frac{p}{2})-1}} = \frac{u_{2n+3}}{u_{2n+1}}.$$

Ici encore, on a

$$R_p < R_{p+1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{x_1^{2n+3} - x_2^{2n+3}}{x_1^{2n+1} - x_2^{2n+1}} < \frac{x_1^{2n+5} - x_2^{2n+5}}{x_1^{2n+3} - x_2^{2n+3}},$$

que l'on ramène à

$$x_1^2 + x_2^2 < x_1^6 + x_2^6,$$

inégalité vérifiée, puisque

$$x_1^2 + x_2^2 = 3$$

et

$$x_1^6 + x_2^6 = 18.$$

(1) Loc. cit.

D'ailleurs, on trouve

p .	R_p .
5	5
9	6,5
13	6,8
17	6,8461...
..	

Dans $\frac{u_{2n+3}}{u_{2n-1}}$ l'indice supérieur surpasse l'indice inférieur de quatre unités; on a donc, en vertu de la formule (7),

$$\lim R_p = x_1 = 6,85403....$$

On déduit de ce qui précède que, si $\frac{b}{a} > x_1$, on ne peut avoir plénitude de termes négatifs pour aucune valeur de p de la forme $4n+1$.

Si $\frac{b}{a} < 5$, il y a plénitude pour toute valeur de p de la forme $4n+1$. Inutile d'ajouter que pour la valeur $p=1$ qui rentre dans cette forme, il ne peut y avoir de terme négatif, car la suite est alors

$$a, \quad b-a, \quad b.$$

On peut répéter ici les remarques faites sur le cas précédent; on trouve, par un calcul analogue,

$$R_{p+1} - R_p = \frac{S_1 - S_2}{S_{p-1} + S_2}$$

ou

$$R_{p+1} - R_p = \frac{15}{4 + (p-1) + \frac{(p-1)(p-4)}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{(p-1)(p-\mu-2)(p-\mu-3)\dots(p-2\mu)}{1 \cdot 2 \dots \mu}}$$

TROISIÈME CAS. — p est de la forme $4n+2$.

Ici, l'on a

$$R_p = \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}}$$

Le rapport R_p va encore en croissant, attendu que

$$\frac{x_1^{2n+2} - x_2^{2n+2}}{x_1^{2n+1} - x_2^{2n+1}} < \frac{x_1^{2n+3} - x_2^{2n+3}}{x_1^{2n+2} - x_2^{2n+2}}$$

ou

$$-(x_1 + x_2) < x_1^3 + x_2^3,$$

car

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1, \\ x_1^3 + x_2^3 &= 1. \end{aligned}$$

On a, en effet,

p	R_p
6	1,5
10	1,6
14	1,61538...
18	1,6176
..	

La limite de R_p est, d'après la formule (7),

$$\lim R_p = x_1 = 1,61803...$$

Donc, si $\frac{b}{a} > x_1$, il n'y a plénitude de termes négatifs pour aucune valeur de p de la forme $4n + 2$.

Si $\frac{b}{a} < 1,5$, la plénitude existe pour toute valeur de p de cette forme.

Pour la valeur $p = 2$, qui rentre dans ce cas, il ne peut y avoir de terme négatif; car la suite est alors

$$a, \quad \frac{b-a}{2}, \quad \frac{b+a}{2}, \quad b.$$

Les limites 1,5 et $x_1 = 1,61803...$ entre lesquelles varie $\frac{b}{a}$, pour que le nombre des valeurs de p donnant plénitude passe de l'infini à zéro, sont, on le voit, extrêmement rapprochées.

Elles diffèrent d'un peu plus de 0,1. On trouve d'ailleurs

$$R_{p+4} - R_p = \frac{S_3 + S_1}{S_{p+2} + S_2}$$

ou, d'après la formule (9),

$$R_{p+4} - R_p = \frac{5}{4 + (p+2) + \frac{(p+2)(p-1)}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{(p+2)(p-\mu-1) \dots (p-2\mu+3)}{1 \cdot 2 \dots \mu} + \dots}$$

QUATRIÈME CAS. — p est de la forme $4n + 3$.

Le rapport R_p est donné par

$$R_p = \frac{u_{2n+3}}{u_{2n+1}}.$$

Il va en croissant, en vertu de l'inégalité

$$\frac{x_1^{2n+3} - x_2^{2n+3}}{x_1^{2n+1} - x_2^{2n+1}} < \frac{x_1^{2n+5} - x_2^{2n+5}}{x_1^{2n+3} - x_2^{2n+3}},$$

ou

$$2 < x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}},$$

qui est vérifiée, puisque, d'après la formule (9), on a

$$x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}} = 7.$$

En effet, on trouve

p .	R_p .
3	2
7	2,5
11	2,6
15	2,6153...
19	2,6176...
..	

et, à la limite, en vertu de la formule (7),

$$\lim R_p = x_1^2 = 2,61802...$$

En conséquence, si $\frac{b}{a} > x_1^2$, il n'y a plénitude de termes négatifs pour aucune valeur de p de la forme $4n + 3$.

Si $\frac{b}{a} < 2$, il y a plénitude pour toute valeur de p de cette forme.

Enfin, dans ce cas, on trouve

$$R_{p+4} - R_p = \frac{S_4 - 2}{S_{p+1} + S_2}$$

ou, d'après la formule (9),

$$R_{p+4} - R_p = \frac{5}{4 + (p+1) + \frac{(p+1)(p-2)}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{(p+1)(p-\mu) \dots (p-2\mu+2)}{1 \cdot 2 \dots \mu} + \dots}$$

De l'examen des quatre cas qui précèdent résultent les remarques générales suivantes :

I. Si $\frac{b}{a} < 1,5$, il y a plénitude de termes négatifs pour toute valeur de p .

II. Si $\frac{b}{a} > x_1 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} = 6,85403\dots$, cette plénitude n'a lieu pour aucune valeur de p .

Entre ces limites extrêmes :

III. Si $\frac{b}{a} > x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803\dots$, la plénitude n'a lieu pour aucune valeur de p de la forme $4n+2$.

IV. Si $\frac{b}{a} > x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2,61802\dots$, la plénitude n'a lieu pour aucune valeur de p des formes $4n+2$ et $4n+3$.

V. Si $\frac{b}{a} > x_3 = 2 + \sqrt{5} = 4,23603\dots$, la plénitude n'a lieu pour aucune valeur de p des formes $4n+2$, $4n+3$ et $4n$.

Et aussi :

VI. Si $\frac{b}{a} < 2$, il y a plénitude pour toutes les valeurs de p des formes $4n+3$, $4n$ et $4n+1$.

VII. Si $\frac{b}{a} < 3$, il y a plénitude pour toutes les valeurs de p des formes $4n$ et $4n+1$.

VIII. Si $\frac{b}{a} < 5$, il y a plénitude pour toutes les valeurs de p de la forme $4n+1$.

Exemple. — Prenons $a=1$, $b=4$, c'est-à-dire $\frac{b}{a} = 4$.

D'après la Remarque IV, la plénitude de termes négatifs ne peut avoir lieu pour aucune valeur de p de l'une des formes $4n+2$ et $4n+3$. D'après la Remarque VIII, elle aura lieu pour toute valeur de p de la forme $4n+1$.

Quant aux valeurs de p de la forme $4n$, la plénitude aura lieu pour toutes celles de ces valeurs qui sont supérieures à la première d'entre elles pour laquelle on a

$$\frac{u_{\frac{p}{2}+2}}{u_{\frac{p}{2}-1}} > 4,$$

c'est-à-dire à partir de $p = 12$. Pour $p = 8$, on a $R_p = 4$; il y a un terme nul; mais nous ne comptons pas les termes nuls comme négatifs.

On peut donc dire :

Si $a = 1$, $b = 4$, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait plénitude de termes négatifs est que p soit ou de la forme $4n$, n étant supérieur ou égal à 3, ou de la forme $4n + 1$.

9. Nous allons maintenant opérer la sommation de la suite obtenue en intercalant, comme il a été dit, p termes entre les nombres a et b ; nous représenterons cette somme par S_p . En posant, comme précédemment, $a = x_0$, $b = x_{p+1}$, nous pourrions écrire

$$S_p = \sum_{i=0}^{i=p+1} x_i.$$

La formule (8) donne alors immédiatement

$$S_p = \frac{b \sum_{i=0}^{i=p+1} u_i + (-1)^{p+1} a \sum_{i=0}^{i=p+1} (-1)^i u_i}{u_{p+1}}$$

ou, en vertu des formules (4) et (6),

$$(10) \quad S_p = \frac{b(u_{p+1} - 1) + a[u_p + (-1)^p]}{u_{p+1}}.$$

Comme l'on a

$$u_{p+3} = u_{p+2} + u_{p+1},$$

$$u_p = u_{p+2} - u_{p+1},$$

on voit que cette formule peut encore s'écrire

$$(10') \quad S_p = \frac{(b + a)u_{p+2} + (b - a)u_{p+1} - [b - (-1)^p a]}{u_{p+1}}$$

10. Il nous reste un dernier point à examiner : *Que devient la suite considérée lorsque l'on fait croître indéfiniment le nombre p des termes insérés entre a et b ?*

Pour nous en rendre compte, nous allons *replier* la suite. Voici en quoi consiste cette opération. Si, numérotant la suite à

rebours, nous écrivons

$$\beta_{p+1} = \alpha_0 = a, \quad \beta_p = \alpha_1, \quad \beta_{p-1} = \alpha_2, \quad \dots, \quad \beta_1 = \alpha_p, \quad \beta_0 = \alpha_{p+1} = b,$$

nous pourrons écrire la suite, en plaçant l'un au-dessous de l'autre les termes équidistants des extrêmes

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_0, & \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_i, & \dots, \\ \beta_0, & \beta_1, & \beta_2, & \dots, & \beta_i, & \dots, \end{array}$$

ces deux lignes étant prolongées jusqu'au milieu de la suite. S'il existe un terme du milieu, nous l'inscrirons indifféremment dans l'une ou l'autre des deux lignes.

Nous avons, en vertu de la formule (8),

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{bu_i + a(-1)^i u_{p+1-i}}{u_{p+1}}, \\ \beta_i &= \frac{bu_{p+1-i} + a(-1)^{p+1-i} u_i}{u_{p+1}}. \end{aligned}$$

Faisons croître indéfiniment le nombre p . Le nombre des termes dans chacune des deux suites (α) et (β) , dont la réunion constitue la suite considérée, croît indéfiniment. De plus, on a évidemment, i étant une quantité fixe,

$$\lim \frac{u_i}{u_{p+1}} = 0$$

et, en vertu de la formule (7),

$$\lim \frac{u_{p+1-i}}{u_{p+1}} = \frac{1}{x_1^i};$$

donc

$$\lim \alpha_i = \frac{(-1)^i a}{x_1^i},$$

$$\lim \beta_i = \frac{b}{x_1^i};$$

et, à la limite, la suite repliée est formée par la juxtaposition des deux suites

$$\begin{array}{ccccccc} a & - & \frac{a}{x_1} & \frac{a}{x_1^2} & \dots & \frac{(-1)^i a}{x_1^i} & \dots, \\ b & & \frac{b}{x_1} & \frac{b}{x_1^2} & \dots & \frac{b}{x_1^i} & \dots \end{array}$$

Ainsi donc la limite de la suite se compose de termes alternativement positifs et négatifs, décroissant de a jusqu'à zéro et ne dépendant que de a et de termes positifs croissant de zéro jusqu'à b , et ne dépendant que de b .

Si nous représentons par S la limite de la somme S_p , nous aurons

$$S = a \left(1 - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1^2} - \dots \right) + b \left(1 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1^2} + \dots \right) = a \frac{1}{1 + \frac{1}{x_1}} + b \frac{1}{1 - \frac{1}{x_1}}.$$

Or

$$1 + \frac{1}{x_1} = 1 - x_2 = x_1;$$

par suite,

$$S = \frac{a}{x_1} + \frac{bx_1}{x_1 - 1} = \frac{a(x_1 - 1) + bx_1^2}{x_1^2 - x_1}.$$

Mais, x_1 étant racine de $x^2 - x - 1 = 0$, on a

$$x_1^2 = x_1 + 1,$$

$$x_1^2 - x_1 = 1;$$

donc enfin

$$S = a(x_1 - 1) + b(x_1 + 1).$$

C'est d'ailleurs ce que donne directement la formule (10'). En effet, remarquant que, d'après la formule (7),

$$\lim \frac{u_{p+2}}{u_{p+1}} = x_1,$$

on a

$$S = (b + a)x_1 + (b - a);$$

c'est la formule précédente.

Pour terminer, nous ferons la remarque suivante :

Étant connue la suite de Fibonacci, on peut très aisément calculer une puissance quelconque x_1^p de x_1 , en fonction de x_1 .

En effet, posons $U_0 = 1$, $U_1 = x_1$ et, d'une manière générale, $U_p = x_1^p$. Comme nous avons

$$x_1^2 = x_1 + 1,$$

nous en déduisons, en multipliant les deux membres par x_1^{p-2} ,

$$U_p = U_{p-1} + U_{p-2}.$$

Donc, par application de la formule (1),

$$U_p = x_1 u_p + u_{p-1},$$

c'est-à-dire

$$x_1'' = x_1 u_p + u_{p-1}.$$

De là, nous déduirons une remarquable conséquence relativement à la suite de Fibonacci. En effet, l'égalité précédente se démontre pour x_2 comme pour x_1 ; donc

$$x_2'' = x_2 u_p + u_{p-1}.$$

Multiplions ces deux égalités membre à membre, en tenant compte de ce que $x_1 x_2 = -1$, $x_1 + x_2 = 1$; il vient

$$(-1)^p = -u_p^2 + u_{p-1}^2 + u_p u_{p-1}$$

ou

$$u_p u_{p-1} = u_p^2 - u_{p-1}^2 + (-1)^p,$$

c'est-à-dire que *le produit de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci est égal à la différence des carrés de ces deux termes augmentée ou diminuée de l'unité suivant que l'indice du plus élevé de ces termes est pair ou impair.*

Sur un problème de Fermat; par PAUL TANNERY.

(Séance du 2 décembre 1885.)

1. Diophante ramène un de ses problèmes (V, 25) à la recherche de trois triangles rectangles en nombres (1) tels, que le produit des trois hypoténuses par les trois hauteurs soit un nombre carré.

Il se donne ensuite l'un des trois triangles, soit (5, 3, 4); comme la hauteur de ce dernier, 4, est un carré, il reste donc à

(1) On appelle ainsi un groupe de trois nombres (a, b, c) , entiers ou fractionnaires, tels que $a^2 = b^2 + c^2$; a est l'hypoténuse du triangle rectangle, b sera la base, c la hauteur.

chercher deux triangles (a_1, b_1, c_1) , (a_2, b_2, c_2) , tels que

$$(1) \quad a_1 c_1 = 5 a_2 c_2.$$

Le reste du problème est corrompu.

Bachet a donné de la première des deux questions une solution assez élégante que Cossali a traduite depuis en langage algébrique, mais qui, n'étant, bien entendu, nullement générale, ne s'applique point à la forme spéciale (1) à laquelle conduit le texte de Diophante.

Fermat s'est proposé la divination de la solution perdue, mais il y a été moins heureux qu'ailleurs (1). Au lieu de s'attacher au texte même, il a abordé le problème *a priori* d'une façon qu'on peut représenter comme suit :

Soit à traiter, en général, le problème

$$(2) \quad a_1 c_1 = m a_2 c_2;$$

d'après la théorie des triangles rectangles en nombres, on peut poser

$$\begin{aligned} a_1 &= p^2 + q^2, & c_1 &= 2pq, \\ a_2 &= r^2 + s^2, & c_2 &= 2rs, \end{aligned}$$

p, q, r, s étant des indéterminées.

Si l'on suppose d'ailleurs $r = p$, l'équation (2) deviendra

$$(3) \quad q(p^2 - q^2) = ms(p^2 + s^2).$$

d'où

$$p^2 = \frac{q^3 - ms^3}{ms - q}.$$

Dans ses transformations subséquentes, Fermat a commis une erreur de signe, en sorte qu'il résout le problème de rendre carré le nombre $\frac{q^3 - ms^3}{q - ms}$, et non pas le problème qu'il s'était posé. Il a reconnu ensuite son erreur et, sans donner d'autres explications, s'est contenté d'affirmer qu'il avait résolu généralement la question et d'en donner une solution particulière, pour $m = 5$, en

(1) La solution de Diophante a été reconstituée d'après le texte de Bachet par le traducteur allemand, Schulz (Berlin, 1822); elle repose sur un artifice tout particulier et ne peut conduire aux nombres indiqués par Fermat.

nombres assez grands pour que l'on ne pût, dit-il, imputer leur découverte au hasard (¹). Ces nombres sont les suivants :

$$\begin{aligned} a_1 &= 48\,543\,669\,109, & b_1 &= 36\,083\,779\,309, & c_1 &= 32\,472\,275\,280, \\ a_2 &= 42\,636\,752\,938, & b_2 &= 41\,990\,695\,400, & c_2 &= 7\,394\,200\,038. \end{aligned}$$

2. Il est difficile de révoquer en doute l'affirmation de Fermat, qu'il a résolu généralement le problème; cependant il peut y être arrivé en abandonnant la voie qu'il avait d'abord essayée et en retrouvant soit l'artifice de Diophante, soit quelque autre semblable.

Si en effet, dans l'équation (3), on substitue

$$q = mt(x+1), \quad s = t(x+m^2), \quad p = ty,$$

on arrive à l'équation indéterminée

$$(4) \quad x^3 - 3m^2x - m^2(m^2+1) = y^2,$$

qui, sous sa forme générale, est incontestablement rebelle à toutes les méthodes de Diophante et de Fermat que l'on connaît.

Mais il est certain, d'un autre côté, que c'est au contraire en suivant sa première voie que Fermat a obtenu les nombres qu'il a donnés. Si l'on calcule en effet les nombres générateurs de ces triangles, il vient

$$p = r = 205\,703, \quad q = 78930, \quad s = 17973.$$

Ainsi nous retrouvons l'hypothèse fondamentale $p = r$, qui conduit à l'équation (4).

Il m'a paru intéressant d'appeler sur cette difficulté l'attention des mathématiciens.

En nous bornant d'ailleurs au cas spécial où $m = 5$, sur lequel ont porté les calculs de Fermat, l'équation (4) devient

$$(5) \quad x^3 - 75x - 650 = y^2;$$

nous rencontrons une nouvelle complication.

Il est facile de voir que, dans ce cas, nous avons une solution

(¹) *Quæstionem ipsam Diophantæam nos iterum examini subjicientes et methodum nostram sedulo consulentes tandem generaliter solvimus. Exemplum tantum subjiciemus confisi numeros ipsos satis indicaturos non sorti, sed arti solutionem deberi.*

immédiate ($p = r = 1$, $q = 2$, $s = 1$). A la vérité, elle ne permet pas de construire les triangles demandés par Diophante; mais, avec la méthode de Fermat, une première solution en donne une infinité d'autres par voie de dérivation successive.

Comme, en général,

$$x = m \frac{mq - s}{ms - q}, \quad y = mp \frac{m^2 - 1}{ms - q},$$

cette solution immédiate correspond au couple de valeurs

$$x_1 = 15, \quad y_1 = 40.$$

En substituant dans le premier membre de l'équation

$$x = 15 + x',$$

le terme constant devient le carré $(40)^2$, et l'équation transformée peut être traitée d'après la méthode de Diophante. On obtiendra ainsi une seconde valeur $x_2 = \frac{105}{4}$, d'où l'on pourra déduire les triangles suivants, satisfaisant au problème de Fermat :

$$\begin{array}{lll} a_1 = 87125, & b_1 = 7923, & c_1 = 86764, \\ a_2 = 46325, & b_2 = 32877, & c_2 = 32636. \end{array}$$

Or ces nombres sont certainement déjà assez compliqués pour que Fermat les eût sans doute donnés, s'il avait fait la même déduction, d'autant qu'elle est une application d'une de ses méthodes. D'autre part, sa solution numérique n'a certainement pas été obtenue par cette voie; car, si l'on poursuit la recherche des solutions suivantes, on arrive presque immédiatement à des nombres beaucoup plus élevés que ceux qui correspondent aux triangles de Fermat.

La façon dont il a obtenu les nombres générateurs de ces triangles reste donc un mystère, et il peut être permis de penser que, quoi qu'il en ait dit, il aura été aidé par le hasard dans une certaine mesure.

Je ne prétends point au reste traiter la question à fond; je me bornerai aux quelques indications suivantes pour épargner des tentatives inutiles à ceux qui voudraient l'aborder.

Si (par une restriction spéciale) on pose

$$x = z^2 + \frac{1}{3},$$

en même temps que

$$y = z^3 + u,$$

l'équation (5) prend la forme

$$z^4 - A z^2 - B = 2 u z^3 + u^2.$$

D'après les valeurs numériques et la solution de Fermat, $B + u^2$ se trouve un carré, et, si l'on pose

$$B + u^2 = v^2 z^2,$$

on trouve $v = 2$.

L'équation proposée se ramène dès lors à

$$z^2 - 2 u z - A - v^2 = 0,$$

où

$$u^2 + A + v^2 = w^2,$$

et l'on prendra

$$z = u + w.$$

Si l'on se donne $v = 2$, on trouvera d'ailleurs que, pour obtenir ainsi la solution, A et B sont soumis à une double condition; si au contraire on cherche à déterminer v de manière à obtenir la solution en conséquence de cette détermination, on tombe sur une équation beaucoup plus complexe que la proposée.

Sur l'hypercycle et la théorie des cycles polaires;

par M. DAUTHVILLE,

Maitre de Conférences à la Faculté de Montpellier.

(Séance du 17 février 1886.)

I. — Problèmes préliminaires.

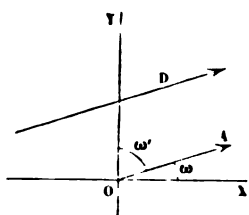
Nous adopterons, dans ce qui va suivre, des coordonnées rectilignes et rectangulaires.

Un cycle est déterminé par les coordonnées de son centre et son rayon. On sait que le rayon d'un cycle est positif ou négatif

suivant le sens dans lequel on suppose parcouru par un point mobile le cercle au moyen duquel on définit le cycle.

Considérons une semi-droite D (fig. 1). Menons par l'origine une parallèle à la droite correspondante, et prenons la région A

Fig. 1.



sur laquelle se déplacerait un mobile qui s'éloignerait de l'origine en marchant dans le sens qui correspond à la semi-droite donnée.

Soit ω l'angle, moindre que π , que fait A avec OX; et soit ω' l'angle, moindre que π , que fait A avec OY. Chacun de ces angles est déterminé par son cosinus. Soient $\alpha = \cos \omega$, $\beta = \cos \omega'$. On a $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Réciproquement, deux quantités données α , β , vérifiant la relation $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, peuvent être considérées comme les cosinus d'une semi-droite A. Cela posé, la semi-droite D sera déterminée par les cosinus α , β , et sa distance à l'origine p . Ces trois quantités sont les paramètres de la semi-droite.

Soit un point M ayant pour coordonnées (x, y) et une semi-droite D ayant pour paramètres (α, β, p) . La distance de M à D est, par définition, le rayon du cycle de centre M tangent à D. On voit sans peine que cette distance d est donnée par la formule suivante :

$$d = \beta x - \alpha y + p.$$

Étant donnée une courbe décrite dans un sens déterminé, les cosinus directeurs de la semi-droite tangente au point (x, y) sont donnés par les formules

$$\alpha = \frac{\partial s}{\partial x}, \quad \beta = \frac{\partial s}{\partial y}.$$

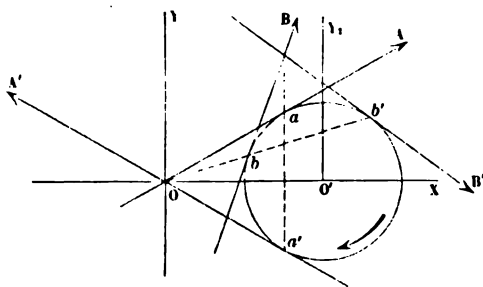
s désignant l'arc de courbe compris entre une origine fixe et le point (x, y) , arc pris avec le signe + ou le signe —, suivant qu'il est dirigé dans le sens suivant lequel la courbe est supposée décrite ou bien en sens contraire.

PROBLÈME I. — *Étant données les semi-droites A, A', B, trouver les paramètres de la conjuguée harmonique de B, relativement à A, A'.*

Prenons l'origine des coordonnées au point de rencontre de A et de A', l'axe de x suivant celles des bissectrices des droites A, A', qui est le lieu des centres des cycles tangents aux deux semi-droites, l'axe des y suivant l'autre bissectrice, et choisissons les directions positives des axes, de manière que O x , tournant de droite à gauche, vienne coïncider avec O y après une rotation de l'angle $\frac{\pi}{2}$.

On sait comment on construit la semi-droite cherchée B'. On décrit le cycle O' (fig. 2), tangent aux trois semi-droites données

Fig. 2.



A, B', B; la sécante qui joint le point O au point de contact b de B coupe le cycle en un second point b' . La tangente au cycle au point b' est la semi-droite cherchée B'. Cela posé, soient $\sqrt{1-k^2}$, k , o les paramètres de A; $-\sqrt{1-k^2}$, k , o ceux de A'; α , β , p ceux de B; et enfin α' , β' , p' ceux de B'. Le rayon r et les coordonnées x , y du centre du cycle tangent à A, A', B seront déterminés par les équations

$$kx - \sqrt{1-k^2}y - r = 0,$$

$$kx + \sqrt{1-k^2}y - r = 0,$$

$$\beta x - \alpha y + p - r = 0,$$

qui donnent

$$y = 0, \quad x = \frac{p}{k-\beta}, \quad r = \frac{kp}{k-\beta}.$$

B' étant tangente au même cycle, on a

$$\beta' \frac{p}{k-\beta} + p' - \frac{kp}{k-\beta} = 0.$$

Ainsi la question sera résolue, si l'on détermine α' , β' .

Remarquons que, si l'origine des coordonnées est au centre d'un cycle, les cosinus directeurs de la tangente à ce cycle au point $M(x, y)$ sont déterminés par les relations $\alpha = \frac{y}{r}$, $\beta = -\frac{x}{r}$. En effet, si $r > 0$, désignons par φ l'angle formé par le rayon OM avec OX', angle compté dans le sens direct. On aura, en prenant l'origine des arcs au point $y = 0$, $x = -r$,

$$s = r\varphi, \quad x = -r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

d'où

$$\alpha = \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = r \sin \varphi \cdot \frac{1}{r} = \sin \varphi = \frac{y}{r},$$

$$\beta = \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = r \cos \varphi \cdot \frac{1}{r} = \cos \varphi = -\frac{x}{r}.$$

Si r est négatif, désignons par φ l'angle formé par OM avec OX, angle compté dans le sens rétrograde, et prenons l'origine des arcs au point $y = 0$, $x = -r$. On aura

$$s = -r\varphi, \quad x = -r \cos \varphi, \quad y = -r \sin \varphi;$$

d'où

$$\alpha = \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = -r \sin \varphi \cdot \left(-\frac{1}{r}\right) = \sin \varphi = \frac{y}{r},$$

$$\beta = \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = -r \cos \varphi \cdot \left(-\frac{1}{r}\right) = \cos \varphi = -\frac{x}{r}.$$

D'après cette remarque, la question se réduit à trouver les coordonnées de b' , l'origine étant en O' . Les cosinus d'une semi-droite sont les mêmes par rapport aux axes OX, OY et par rapport aux axes O'X, O'Y. Les coordonnées de b sont donc $x = -r\beta$, $y = r\alpha$; et celles de O , $x = -\frac{P}{k-\beta}$, $y = 0$. La droite Ob a pour équation

$$y = \frac{\alpha(kx + r)}{1 + k\beta}.$$

Les abscisses des points de rencontre de cette droite avec le

cercle O' sont racines de l'équation

$$x^2 + \frac{x^2(kx + r)^2}{(1 - k\beta)^2} - r^2 = 0$$

ou

$$(1 + k^2 - 2k\beta)x^2 + 2kr\alpha^2x - \beta r^2[\beta(1 + k^2) - 2k] = 0.$$

L'une des racines étant $(-r\beta)$ et l'autre $(-r\beta')$, on a

$$r^2\beta\beta' = -\frac{\beta r^2[\beta(1 + k^2) - 2k]}{1 + k^2 - 2k\beta};$$

d'où

$$\beta' = \frac{2k - \beta(1 + k^2)}{1 + k^2 - 2k\beta}.$$

L'ordonnée du point b' étant $\alpha'r$, on a ensuite

$$\alpha'r = \frac{\alpha r}{1 - k\beta} \left[\frac{(1 + k^2)\beta k - 2k^2}{1 + k^2 - 2k\beta} + 1 \right],$$

d'où

$$\alpha' = \frac{(1 - k^2)\alpha}{1 + k^2 - 2k\beta}.$$

Enfin on a trouvé

$$\beta' \frac{p}{k - \beta} + p' - \frac{kp}{k - \beta} = 0;$$

on en tire

$$p' = \frac{-p(1 - k^2)}{1 + k^2 - 2k\beta}.$$

Les paramètres cherchés sont donc

$$(1) \quad \alpha' = \frac{(1 - k^2)\alpha}{1 + k^2 - 2k\beta}, \quad \beta' = \frac{2k - (1 + k^2)\beta}{1 + k^2 - 2k\beta}, \quad p' = -\frac{(1 - k^2)\beta}{1 + k^2 - 2k\beta}.$$

PROBLÈME II. — *Connaissant les paramètres α , β , p d'une semi-droite relativement à un système d'axes, trouver les paramètres α' , β' , p' de la même semi-droite relatifs à un autre système d'axes.*

Soient a , b les coordonnées de la nouvelle origine par rapport au premier système d'axes, et soit ω l'angle que font les directions OX , O_1X_1 (angle compté dans le sens rétrograde). On obtient

aisément les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \left\{ \begin{aligned} x &= x' \cos \omega - \beta' \sin \omega, \\ \beta &= x' \sin \omega - \beta' \cos \omega, \\ p &= -\beta' a + x' b + p'; \end{aligned} \right. \\
 (3) \quad & \left\{ \begin{aligned} x' &= x \cos \omega + \beta \sin \omega, \\ \beta' &= -x \sin \omega - \beta \cos \omega, \\ p' &= \beta a - x b + p. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

PROBLÈME III. — *Étant données deux semi-droites P, P', deux autres A, A', qui sont conjuguées harmoniques par rapport aux premières, et enfin une semi-droite B, trouver les paramètres de la semi-droite B', qui est conjuguée harmonique de B par rapport à A, A'.*

Prenons les axes de coordonnées relativement à P, P', comme nous avons fait dans le problème I. Désignons par les notations suivantes les paramètres considérés :

$$\begin{array}{l|l|l}
 P \dots & \sqrt{1-k^2}, k, 0 & A \dots x, \beta, p \\
 P' \dots & -\sqrt{1-k^2}, k, 0 & A' \dots x', \beta', p' \\
 B \dots & \lambda, \mu, q & B' \dots \lambda', \mu', q'.
 \end{array}$$

x', β', p' s'expriment en fonctions de x, β, p par les formules (1). Si l'on transporte l'origine des coordonnées au point de rencontre de A, A', les nouveaux paramètres seront

$$A \dots x, \beta, 0; \quad A' \dots x', \beta', 0; \quad B \dots \lambda, \mu, q_1; \quad B' \dots \lambda', \mu', q'_1.$$

Prenons maintenant comme axe des x la *bissectrice* des semi-droites A, A', et comme axe Oy la perpendiculaire avec les mêmes conventions relativement aux directions positives des axes. Soient les nouveaux paramètres

$$\begin{array}{l|l}
 A \dots x_1, \beta_1, 0; & A' \dots x'_1, \beta'_1, 0; \\
 B \dots \lambda_1, \mu_1, q_1; & B' \dots \lambda'_1, \mu'_1, q'_1.
 \end{array}$$

Soit ω l'angle dont il faut faire tourner Ox dans le sens rétrograde pour l'amener sur Ox₁. ω est défini par les conditions

$$\beta = \beta'_1, \quad x_1 = -x'_1.$$

c'est-à-dire, d'après les formules (3),

$$\beta \cos \omega - x \sin \omega = \beta' \cos \omega - x' \sin \omega.$$

On en déduit

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'}.$$

Les formules (1) donnent

$$\begin{aligned}\alpha - \alpha' &= \alpha - \frac{(1 - k^2)\alpha}{1 + k^2 - 2k\beta} = \frac{2k\alpha(k - \beta)}{1 + k^2 - 2k\beta}, \\ \beta - \beta' &= \beta - \frac{2k - (1 + k^2)\beta}{1 + k^2 - 2k\beta} = \frac{2(k - \beta)(k\beta - 1)}{1 + k^2 - 2k\beta}.\end{aligned}$$

De là

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{k\beta - 1}{k\alpha}, \quad \sin \omega = \frac{k\beta - 1}{\sqrt{1 + k^2 - 2k\beta}}, \quad \cos \omega = \frac{k\alpha}{\sqrt{1 + k^2 - 2k\beta}}.$$

Cela posé, les formules (1) donnent

$$\begin{aligned}\lambda'_1 &= \frac{\alpha_1^2 \lambda_1}{1 + \beta_1^2 - 2\beta_1 \mu_1}, \\ \mu'_1 &= \frac{2\beta_1 - (1 + \beta_1^2)\mu_1}{1 + \beta_1^2 - 2\beta_1 \mu_1}, \\ q'_1 &= \frac{-\alpha_1^2 q_1}{1 + \beta_1^2 - 2\beta_1 \mu_1},\end{aligned}$$

et les formules de transformation (2)

$$\lambda' = \lambda'_1 \cos \omega - \mu'_1 \sin \omega, \quad \mu' = \lambda'_1 \sin \omega + \mu'_1 \cos \omega.$$

1° *Calcul de λ' .* — Le numérateur de λ' est

$$(1 - \beta_1^2)\lambda_1 \cos \omega - 2\beta_1 \sin \omega + (1 + \beta_1^2)\mu_1 \sin \omega$$

ou

$$(\lambda_1 \cos \omega + \mu_1 \sin \omega) - \beta_1^2(\lambda_1 \cos \omega - \mu_1 \sin \omega) - 2\beta_1 \sin \omega$$

ou

$$\lambda \cos^2 \omega + 2\mu \sin \omega \cos \omega - \lambda \sin^2 \omega - \lambda \beta_1^2 - 2\beta_1^2 \sin \omega$$

ou

$$\lambda(\cos^2 \omega - \sin^2 \omega - \beta_1^2) + 2\mu \sin \omega \cos \omega - 2\beta_1 \sin \omega.$$

Remplaçant maintenant $\sin \omega$, $\cos \omega$, β_1 par leurs valeurs respectives

$$\begin{aligned}\cos \omega &= \frac{k\alpha}{\sqrt{1 + k^2 - 2k\beta}}, \quad \sin \omega = \frac{k\beta - 1}{\sqrt{1 + k^2 - 2k\beta}}, \\ \beta_1 &= \beta \cos \omega - \alpha \sin \omega = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + k^2 - 2k\beta}},\end{aligned}$$

on obtient finalement

$$\frac{\lambda[(k^2-1)x^2-(k\beta-1)^2]+2x(k\beta-1)(k\mu-1)}{1+k^2-2k\beta}.$$

La démonstration de λ' est

$$1+\beta_1^2-2\beta_1\mu_1$$

ou bien

$$\frac{2x(k\beta-1)\lambda-2kx^2\mu+1+k^2+x^2-2k\beta}{1+k^2-2k\beta}.$$

On a donc

$$\lambda' = \frac{[(k^2-1)x^2-(k\beta-1)^2]\lambda+2x(k\beta-1)(k\mu-1)}{2x(k\beta-1)\lambda-2kx^2\mu+1+k^2+x^2-2k\beta}.$$

2° *Calcul de μ' .* — Le numérateur est

$$(1-\beta_1^2)\lambda_1 \sin \omega + 2\beta_1 \cos \omega - (1+\beta_1^2)\mu_1 \cos \omega$$

ou

$$(\lambda_1 \sin \omega - \mu_1 \cos \omega) - \beta_1^2(\lambda_1 \sin \omega + \mu_1 \cos \omega) + 2\beta_1 \cos \omega,$$

qui devient, en réduisant,

$$\{2kx[(k\beta-1)\lambda+x]+[(k\beta-1)^2-x^2(k^2+1)]\mu\} \frac{1}{1+k^2-2k\beta}.$$

Le dénominateur est le même que pour λ' ; on a donc

$$\mu' = \frac{2kx[(k\beta-1)\lambda+x]+[(k\beta-1)^2-(k^2+1)x^2]\mu}{2x(k\beta-1)\lambda-2kx^2\mu+1+k^2+x^2-2k\beta}.$$

3° *Calcul de q' .* — Dans le système initial de coordonnées, le point de rencontre des semi-droites $A(\alpha, \beta, p)$ et $A'(\alpha', \beta', p')$ a pour coordonnées

$$x = \frac{p\alpha' - \alpha p'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}, \quad y = \frac{p\beta' - \beta p'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'},$$

ou bien, en ayant égard aux formules (1),

$$x = \frac{p(1-k^2)}{k-\beta}, \quad y = \frac{kp(1-k\beta)}{\alpha(k-\beta)}.$$

On a donc

$$q_1 = \mu \frac{p(1-k^2)}{k-\beta} - \lambda \frac{kp(1-k\beta)}{\alpha(k-\beta)} + q,$$

$$q'_1 = \mu' \frac{p(1-k^2)}{k-\beta} - \lambda' \frac{kp(1-k\beta)}{\alpha(k-\beta)} + q'.$$

Or, par les formules (1),

$$q_1 = - \frac{-\alpha_1^2 q_1}{1 + \beta_1^2 - 2\beta_1 \mu_1}$$

ou bien, en désignant par D le dénominateur commun de λ' et de μ' ,

$$q_1 = - \frac{(k - \beta)^2 q_1}{D}.$$

On a donc, pour déterminer q' , l'équation

$$\begin{aligned} q' + \mu' \frac{p(1 - k^2)}{k - \beta} - \lambda' \frac{k p(1 - k\beta)}{\alpha(k - \beta)} \\ = - \frac{(k - \beta)^2}{D} \left[\mu' \frac{p(1 - k^2)}{k - \beta} - \lambda' \frac{k p(1 - k\beta)}{\alpha(k - \beta)} + q \right], \end{aligned}$$

ce qui donne, toutes réductions faites,

$$q' = \frac{-(k - \beta)^2 q + 2p(k - \beta)(k - \mu)}{2\alpha(k\beta - 1)\lambda - 2k\alpha^2\mu + 1 + k^2 + \alpha^2 - 2k\beta}.$$

On a donc les formules suivantes :

$$(4) \quad \begin{cases} \lambda' = \frac{[(k^2 - 1)\alpha^2 - (k\beta - 1)^2]\lambda + 2\alpha(k\beta - 1)(k\mu - 1)}{2\alpha(k\beta - 1)\lambda - 2k\alpha^2\mu + 1 + k^2 + \alpha^2 - 2k\beta}, \\ \mu' = \frac{2k\alpha[(k\beta - 1)\lambda + \alpha] + [(k\beta - 1)^2 - (k^2 + 1)\alpha^2]\mu}{2\alpha(k\beta - 1)\lambda - 2k\alpha^2\mu + 1 + k^2 + \alpha^2 - 2k\beta}, \\ q' = \frac{-(k - \beta)^2 q + 2p(k - \beta)(k - \mu)}{2\alpha(k\beta - 1)\lambda - 2k\alpha^2\mu + 1 + k^2 + \alpha^2 - 2k\beta}. \end{cases}$$

II. — Équation tangentielle de l'hypercycle ; propriétés principales qui s'en déduisent.

Considérons trois semi-droites P, P', D et un cycle K. Considérons une quatrième semi-droite A. Appelons A' la conjuguée harmonique de A, relativement à P, P'; D' la conjuguée harmonique de D, relativement à A, A'. Si l'on veut déterminer A de manière que D' soit tangente au cycle K, on aura deux relations seulement entre les trois paramètres de A, à savoir la relation fondamentale $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, et la relation qui exprime que la distance à D' du centre de K est égale au rayon de ce cycle. Il y a donc une infinité de semi-droites A jouissant de cette propriété. L'enveloppe de ces semi-droites est une courbe de direction que

M. Laguerre, qui l'a étudiée le premier, a nommée *hypercycle* ⁽¹⁾. La relation qui exprime que D' touche le cycle K est précisément l'équation tangentielle de l'hypercycle. Les formules que nous avons établies plus haut vont donner cette équation d'une manière presque immédiate.

L'hypercycle est défini par les deux semi-droites P, P', appelées *fondamentales*, la semi-droite D et le cycle K.

Prenons pour axe des x la *bissectrice* des semi-droites fondamentales (lieu des centres des cycles tangents), et pour axe des y la perpendiculaire, les sens positifs des axes étant définis comme au problème I. Soient les paramètres donnés

$$\begin{aligned} P \dots \sqrt{1-k^2}, k, 0; & \quad P' \dots -\sqrt{1-k^2}, k, 0; \\ D \dots \lambda, \mu, q; & \quad K \dots a, b, r. \end{aligned}$$

Soit une tangente à la courbe $A(\alpha, \beta, p)$. A' étant la conjuguée harmonique de A relativement à P, P', et D' la conjuguée harmonique de D relativement à A, A', si l'on désigne par λ', μ', q' les paramètres de D', on doit avoir

$$a\mu' - b\lambda' + q' - r = 0.$$

Remplaçons, dans cette relation, λ, μ, q' par les valeurs fournies par les formules (4), et nous aurons l'équation tangentielle de l'hypercycle. On obtient

$$(5) \quad A\alpha^2 + 2KB\alpha\beta - 2Cp\beta - 2B\alpha - 2KD\beta + 2K Cp + (1+k^2)D = 0,$$

où

$$(6) \quad \begin{cases} A = 2K(a + \mu r) - 2(a\mu + b\lambda)K^2 - b\lambda - a\mu - r + q, \\ B = K(a\lambda - b\mu) + b - \lambda r, \\ C = K - \mu, \\ D = a\mu + b\lambda - q - r. \end{cases}$$

L'équation que nous venons de trouver peut encore se simplifier par un choix convenable d'axes de coordonnées. Nous conserverons pour le moment la forme précédente, qui suffit à donner les propriétés fondamentales de l'hypercycle et permet d'établir la théorie des cycles polaires.

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, mars et avril 1883.

THÉOREME I. — *Les tangentes à l'hypercycle se groupent deux à deux, de manière à former un système harmonique avec les semi-droites fondamentales.*

Il est évident, en effet, que Λ, Λ' interviennent d'une manière symétrique dans la définition de la courbe. On peut d'ailleurs démontrer le théorème par le calcul. α', β', p' désignant les paramètres de Λ' , on a

$$\begin{aligned} k\beta' - 1 &= \frac{1 - k^2}{D} (k\beta - 1), & \alpha' &= \frac{1 - k^2}{D} \alpha, & k - \beta' &= -\frac{1 - k^2}{D} (k - \beta), \\ p' &= -\frac{1 - k^2}{D} p, & 1 + k^2 - 2k\beta' &= \frac{(1 - k^2)^2}{D}, & D &= 1 + k^2 - 2k\beta, \end{aligned}$$

et l'on voit que l'équation de la courbe reste vérifiée, si aux quantités $(k\beta - 1), \dots$ on substitue $(k\beta' - 1), \dots$.

Deux tangentes, telles que Λ, Λ' , sont dites *tangentes conjuguées*. On peut construire géométriquement autant de couples de tangentes conjuguées que l'on veut. Cela résulte des remarques suivantes.

Étant donnés deux cycles C, C' , désignons par a et a' les points où ils touchent une de leurs tangentes communes; par b, b' leurs points de contact avec l'autre tangente commune; par α, β les points milieux des segments aa', bb' . Le cycle K , qui touche les tangentes communes aux points α, β , est appelé le *cycle moyen* des deux cycles C, C' . On dit que c'est le symétrique du cycle C relativement au cycle K .

Supposons que les cycles considérés soient déterminés par les paramètres suivants : $C(a, b, r)$; $C'(a', b', r')$; $K(a'', b'', r'')$. Il est évident que l'on a

$$\alpha'' = \frac{a + a'}{2}, \quad b'' = \frac{b + b'}{2}, \quad r'' = \frac{r + r'}{2}.$$

Soient deux semi-droites P, P' . Soient Λ, Λ' deux semi-droites conjuguées harmoniques par rapport aux premières. Enfin soient B, B' deux semi-droites conjuguées harmoniques par rapport à Λ, Λ' . Je dis que, si C désigne le cycle tangent à P, P', B , et C' le cycle tangent à P, P', B' , le cycle moyen de C et de C' sera tangent à Λ et Λ' . Pour le prouver, il suffit de montrer que Λ , par exemple, touche ce cycle. Prenons pour axe des x la *bissectrice* de P, P' , et

la perpendiculaire pour $O\gamma$, comme nous l'avons déjà fait. Soient

$$\begin{aligned} P \dots & \sqrt{1-k^2}, k, 0; & A \dots & \alpha, \beta, p; & B \dots & \lambda, \mu, q. \\ P' \dots & -\sqrt{1-k^2}, k, 0; & A' \dots & \alpha', \beta', p'; & B' \dots & \lambda', \mu', q'. \end{aligned}$$

α', β', p' s'expriment, en fonction de α, β, p , au moyen des formules (1), et λ', μ', q' au moyen des formules (4). Les paramètres du cycle C sont

$$a = \frac{q}{k-\mu}, \quad b = 0, \quad r = \frac{kq}{k-\mu};$$

ceux de C'

$$a' = \frac{q'}{k-\mu'}, \quad b' = 0, \quad r' = \frac{kq'}{k-\mu'};$$

et enfin ceux de C''

$$a'' = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{k-\mu} + \frac{q'}{k-\mu'} \right), \quad b'' = 0, \quad r'' = ka''.$$

Il suffit de démontrer que l'on a identiquement

$$\frac{\beta}{2} \left(\frac{q}{k-\mu} + \frac{q'}{k-\mu'} \right) + p - \frac{k}{2} \left(\frac{q}{k-\mu} + \frac{q'}{k-\mu'} \right) = 0,$$

ou bien

$$\frac{\beta-k}{2} \left(\frac{q}{k-\mu} + \frac{q'}{k-\mu'} \right) + p = 0.$$

Or on a, en désignant par D un diviseur commun de q' et de μ' ,

$$\begin{aligned} D(k-\mu') &= 2k\alpha(k\beta-1)\lambda - 2k^2\alpha^2\mu + k(1+k^2+\alpha^2-2k\beta) \\ &\quad - 2k\alpha(k\beta-1)\lambda - 2k\alpha^2 - (k\beta-1)^2\mu + (k^2+1)\alpha^2\mu, \\ D(k-\mu') &= (k-\beta)^2(k-\mu). \end{aligned}$$

De là, en tenant compte de la dernière formule (4),

$$\begin{aligned} \frac{q'}{k-\mu'} &= -\frac{q}{k-\mu} + \frac{2p}{k-\beta}, \\ \frac{q}{k-\mu} + \frac{q'}{k-\mu'} &= \frac{2p}{k-\beta}, \\ \frac{\beta-k}{2} \left(\frac{q}{k-\mu} + \frac{q'}{k-\mu'} \right) + p &= 0, \quad \text{c. q. f. d.} \end{aligned}$$

Il est dès lors évident, par analogie, que A et A' sont aussi tangentes au cycle moyen des cycles inscrits dans P, B, B' et P', B, B'.

Deux cycles n'admettant que deux tangentes communes, on déduit de là le théorème suivant :

THÉOREME II. — *Étant donnés deux couples de semi-droites P, P' , et B, B' , on construit, de la manière suivante, les deux semi-droites qui forment un système harmonique avec P, P' , ainsi qu'avec B, B' . Construisons le cycle moyen des cycles inscrits respectivement dans P, P', B et P, P', B' , puis le cycle moyen des cycles inscrits respectivement dans B, B', P et B, B', P' , les tangentes communes à ces deux cycles moyens seront les semi-droites cherchées.*

Appliquant cette remarque à l'hypercycle, on aura autant de couples de tangentes conjuguées qu'on le désirera. Soient, en effet, P, P' les semi-droites fondamentales, D et K la semi-droite et le cycle donnés. Menons à K une tangente arbitraire D' , puis construisons, comme il a été expliqué plus haut, les deux semi-droites A, A' , qui forment un système harmonique d'une part avec P, P' , d'autre part avec D, D' . A, A' constituent un couple de tangentes conjuguées.

III. — Théorie des cycles polaires.

THÉOREME III. — *Les conjuguées harmoniques d'une semi-droite D' par rapport aux couples de tangentes conjuguées de l'hypercycle enveloppent un cycle K' .*

Soit un hypercycle défini par les semi-droites fondamentales P, P' , la semi-droite D et le cycle K . Prenons les mêmes axes que précédemment. Nous avons obtenu plus haut l'équation tangentielle de l'hypercycle. Considérons une autre semi-droite $D'(\lambda', \mu', q')$ et un autre cycle $K'(\alpha', b', r')$. Les mêmes semi-droites fondamentales définissent, avec D' et K' , un autre hypercycle. On aura son équation en remplaçant dans la précédente λ par $\lambda', \dots$. Pour démontrer le théorème, il suffit de faire voir que, λ', μ', q' étant donnés, on peut déterminer α', b', r' , de manière que les deux hypercycles coïncident. Or, pour que les courbes coïncident, il faut et il suffit que les coefficients des deux équations soient proportionnels. En identifiant les équations, on a six équations de condition, et il n'y a que trois paramètres à

déterminer, a' , b' , r' . Tout se réduit donc à faire voir que des six équations de condition, trois sont les conséquences des trois autres.

En identifiant, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{2k(a' + \mu' r') - 2(a' \mu' + b' \lambda') k^2 + b' \lambda' - a' \mu' - r' + q'}{A} \\ &= \frac{k(a' \lambda' - b' \mu') + b' - \lambda' r'}{B} = \frac{k - \mu'}{C} = \frac{k(a' \lambda' - b' \mu') + b' - \lambda' r'}{B} \\ &= \frac{a' \mu' + b' \lambda' - q' - r'}{D} = \frac{k - \mu'}{C} = \frac{a' \mu' + b' \lambda' - q' - r'}{D}, \end{aligned}$$

équations qui se réduisent aux trois suivantes :

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{2k(a' + \mu' r') - 2(a' \mu' + b' \lambda') k^2 + b' \lambda' - a' \mu' - r' + q'}{A} \\ &= \frac{k - \mu'}{C} = \frac{a' \mu' + b' \lambda' - q' - r'}{D} = \frac{k(a' \lambda' - b' \mu') + b' - \lambda' r'}{B}. \end{aligned} \right.$$

On peut donc considérer le théorème comme établi d'une manière générale.

Le cycle K' a été nommé, par M. Laguerre, le *cycle polaire* de la semi-droite D' .

Deux questions se présentent tout de suite :

- 1° Toute semi-droite a-t-elle un cycle polaire?
- 2° Un cycle donné peut-il être considéré comme le cycle polaire d'une semi-droite, et quelle est cette semi-droite?

La discussion des équations (7) répond à ces deux questions.

THÉOREME IV. — *A toute semi-droite non parallèle à une semi-droite fondamentale correspond un cycle polaire. Une semi-droite parallèle à une semi-droite fondamentale n'a pas de cycle polaire. Enfin, une semi-droite fondamentale admet une infinité de cycles polaires qui sont tous tangents à l'autre semi-droite fondamentale.*

Les équations précédentes, dans lesquelles on considère a' , b' , r' comme inconnues, se mettent sous la forme suivante :

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} C[2k - \mu'(1 + 2k^2)]a' + C\lambda'(1 - 2k^2)b' + C(2k\mu' - 1)r' &= A(k - \mu') - Cq', \\ Ck\lambda'a' + C(1 - k\mu')b' - C\lambda'r' &= B(k - \mu'), \\ C\mu'a' + C\lambda'b' - Cr' &= D(k - \mu') + Cq'. \end{aligned} \right.$$

En calculant le déterminant des coefficients, on obtient, toutes réductions faites,

$$-2C^3(k - \mu')^3.$$

Donc, si $k - \mu' \neq 0$, c'est-à-dire si la semi-droite n'est pas parallèle à une semi-droite fondamentale, les équations (8) ont une solution et une seule.

Supposons $k - \mu' = 0$. Les équations deviennent

$$\begin{aligned} (1 - 2k^2)(ka' + \lambda b' - r') &= -q', \\ ka' + \lambda b' - r' &= 0, \\ ka' + \lambda b' - r' &= q'. \end{aligned}$$

Si $q' \neq 0$, il n'y a pas de solution. Si $q' = 0$, on n'a plus qu'une équation

$$ka' + \lambda b' - r' = 0.$$

Il y a donc une infinité de cycles polaires. Si l'on prend

$$\lambda' = \sqrt{1 - k^2},$$

ce qui revient à supposer que la semi-droite considérée est la semi-droite fondamentale P, la condition précédente peut s'écrire

$$ka' - (-\sqrt{1 - k^2})b' - r' = 0,$$

et elle exprime que tous les cycles polaires sont tangents à P'.

Les équations (8) donnent les paramètres du cycle polaire d'une semi-droite donnée; en les résolvant on obtient les formules suivantes, qui sont fondamentales pour l'étude des propriétés des cycles polaires :

$$(9) \quad \begin{cases} a' = \frac{2Bk\lambda' - (A - D)\mu' - 2Cq' - 2kD}{2C(k - \mu')}, \\ b' = \frac{-(A + D)\lambda' - 2Bk\mu' + 2B}{2C(k - \mu')}, \\ r' = \frac{2B\lambda' + 2kD\mu' - 2Ckq' - A - D(1 + 2k^2)}{2C(k - \mu')}. \end{cases}$$

THÉORÈME V. — *Étant donné un cycle qui ne touche pas les semi-droites fondamentales, pour que ce cycle soit un cycle polaire, il faut et il suffit que les tangentes menées à ce cycle parallèlement aux semi-droites fondamentales se coupent sur une conique particulière.*

Cette conique a reçu le nom de conique H (M. Laguerre).

Supposons maintenant que a' , b' , r' sont donnés, et cherchons à calculer λ' , μ' , q' . Aux équations (7) il faut joindre l'équation

$$\lambda'^2 - \mu'^2 = 1.$$

On a ainsi le système suivant de quatre équations à trois inconnues :

$$\begin{aligned} Cb'\lambda' - (Ca' + D)\mu' - Cq' &= D - Ckr', \\ C(ka' - r')\lambda' - (B - Ckb')\mu' &= Bk - Cb', \\ 2Cb'(1 - k^2)\lambda' - [A - D - 2Ck(ka' - r')]\mu' &= k(A - D) - 2C(ka' - r'), \\ \lambda'^2 - \mu'^2 &= 1. \end{aligned}$$

Posons, pour abréger,

$$ka' - r' = kx, \quad b' = y,$$

et remarquons, ce qu'il est facile de vérifier, que le point x, y est le point de rencontre des tangentes au cycle donné, qui sont parallèles aux semi-droites fondamentales. Les équations précédentes s'écrivent

$$(10) \quad \begin{cases} Cb'\lambda' - (Ca' + D)\mu' - Cq' = Dk - Cr', \\ Ckx\lambda' - (B - Ck)y\mu' = Bk - Cy, \\ 2C(1 - k^2)y\lambda' - (A - D - 2Ck^2x)\mu' = k(A - D - 2Cx), \\ \lambda'^2 - \mu'^2 = 1. \end{cases}$$

Les deux équations intermédiaires sont linéaires en λ' , μ' , et ne contiennent pas q' . D'ailleurs, dans la première équation, le coefficient de q' est une constante différente de 0, C. Pour trouver la semi-droite cherchée, il suffit de déduire λ' , μ' des deux équations intermédiaires. Ces valeurs portées dans la première équation donneront q' ; si on les porte dans la dernière, on aura une relation en a' , b' , r' , qui sera la condition nécessaire et suffisante pour que le cycle donné soit un cycle polaire.

Tout se réduit à l'étude des deux équations en λ' , μ' . Le déterminant de ces équations est

$$H = C(2Ck[(1 - k^2)y^2 - k^2x^2] - k(A - D)x - 2B(1 - k^2)y).$$

Supposant ce déterminant différent de 0 et substituant dans la quatrième équation les valeurs de λ' , μ' , on obtient

$$[1 - k^2(y^2 - k^2x^2)]H = 0,$$

en posant

$$H = (1 - k^2)y^2 - k^2x^2 + \frac{(A + D)^2 - 4B^2(1 - k^2)}{4C^2}.$$

Le lieu des points x, y , pour lesquels le cycle donné est un cycle polaire, se compose donc des semi-droites fondamentales et de l'hyperbole H , qui a pour asymptotes les semi-droites fondamentales.

Écartons pour le moment le cas où x, y serait sur une semi-droite fondamentale, c'est-à-dire le cas où le cycle donné toucherait l'une d'elles. On voit que si $H' \neq 0$, pour que le cycle soit polaire, il faut et il suffit que le point (x, y) se trouve sur l'hyperbole H . Supposons $H' = 0$. Les équations en λ', μ' sont impossibles ou indéterminées.

Le numérateur de λ' est

$$G = (1 - k^2)[2Bkx - (A + D)y]$$

et celui de μ'

$$H'' = C\{2C[(1 - k^2)y^2 - k^2x^2] + k[k(A + D)x - 2B(1 - k^2)y^2]\}.$$

Si le point (x, y) se trouve à la fois sur les courbes H', G, H'' , il y a indétermination; dans le cas contraire, il y a impossibilité. Or

$$G \text{ coupe } H' \text{ à l'origine et au point } x = \frac{A + D}{2Ck^2}, \quad y = \frac{B}{Ck},$$

$$G \text{ coupe } H'' \text{ à l'origine et au point } x = \frac{A + D}{2C}, \quad y = \frac{Bk}{C}.$$

Il n'y a donc indétermination que si le point x, y est à l'origine des coordonnées. Mais nous avons écarté ce cas en supposant que le cycle donné ne touchait pas les semi-droites fondamentales. Dès lors, si $H' = 0$, il n'y a pas de semi-droite admettant le cycle donné pour cycle polaire. Pour que le théorème soit démontré, il reste à prouver que H et H' n'ont pas de points réels communs situés à distance finie. En se reportant aux équations de ces coniques, on voit que leurs points communs situés à distance finie se trouvent sur la droite

$$k(A + D)x - 2B(1 - k^2)y - 2CkP = 0.$$

Les abscisses des points communs à cette droite et à H sont ra-

cines de l'équation

$$\left[Ckx - \frac{k(A+D)}{2} \right]^2 + B^2(1-k^2) = 0,$$

qui a ses racines imaginaires.

THÉOREME VI. — *Le cycle polaire d'une semi-droite non parallèle à une semi-droite fondamentale n'est pas tangent à une semi-droite fondamentale. Il y a cependant exception pour les hypercycles d'une nature particulière, et alors tout cycle polaire est tangent à une semi-droite fondamentale.*

Soit $\lambda' \mu' q'$ une semi-droite non parallèle à une semi-droite fondamentale; soit a', b', r' son cycle polaire. Pour que ce cycle soit tangent à la semi-droite $k, \sqrt{1-k^2}, 0$, il faut et il suffit que l'on ait

$$ka' - \sqrt{1-k^2}b' - r' = 0,$$

ou, en remplaçant a', b', r' par leurs valeurs déduites des formules (9).

$$(A+D-2B\sqrt{1-k^2})(\sqrt{1-k^2}\lambda' - k\mu' + 1) = 0.$$

En appelant V l'angle de la semi-droite donnée avec la semi-droite $(k, -\sqrt{1-k^2}, 0)$, cette relation peut s'écrire

$$(A+D-2B\sqrt{1-k^2})(1-\cos V) = 0$$

ou

$$A+D-2B\sqrt{1-k^2} = 0,$$

car on suppose $\cos V \neq 1$. Cette relation ne sera vérifiée que pour des hypercycles d'une nature particulière. Ce sont ceux que M. Laguerre appelle *hypercycles cubiques*. Pour ces hypercycles tous les cycles polaires sont tangents à la même semi-droite fondamentale.

En prenant l'autre semi-droite fondamentale, on aurait la condition

$$A+D+2B\sqrt{1-k^2} = 0,$$

de sorte que les hypercycles pour lesquels les cycles polaires sont tangents à une semi-droite fondamentale sont définis par la re-

lation

$$(A + D)^2 - 4B^2(1 - k^2) = 0.$$

THÉOREME VII. — Il résulte du théorème précédent que, pour un hypercycle qui ne vérifie pas la relation précédente, *tout cycle tangent à une semi-droite fondamentale peut être considéré comme le cycle polaire de l'autre semi-droite fondamentale.*

Ce résultat peut se retrouver analytiquement. Soit le cycle a', b', r' tangent à la semi-droite $k, \sqrt{1 - k^2}$, 0.

On a

$$ka' - \sqrt{1 - k^2}b' - r' = 0 \quad \text{ou} \quad kx = \sqrt{1 - k^2}y,$$

x, y étant toujours le point de concours des tangentes au cycle qui sont parallèles aux semi-droites fondamentales. Dans cette hypothèse, les équations (10) deviennent

$$\begin{aligned} C(a'\mu' + b'\lambda' - r') + D(\mu' - k) &= Cq', \\ Cy(\sqrt{1 - k^2}\lambda' - k\mu' + 1) + B(\mu' - k) &= 0, \\ 2Cy\sqrt{1 - k^2}(\sqrt{1 - k^2}\lambda' - k\mu' + 1) + (A + D)(\mu' - k) &= 0, \\ \lambda'^2 + \mu'^2 &= 1. \end{aligned}$$

On suppose que

$$A + D - 2B\sqrt{1 - k^2} \neq 0.$$

On déduit donc de ces équations

$$\mu' - k = 0, \quad \sqrt{1 - k^2}\lambda' - k\mu' + 1 = 0$$

ou bien

$$\mu' = k, \quad \lambda' = -\sqrt{1 - k^2}.$$

La dernière est vérifiée, et la première donne

$$C(ka' - \sqrt{1 - k^2}b' - r') = Cq', \quad q' = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

On a supposé $y \neq 0$. Si y était nul, le cycle serait tangent aux deux semi-droites fondamentales. Dans ce cas il est évident que les équations donnent

$$\mu' = k, \quad \lambda' = \pm\sqrt{1 - k^2}, \quad q' = 0.$$

On peut considérer le cycle comme le cycle polaire de l'une ou de l'autre des semi-droites fondamentales.

Si l'on résout les équations (10), on obtient des formules qui font connaître les paramètres de la semi-droite qui a pour cycle polaire le cycle donné a', b', r' :

$$(11) \quad \begin{cases} \lambda' = \frac{(1-k^2)[2Bkx - (A+D)y]}{2kC[(1-k^2)y^2 - k^2x^2] + k[(A+D)x - 2k(1-k^2)y]}, \\ \mu' = \frac{2C[(1-k^2)y^2 - k^2x^2] - k[k(A+D)x - 2B(1-k^2)y]}{2Ck[(1-k^2)y^2 - k^2x^2] + k[(A+D)x - 2B(1-k^2)y]}, \\ q' = \frac{[(1-k^2)y^2 - k^2x^2][2Cx + 2(Cr' + D)(1-k^2) - (A+D)]}{2Ck[(1-k^2)y^2 - k^2x^2] + k[(A+D)x - 2B(1-k^2)y]}. \end{cases}$$

Dans ces formules

$$x = \frac{ka' - r'}{k}, \quad y = b'.$$

Les cycles polaires possèdent des propriétés analogues à celles des pôles et des droites dans les coniques. Les formules (9) et (11) permettent d'établir simplement les propriétés mentionnées par M. Laguerre. On voit par là qu'elles sont fondamentales dans l'étude des cycles polaires.

THÉORÈME VIII. — *Si Δ a pour cycle polaire Π , les cycles polaires des tangentes à Π sont tangents à Δ .*

Soient

$$\Delta(\lambda', \mu', q'), \quad \Pi(a', b', r') \quad \text{et} \quad \Delta'(\lambda'', \mu'', q''), \quad \Pi'(a'', b'', r'').$$

On suppose que

$$\mu'a' - \lambda'b' + q' - r' = 0,$$

et il faut prouver que

$$\mu'a'' - \lambda'b'' + q'' - r'' = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \mu'a' &= \frac{2Bk\lambda'\mu' - (A+D)\mu'\mu' - 2Cq'\mu' - 2kD\mu'}{2C(k-\mu')}, \\ -\lambda'b' &= \frac{(A+D)\lambda'\lambda' + 2Bk\mu'\lambda' - 2B\lambda'}{2C(k-\mu')}, \\ -r' &= \frac{-2B\lambda' - 2kD\mu' + 2Ckq' + A + D(1+k^2)}{2C(k-\mu')}. \end{aligned}$$

On déduit de là

$$\begin{aligned} 2C(k-\mu')(\mu'a' - \lambda'b' + q' - r') &= 2Bk(\lambda'\mu' - \mu'\lambda'') - (A+D)\mu'\mu' + (A+D)\lambda'\lambda' \\ &\quad - 2C(q'\mu' - \mu'q'') - 2B(\lambda' + \lambda'') - 2kD(\mu' + \mu'') \\ &\quad + 2Ck(q' + q'') + A + D(1+k^2). \end{aligned}$$

On formera par analogie

$$2C(k - \mu^*)(\mu' a' - \lambda' b' + q' - r').$$

L'expression trouvée dans le second membre gardant la même valeur lorsqu'on change respectivement λ', μ', q' en λ'', μ'', q'' , on voit que l'on a

$$2C(k - \mu^*)(\mu'' a' - \lambda'' b' + q'' - r') = 2C(k - \mu^*)(\mu' a' - \lambda' b' + q' - r'),$$

ce qui démontre le théorème.

THÉORÈME IX. — *Toute tangente à l'hypercycle est tangente à son cycle polaire, et il n'y a pas d'autres semi-droites qui possèdent la même propriété.*

La condition nécessaire et suffisante pour que la semi-droite (λ', μ', q') soit tangente à son cycle polaire (a', b', r') est

$$\mu' a' - \lambda' b' + q' - r' = 0.$$

Si l'on remplace a', b', r' par les valeurs que donnent les formules (9), on obtient, toutes réductions faites,

$$A\lambda'^2 + 2Bk\lambda'\mu' - 2C\mu'q' - 2B\lambda' - 2kD\mu' + 2Ckq' + D(1 + k^2) = 0.$$

C'est là la condition pour que la semi-droite soit tangente à l'hypercycle.

Une conséquence importante de ce théorème est que l'hypercycle est complètement déterminé quand on se donne deux couples de tangentes conjuguées (A, A') , (B, B') et une cinquième tangente T . Si l'on construit, en effet, les deux semi-droites qui sont conjuguées harmoniques par rapport à (A, A') et aussi par rapport à (B, B') , on aura les semi-droites fondamentales (P, P') . Si l'on prend maintenant la conjuguée harmonique de T relativement à (A, A') , soit T_1 , puis la conjuguée harmonique de T relativement à (B, B') , soit T_2 , le cycle tangent aux trois semi-droites T, T_1, T_2 sera le cycle polaire de T . On connaît ainsi les semi-droites fondamentales et le cycle polaire d'une semi-droite donnée : la courbe est donc déterminée.

THÉORÈME X. — *Les semi-droites dont les cycles polaires ont un rayon donné enveloppent un cycle.*

En effet, les paramètres de la semi-droite doivent vérifier la re-

lation

$$r' = R$$

ou

$$2B\lambda' + 2kD\mu' - 2Ckq' - A - D(1 + k^2) = 2C(k - \mu')R,$$

relation qui exprime que la semi-droite est tangente au cycle qui a pour paramètres

$$-\frac{D}{C} - \frac{R}{k}, \quad \frac{B}{Ck}, \quad \frac{A + D(1 + 2k^2)}{2Ck} - R.$$

COROLLAIRE. — *Les semi-droites dont les cycles polaires se réduisent à un point enveloppent un cycle.*

THÉORÈME XI. — *Le lieu des cycles polaires de rayon nul est la conique H.*

On obtiendra l'équation du lieu en éliminant λ', μ', q' entre l'équation

$$\lambda'^2 + \mu'^2 = 1$$

et les équations (9) dans lesquelles on fait

$$r' = 0, \quad a' = x, \quad b' = y.$$

Le calcul donne effectivement $H = 0$.

THÉORÈME XII. — *Si une semi-droite se déplace parallèlement à elle-même, le cycle polaire demeure tangent à deux semi-droites fixes parallèles aux semi-droites fondamentales.*

Soit $(k, \sqrt{1 - k^2}, m)$ une parallèle à P. Il suffit de montrer que l'on peut déterminer m de manière que la relation

$$ka' - \sqrt{1 - k^2}b' + m - r' = 0$$

soit vérifiée pour toute valeur de q' , lorsque λ' et μ' restent fixes.

Or on a

$$ka' = \frac{2Bk^2\lambda' - (A - D)k\mu' - 2Ckq' - 2k^2D}{2C(k - \mu')},$$

$$-r' = \frac{-2B\lambda' - 2kD\mu' + 2Ckq' + A + D(1 + 2k^2)}{2C(k - \mu')}.$$

Donc $k'a' - r'$ est indépendant de q' . Comme il en est de même de b' , le théorème est démontré.

THÉORÈME XIII. — *Si une semi-droite roule sur un cycle, le lieu du centre de son cycle polaire est une conique.*

Supposons que la semi-droite (λ', μ', q') roule sur le cycle (α'', b'', r'') . Le lieu du centre du cycle polaire s'obtient en éliminant λ', μ', q' entre les équations

$$\begin{aligned} \alpha'' \mu' - b'' \lambda' + q' - r'' &= 0, \\ 2C(k - \mu')x - 2Bk\lambda' + (A - D)\mu' + 2kCq' + 2D &= 0, \\ 2C(k - \mu')y + (A + D)\lambda' + 2Bk\mu' - 2B &= 0, \\ \lambda'^2 + y'^2 &= 1, \end{aligned}$$

ou bien λ', μ' entre les équations

$$\begin{aligned} (A + D)\lambda' + 2(Bk - Cy)\mu' &= 2(B - Cky), \\ 2(Cb'' - Bk)\lambda' + (A - D - 2Ca'' - 2Cx)\mu' &= -2(kD + Cr'' + Ckx), \\ \lambda'^2 + \mu'^2 &= 1. \end{aligned}$$

L'équation du lieu est

$$\begin{aligned} &[(A + D)(A - D - 2Ca'' - 2Cx) - 4(Cb'' - Bk)(Bk - Cy)]^2 \\ &- [-2(A + D)(kD + Cr'' + Ckx) - 4(Cb'' - Bk)(B - Cky)]^2 \\ &- [-4(Bk - Cy)(kD + Cr'' + Ckx) - 2(B - Cky)(A - D - 2Ca'' - 2Cx)]^2 = 0 \end{aligned}$$

Le dernier crochet contient seul des termes du second degré, et il est évident que ces termes se détruisent.

On sait que M. Laguerre a, le premier, donné la définition et les propriétés de l'hypercycle. Nous nous sommes proposé, dans ces quelques pages, d'indiquer une méthode analytique qui permette de démontrer, d'une manière régulière, les théorèmes énoncés par M. Laguerre (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 20 et 27 mars, 10 et 24 avril 1882).

Note sur le conoïde de Plücker: par M. H. PICQUET.

(Séance du 4 novembre 1885.)

1. Si l'on étudie les conditions de possibilité d'une surface réglée du troisième degré, il est aisé de voir qu'une pareille surface contient, en outre de ses génératrices rectilignes, deux directrices de même espèce, dont l'une est double (*).

Tout plan passant par la directrice double coupe en outre la surface suivant une génératrice; et tout plan passant par la directrice simple la coupe encore suivant deux génératrices qui se rencontrent sur la droite double.

Tout plan passant par une génératrice coupe en outre la surface suivant une conique, qui rencontre la génératrice en deux points, dont l'un est sur la droite double, tandis que l'autre est le point où le plan est tangent.

A chaque génératrice de la surface correspond ainsi un système de coniques. Deux coniques d'un même système se coupent en un point de la droite double; deux coniques de systèmes différents se coupent en un point.

Par un point de la surface qui n'est pas sur la droite double, il passe une génératrice et une infinité de coniques situées dans les plans passant par ce point et les diverses génératrices.

Une conique quelconque de la surface rencontre toutes les génératrices, différentes de la génératrice G qui définit son système, en un point; elle rencontre la droite double en celui de ses deux points communs avec G , où son plan n'est pas tangent; elle ne rencontre pas la directrice simple.

Il suit de là que les cônes, ayant pour sommet un même point α de la droite double et pour bases les diverses coniques de la surface, ont deux génératrices communes: ce sont les deux généra-

(*) Relativement aux surfaces réglées algébriques de degré quelconque, voir le Chapitre de la *Géométrie analytique à trois dimensions*, de Salmon, intitulé *Ruled surfaces*. En ce qui concerne les surfaces réglées du troisième degré, voir, dans le même Ouvrage, le commencement du Chapitre consacré aux surfaces du troisième degré.

trices de la surface issues de a , puisque ces droites rencontrent toutes les coniques de la surface.

Ces deux droites rencontrent la directrice simple; de sorte qu'on peut dire encore que *tout plan passant par la directrice simple coupe ces cônes suivant des coniques ayant cette droite pour corde commune*.

Réciproquement, on voit immédiatement que la surface réglée, dont deux directrices A et B sont rectilignes, et dont la troisième directrice C est une conique rencontrant la droite A en un point, est du troisième degré, et jouit, par conséquent, de toutes les propriétés précédentes, relativement à la droite A, considérée comme directrice double et à la droite B, prise pour directrice simple.

2. Si l'on suppose que la droite B soit à l'infini et définisse, par conséquent, une direction de plans que nous supposerons horizontaux, si l'on suppose en outre la directrice A verticale, et si l'on prend pour conique C une conique dont la projection horizontale soit un cercle, on a le *conoïde de Plücker* ⁽¹⁾.

On voit alors que *les traces horizontales de tous les cônes, ayant pour sommet un même point de la droite A et pour bases respectives les diverses coniques de la surface, sont des coniques homothétiques*.

(1) Cette surface joue, comme on sait, un rôle fort important dans la théorie du déplacement d'une figure invariable dans l'espace. Elle a été étudiée, pour la première fois, par Plücker (*Neue Geometrie des Raumes*, p. 97), qui a prouvé qu'elle est le lieu des axes des complexes linéaires, dont fait partie une congruence linéaire. C'est là le lien qui la rattache au déplacement d'une figure invariable, puisque l'étude de ce dernier se ramène à celle du complexe *linéaire* des normales aux trajectoires des points entraînés. Au lieu d'un déplacement défini, si l'on suppose un déplacement assujéti à quatre conditions (dans lequel les points décrivent des surfaces trajectoires), il donne lieu à une infinité de déplacements définis, et l'on a alors une congruence formée par les normales aux surfaces trajectoires des points entraînés. Le lieu des axes de tous ces déplacements ou, ce qui revient au même, le lieu des droites, qui, à partir de leurs positions primitives, n'engendrent pas de pinceaux, mais des éléments de surfaces réglées qui se raccordent, doit donc être un conoïde de Plücker. C'est ce qu'a démontré M. Mannheim, par d'élégantes considérations se rattachant directement au déplacement (*Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique*, p. 440). Voir également, du même Auteur, des Communications à l'Académie des Sciences (6 novembre 1871 et 2 février 1885). Enfin cette surface a aussi été étudiée par MM. Lindemann (*Math. Ann.*, t. VII, p. 56), Cayley et R.-S. Ball: par ces derniers, sous le nom de *cylindroïde*.

En particulier, *les projections horizontales de toutes les coniques de la surface sont des cercles.*

Suivant le procédé usuel, on voit que la surface est du troisième degré; car le parabolôïde défini par la droite D, dont on cherche les points d'intersection avec le conoïde, par la directrice verticale A, et ayant pour plan directeur le plan horizontal, rencontre la conique C en trois points en dehors de A; les génératrices horizontales de ce parabolôïde, passant par ces trois points, rencontrent D en ses points d'intersection avec le conoïde.

3. Parmi toutes les directions de plans parallèles à la directrice A, choisissons celle du plan vertical de projection parallèle au petit axe de l'ellipse C, c'est-à-dire aux horizontales du plan de cette conique. Elle se projette alors horizontalement, suivant un cercle O passant par le pied c de la directrice A et dont le diamètre de front ab est la projection horizontale du petit axe. Soit $a'b'$ sa projection verticale; le plan de la courbe est alors défini par cette droite $(ab, a'b')$ et par l'angle α qu'il fait avec le plan vertical.

On aura aisément en $c'd'$ la projection verticale de la génératrice de la surface dont la projection horizontale est cd . Il suffira de mener par le point d , où la projection horizontale donnée coupe le cercle O, la droite de front di , de prendre $gh = gi$, et de relever le point h en h' sur le rabattement autour de A de la droite d'intersection du plan profil A avec le plan de la conique.

Soit (m, m') un point de cette génératrice; cherchons le plan tangent en ce point. Il y a plusieurs méthodes :

1° Au moyen de la tangente en (m, m') à la conique, suivant laquelle le plan tangent cherché achève de couper la surface. On verra tout à l'heure le moyen de construire cette tangente sans tracer le cercle, projection horizontale de cette conique.

2° Au moyen d'un parabolôïde de raccordement ayant pour plans directeurs le plan horizontal et le plan vertical, déterminé par la génératrice $(cd, c'd')$, s'appuyant sur A et sur la droite de front du plan tangent en (d, d') . La tangente $(dt, d't')$ de l'ellipse en ce point y détermine le plan tangent, et la direction $t'j'$ des droites de front de ce plan s'obtient en coupant par un plan de front, tel que tj . Menant par le point d' une parallèle à cette

direction, on obtient en e' le point de concours des projections verticales des génératrices de front du paraboloïde, et la droite $(me, m'e')$ achève de déterminer le plan tangent en (m, m') .

3° Au point c' de A, il y a deux plans tangents, qui sont les deux plans verticaux cd, ck , projetant horizontalement les deux génératrices de la surface issues de c' . Conséquemment, tout plan passant par ce point coupe le conoïde suivant une courbe ayant un point double en c' , dont les deux tangentes sont les traces du plan sur ces deux plans verticaux. En particulier, le plan tangent en (m, m') , qui renferme la génératrice $(cm, c'm')$, coupe, en outre, le conoïde suivant une conique passant au point (cc') , et tangente en ce point au plan vertical ck . D'où il suit que :

Tout plan passant par une génératrice du conoïde le coupe en outre suivant une conique dont la projection horizontale est un cercle tangent en c à une droite fixe.

La conique relative au plan tangent en (m, m') aura donc pour projection horizontale un cercle O , passant par le point m , par le point c , et tangent en c à ck . Son centre est, par suite, sur la perpendiculaire à ck , qui est la droite joignant le point c au point l diamétralement opposé à k dans le cercle O , ou encore symétrique de d par rapport au diamètre de front ab . Un point quelconque de cette conique, dans l'espace, achèvera de déterminer le plan tangent. Cherchons, par exemple, le point sur la génératrice de contour apparent, dont la projection horizontale cn s'obtient en joignant le point c au point n du cercle O , pour lequel la tangente est de front; la solution est immédiate, et il n'est pas besoin, pour trouver ce point, de construire le cercle O_1 . Il suffit d'élever au milieu de cm une perpendiculaire sur cm , qui détermine sur cn le point f cherché; ce point, relevé en f' sur la génératrice de contour apparent, achève de déterminer le plan tangent. Pour le prouver, remarquons que l'angle inscrit $\widehat{lc n}$, qui a pour mesure la moitié de l'arc ln , est égal à l'angle cfO_1 . En effet, cet angle, étant complémentaire de l'angle $\widehat{mc n}$, a pour mesure une demi-circonférence, diminuée de l'arc nd ou de son égal nk , c'est-à-dire l'arc ln : il suit de là que, dans le triangle O_1cf , on a $O_1c = O_1f$, et que, par suite, le point f , déterminé comme précédemment, est

sur le cercle O_1 . Le théorème énoncé plus haut prouve, en outre, que la tangente en m au cercle O , fait, avec la génératrice mc , un angle égal à l'angle $\widehat{mck}$, et donne le plan tangent, par le premier procédé, sans construire ce cercle. Au fond, les deux méthodes diffèrent peu, puisque la perpendiculaire sur le milieu de cm détermine, par son point d'intersection avec ck , un point de la tangente en m ; mais on va voir que la dernière est importante par ses conséquences et ses applications.

On peut remarquer que $fm = fc$; il en résulte que le lieu des points de contact des plans tangents, menés par un point f de la génératrice singulière, se projette suivant un cercle qui passe en c ; et que, par conséquent, le lieu de l'espace est une conique de la surface. Tous les cercles analogues sont tangents en c à la projection horizontale cq de la seconde génératrice de contour apparent et sont alors les projections horizontales de coniques de la surface, situées dans des plans passant par cette génératrice. Ainsi on a cette propriété :

Le lieu des points de contact des plans tangents, menés au conoïde de Plücker par un point d'une des deux génératrices de contour apparent, est une conique de la surface, située dans un plan passant par l'autre.

Il était clair, *a priori*, que ce lieu devait être une conique; pour un point quelconque de l'espace, c'est en effet l'intersection du conoïde avec la surface polaire de ce point, laquelle, étant du deuxième degré, le coupe suivant une courbe qui se réduit au quatrième degré, parce que la surface polaire renferme la directrice double A . Pour un point d'une génératrice de contour apparent, la quartique renferme deux fois cette génératrice et, par suite, se réduit à une conique. Le théorème précédent prouve que le plan de cette conique passe par l'autre génératrice de contour apparent et donne le moyen de la construire.

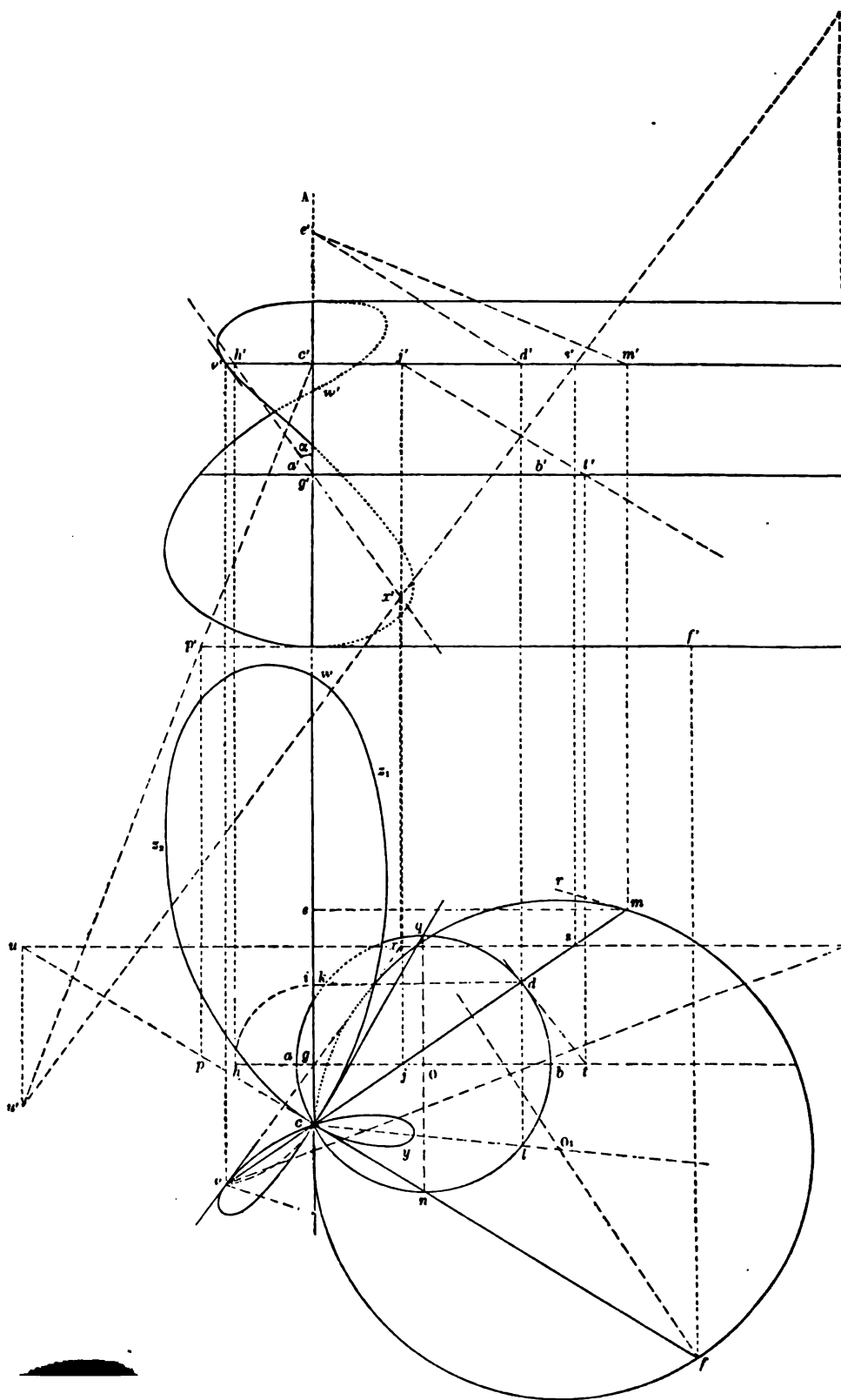
Remarque. — Les droites telles que $(mr, m'r')$, pour les différents points de la génératrice $(cd, c'd')$, sont, en chaque point de cette droite, la seconde asymptote de l'indicatrice, puisqu'elles sont tangentes, pour chaque point, à la courbe d'intersection de la surface par son plan tangent. Elles engendrent donc le parabolo-

loïde osculateur le long de la génératrice, dont le second plan directeur est dès lors un plan vertical, parallèle à mr . On peut donc dire que :

Le second plan directeur du paraboloïde osculateur le long d'une génératrice G au conoïde de Plücker est un plan perpendiculaire au plan directeur du conoïde et symétrique par rapport à G du plan projetant horizontalement la génératrice située dans le même plan horizontal que G.

4. Le dernier procédé qui vient d'être indiqué pour construire le plan tangent fournit une méthode simple pour la recherche de la ligne d'ombre. On a vu, en effet, que $fm = fc$; si donc (p, p') est le point d'intersection avec la génératrice de contour apparent, qui se projette suivant cn du plan passant par le point lumineux (L, L') et la génératrice $(cd, c'd')$, on aura la projection horizontale du point où ce plan est tangent en décrivant du point p comme centre avec pc comme rayon un cercle qui coupera cd en un second point v , qui est le point cherché. Pour trouver (p, p') , on mènera par (L, L') une droite qui rencontre $(cd, c'd')$, par exemple la droite de front $(Ls, L's')$, et ces deux droites détermineront le plan dont on cherche le point de contact. Le plan vertical cn coupera la première au point (u, u') , la seconde au point (c, c') , de sorte que la droite $c'u'$ coupe la projection verticale de la génératrice de contour apparent en un point p' , qui est le point demandé et qui se projette horizontalement en p . On obtient ainsi un point quelconque (v, v') de la ligne d'ombre; la tangente en ce point se trouve aisément : en projection horizontale, c'est la conjuguée harmonique de la droite vL par rapport aux projections des asymptotes de l'indicatrice en (v, v') , qui sont la génératrice vc et la parallèle à mr , menée par v ; comme elle est située dans le plan tangent en v , on en conclut sa projection verticale au moyen du point (x, x') , où elle rencontre $(Lu, L'u')$.

On a vu plus haut que la courbe d'ombre est une quartique : la construction d'un point quelconque de la courbe prouve qu'elle rencontre la directrice A en trois points, deux sur les génératrices de contour apparent, le troisième sur la génératrice dont la projection horizontale est cL ; c'est donc la quartique unicursale, à trois points doubles apparents, car l'autre quartique gauche n'a pas



de sécante triple. La projection horizontale est alors une quartique dont c est un point triple, pour lequel les trois tangentes sont cn , cq et cL . Si l'on suppose les génératrices du conoïde indéfinies vers la droite de l'épure et limitées à la courbe d'ombre, tout le plan horizontal, à droite de la génératrice de bout ce , est recouvert par la surface, sauf les parties cyc , cz , ω à l'intérieur de la courbe d'ombre; tout le plan horizontal à gauche est vu, sauf les parties cve , cz , ω , à l'intérieur de la ligne d'ombre.

Le plan central, pour une génératrice quelconque, est le plan qui la projette horizontalement; il touche la surface sur la directrice A . Le plan tangent à l'infini est donc le plan horizontal de cette génératrice. Les points à l'infini de la ligne d'ombre sont alors les deux points à l'infini sur les génératrices situées dans le plan horizontal du point lumineux, points imaginaires dans l'épure, et les points où elle rencontre les deux génératrices à l'infini de la surface, génératrices imaginaires puisque la conique directrice est une ellipse. Celle-ci se projetant suivant un cercle, on en conclut aisément que la projection horizontale de la ligne d'ombre passe par les points cycliques; c'est alors une quartique circulaire à point triple. Ses deux autres points à l'infini sont réels ou imaginaires, suivant la position du point lumineux; ils sont sur les projections horizontales des génératrices situées dans le plan horizontal de ce point. Comme toutes les courbes tracées sur la surface, la ligne d'ombre est vue tout entière en projection horizontale; les parties pointillées des deux cercles O et O_1 ne sont pas des parties cachées, mais des parties qui n'existent pas, si on limite, comme il a été dit plus haut, la surface à la ligne d'ombre.

La projection verticale de la ligne d'ombre est une quartique unicursale tangente aux deux génératrices de contour apparent en leur point d'intersection avec la directrice A ; ses deux autres points sur cette droite sont l'un sur la génératrice projetée horizontalement en Lc , où la ligne d'ombre rencontre effectivement la directrice, l'autre en ω' , projection verticale du point où la ligne d'ombre rencontre la génératrice de bout $c\omega$.

C'est une quartique unicursale dont le tracé révèle un point double réel; on doit alors s'attendre à en trouver deux autres imaginaires. Cherchons pour cela ses points à l'infini: d'eux d'entre eux sont les projections verticales des points de la courbe

d'ombre sur les génératrices à l'infini du conoïde; le plan vertical de projection étant quelconque parmi tous les plans verticaux (car il y a toujours sur la surface des coniques dont les plans ont leurs horizontales parallèles à un plan vertical donné), il n'y a pas de raison pour que la direction limite de la droite, qui joint les deux points à distance finie de la courbe d'ombre dans un plan horizontal, lorsque ce plan s'éloigne indéfiniment, soit perpendiculaire au plan vertical de projection; dès lors, ces deux points sont des points simples de la courbe d'ombre. Il n'en est pas de même des points à l'infini sur les génératrices situées dans le plan horizontal du point lumineux. Si l'on déplace ce point de façon qu'elles soient réelles, on voit facilement que, suivant que l'on coupe la surface par un plan horizontal un peu supérieur ou un peu inférieur au plan horizontal du point lumineux, on obtient sur la courbe d'ombre un point très éloigné, mais dans des sens différents, sur chacune des deux génératrices d'intersection. La ligne d'ombre a donc, à l'infini, un point double particulier, qui est le *Selbstberührungspunkt* des Allemands, et que l'on peut appeler point d'*autocontact*. Il ne peut pas y en avoir un troisième; car une conique qui passerait par les deux premiers, qui serait tangente au point d'autocontact à la tangente d'autocontact et qui passerait en outre par un point arbitraire de la courbe, la couperait en neuf points; par suite, la courbe se décomposerait. On a là un curieux exemple de quartique unicursale n'ayant que deux points doubles; il est aisé de vérifier qu'elle est unicursale; car, si, par un point simple de la courbe et par le point double ordinaire, on fait passer une conique qui lui soit tangente au point d'autocontact, on connaît tous les points d'intersection, sauf un, lequel s'exprimera rationnellement en fonction du paramètre restant dans l'équation de la conique.

Nota. — Dans cette étude, il n'a pas été question des arcs utiles ou virtuels de la ligne d'ombre. On sait que les extrémités de ces arcs s'obtiendraient en menant du point L des tangentes à la projection horizontale de la courbe; en ces points, elle se raccorde avec la courbe d'ombre portée, lieu du troisième point d'intersection du rayon lumineux avec la surface, et dont les arcs utiles doivent être substitués aux arcs virtuels de la ligne d'ombre.

Sur les déterminants d'ordre infini; par M. H. POINCARÉ.

(Séance du 17 février 1886.)

J'ai eu l'occasion, à propos d'une élégante méthode de calcul employée par M. Appell, de m'occuper de la théorie d'un système d'équations linéaires, lorsque le nombre des équations et celui des inconnues sont infinis (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XIII, p. 19).

La lecture d'un Mémoire fort important de M. Hill sur le mouvement du périhélie de la Lune a attiré de nouveau mon attention sur cette question (*On the part of the motion of the lunar perigee which is a fonction of the mean motions of the Sun and Moon*; Cambridge, Wilson, 1877.)

Le problème que j'avais d'abord étudié est le suivant :

Considérons une suite indéfinie de quantités données

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (\lim a_n = \infty, n = \infty)$$

et une suite indéfinie de quantités inconnues

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots,$$

Il s'agit de déterminer ces quantités A, de telle sorte que les séries

$$\sum A_n a_n^p \quad (p = 1, 2, \dots, ad \text{ inf.})$$

soient absolument convergentes et aient pour somme zéro.

J'ai dit dans la Note citée que la résolution des équations linéaires

$$(1) \quad \sum A_n a_n'' = 0$$

était plutôt une question d'inégalité qu'une question d'égalité. Ce passage a dû paraître obscur à plus d'un lecteur. Je suis maintenant en mesure de préciser davantage ma pensée.

Soient

$$A_1 = B_1, \quad A_2 = B_2, \quad \dots \quad A_n = B_n, \quad \dots$$

une solution particulière des équations (1). Écrivons la solution

générale de ces équations sous la forme

$$A_1 = h_1 B_1, \quad A_2 = h_2 B_2, \quad \dots, \quad A_n = h_n B_n, \quad \dots,$$

on trouvera, sinon les valeurs les plus générales des quantités h , au moins des valeurs assez générales, de la façon suivante :

Soient

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \dots$$

une suite indéfinie de quantités.

Posons

$$\Sigma |B_n a_n^p| = S_p$$

et supposons que les quantités λ aient été choisies de telle sorte que la série

$$\Sigma \lambda_p S_p$$

soit absolument convergente. Alors, quel que soit l'entier positif q , la série à double entrée

$$\Sigma \lambda_p B_n a_n^{p+q} \quad (n, p = 1, 2, \dots, \text{ad inf.})$$

converge aussi absolument; or elle s'écrit

$$\Sigma \lambda_p (\Sigma B_n a_n^{p+q});$$

elle a donc pour somme 0, puisque l'on a par hypothèse

$$\Sigma B_n a_n^{p+q} = 0.$$

Si donc on pose

$$h_n = \Sigma \lambda_p a_n^p \quad (p = 1, 2, \dots, \infty),$$

on aura

$$\Sigma (h_n B_n) a_n^q = 0$$

pour toutes les valeurs entières et positives de q .

Donc, si l'on fait

$$A_1 = h_1 B_1, \quad A_2 = h_2 B_2, \quad \dots, \quad A_n = h_n B_n, \quad \dots,$$

on aura une solution particulière des équations (1).

La série $\Sigma \lambda_p a_n^p$ convergeant absolument pour toutes les valeurs de a_n , la fonction

$$\Sigma \lambda_p x_p = G(x)$$

est une fonction entière

Donc, pour que

$$A_1 = h_1 B_1, \quad A_2 = h_2 B_2, \quad \dots, \quad A_n = h_n B_n \quad \dots$$

soient une solution des équations (1), il suffit que l'on puisse trouver une fonction entière

$$\Sigma \lambda_p x^p = G(x),$$

telle que

$$G(a_n) = h_n$$

et que la série

$$\Sigma |\lambda_p S_p|$$

converge.

Nous pouvons toujours, d'après le théorème de Weierstrass, construire une fonction entière $F(x)$ qui s'annule pour

$$x = a_1, \quad x = a_2, \quad \dots, \quad x = a_n, \quad \dots$$

et n'ait pas d'autre zéro.

Nous pouvons de même, d'après le théorème de Mittag-Leffler, construire une fonction méromorphe $R(x)$ qui ait pour infinis simples

$$x = a_1, \quad x = a_2, \quad \dots, \quad x = a_n, \quad \dots,$$

avec les résidus respectifs

$$\frac{h_1}{F'(a_1)}, \quad \frac{h_2}{F'(a_2)}, \quad \dots, \quad \frac{h_n}{F'(a_n)}, \quad \dots,$$

et n'ayant pas d'autres infinis.

Cette fonction $R(x)$ sera de la forme suivante

$$R(x) = h_1 R_1(x) + h_2 R_2(x) + \dots + h_n R_n(x) + \dots;$$

$R_n(x)$ sera une fonction méromorphe de x , indépendante des h et admettant l'infini unique $x = a_n$ avec le résidu $\frac{1}{F'(a_n)}$.

Quand je dis que $R_n(x)$ est indépendant des h , cela ne doit pas s'entendre d'une manière absolue. Le théorème de Mittag-Leffler nous enseigne la manière de former les fonctions R_n , quand les h_n sont donnés de façon que la série $\Sigma h_n R_n$ converge. Il est clair que la série $\Sigma h_n R_n$ peut converger pour certaines valeurs des h et diverger pour d'autres valeurs : en ce sens on peut dire que les fonctions R_n dépendent des h .

Mais supposons, par exemple, qu'on ait trouvé une suite de fonc-

tions R_n , telle que la série

$$\sum k_n R_n$$

converge absolument. Alors la série

$$\sum h_n R_n$$

convergera aussi absolument, pourvu qu'on ait

$$(2) \quad |h_n| < |k_n|.$$

Ainsi, pourvu que les h satisfont aux inégalités (2), les R_n seront indépendants des h .

Posons maintenant

$$G(x) = F(x) R(x), \quad G_n(x) = F(x) R_n(x),$$

on aura

$$G(x) = \sum h_n G_n(x)$$

et

$$G(a_n) = h_n.$$

Soit

$$G_n(x) = \sum \lambda_{np} x^p, \quad G(x) = \sum \lambda_p x^p,$$

on aura

$$\lambda_p = h_1 \lambda_{1p} + h_2 \lambda_{2p} + \dots + h_n \lambda_{np} + \dots$$

Si M_n est le plus grand module que puisse prendre la fonction $G_n(x)$ à l'intérieur d'un certain cercle C , il résulte de la manière dont les fonctions G_n ont été formées que

$$\sum |h_n M_n|$$

converge; par conséquent la série

$$\sum h_n \lambda_{np} x^p$$

convergera absolument pour toutes les valeurs de x intérieures au cercle C ou, puisque ce cercle est quelconque, dans toute l'étendue du plan.

Cela posé, je dis qu'il est impossible que la série

$$\sum \lambda_{np} S_p$$

converge absolument; car, si elle était convergente, on pourrait faire

$$(3) \quad h_1 = h_2 = \dots = h_{n-1} = h_{n+1} = \dots = 0, \quad h_n = 1,$$

et alors la fonction $G_n(x)$ satisferait aux conditions imposées à la fonction $G(x)$, à savoir que $G(a_n) = h_n$, et qu'en remplaçant dans la série qui représente $G(x)$, x^p par S_p , cette série reste absolument convergente. Il en résulterait que les valeurs (3) des h satisferaient aux équations (1), ce qui donnerait

$$B_n = 0,$$

ce que nous ne supposons pas.

Il faut donc que $\Sigma |\lambda_{np} S_p|$ diverge et, par conséquent, il est impossible que le rapport

$$\left| \frac{S_{p+1}}{S_p} \right|$$

reste constamment inférieur à une limite donnée.

Posons maintenant

$$G(x) = F(x) H(x) + h_1 G_1(x) + h_2 G_2(x) + \dots + h_n G_n(x) + \dots,$$

$H(x)$ étant une fonction entière quelconque. La fonction entière $G(x)$ satisfera à la première condition que nous nous sommes imposée, à savoir que

$$G(a_n) = h_n.$$

Il reste à savoir si elle satisfait à la seconde. Posons

$$F(x) H(x) = \rho_0 + \rho_1 x + \rho_2 x^2 + \dots + \rho_p x^p + \dots,$$

$$G(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_p x^p + \dots;$$

d'où

$$\lambda_p = \rho_p + h_1 \lambda_{1p} + h_2 \lambda_{2p} + \dots + h_n \lambda_{np} + \dots$$

Nous voulons que la série

$$\Sigma \lambda_p S_p$$

converge absolument; soient

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p, \dots$$

une suite de quantités, telle que la série

$$\Sigma \mu_p S_p$$

converge absolument. Si l'on a

$$|\lambda_p| < |\mu_p|,$$

la série $\Sigma \lambda_p S_p$ convergera également. Ainsi, si les h satisfont aux

inégalités (2) et de plus aux inégalités suivantes

$$|\varrho_p + \Sigma h_n \lambda_{np}| < |\mu_p|,$$

ces quantités satisferont aux équations (1).

Pour revenir aux quantités A_n , si l'on a à la fois les inégalités

$$(4) \quad |A_n| < |k_n B_n|, \quad \left| \varrho_p + \Sigma A_n \frac{\lambda_{np}}{B_n} \right| < |\mu_p|,$$

les A_n satisferont aux équations

$$(1) \quad \Sigma A_n \alpha_n^p = 0.$$

Ainsi ces *égalités* en nombre infini peuvent être remplacées par des *inégalités* en nombre infini.

On peut remarquer que dans les inégalités (4) entrent un grand nombre de quantités qui peuvent être choisies arbitrairement dans une certaine mesure. Les k_n sont seulement assujettis à la condition que la série

$$\Sigma |k_n M_n|$$

converge; les μ_p à la condition que la série

$$\Sigma |\mu_p S_p|$$

converge.

Quant aux ϱ_p ils sont arbitraires dans une large mesure, car ils sont les coefficients du développement de $F(x)H(x)$, $H(x)$ étant une fonction entière *quelconque*.

Les équations (1) ne suffisent pas en général pour déterminer complètement les rapports des quantités A_n . Mais, ainsi que nous l'avons vu par l'exemple même traité par M. Appell, il peut arriver que ces rapports soient entièrement déterminés par ces équations (1), jointes à la condition qu'une certaine série

$$\Sigma |A_n N_n|$$

soit convergente.

Or cette dernière condition peut être remplacée par une infinité d'inégalités (4 bis). Donc les rapports des quantités A_n seront entièrement déterminés par les inégalités (4) et (4 bis) qui sont en nombre infini.

Considérons maintenant un Tableau à double entrée, indéfini

$$(5) \quad \begin{pmatrix} 1 & a_{21} & a_{31} & a_{41} & \dots & a_{n1} & \dots \\ a_{12} & 1 & a_{32} & a_{42} & \dots & a_{n2} & \dots \\ a_{13} & a_{23} & 1 & a_{43} & \dots & a_{n3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & \dots & a_{n-1,n} & 1 & a_{n+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Dans ce Tableau les termes de la diagonale principale sont tous égaux à 1.

Soit Δ_n le déterminant formé en prenant les n premières lignes et les n premières colonnes du Tableau (5). Je dirai que le Tableau (5) est un déterminant d'ordre infini et que ce déterminant converge si Δ_n tend vers une limite finie et déterminée Δ quand n croît indéfiniment.

Pour nous rendre compte des conditions de convergence d'un déterminant, appuyons-nous sur le mode suivant de génération, qui n'est autre que celui qui est connu sous le nom de *clefs algébriques*.

Soit à développer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Développons le produit

$$\Pi_p(\Sigma_n a_{pn}),$$

puis affectons chacun des termes du produit développé, suivant les cas, de l'un des coefficients $+1$, -1 ou 0 ; nous obtiendrons ainsi D .

Il est aisé d'en déduire l'inégalité suivante; formons le produit

$$\Pi = \Pi_p(\Sigma_n |a_{pn}|),$$

on aura

$$(6) \quad |D| < \Pi.$$

Supposons maintenant qu'on remplace dans le déterminant D un certain nombre d'éléments par zéro, le déterminant D deviendra D' et Π deviendra Π' ; un certain nombre de termes s'annule-

ront dans le développement de Π , et les termes correspondants s'annuleront aussi dans le développement de D . On aura alors

$$(7) \quad |D - D'| < \Pi - \Pi'.$$

Telles sont les deux inégalités très simples qui vont nous servir de point de départ.

Pour que le déterminant Δ d'ordre infini converge, il suffit que le produit Π correspondant, qui s'écrit

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1 + |a_{21}| + |a_{31}| + \dots + |a_{n1}| + \dots)(1 + |a_{12}| + |a_{32}| + \dots + |a_{n2}| + \dots) \\ (1 + |a_{13}| + |a_{23}| + \dots) \dots \end{array} \right.$$

converge lui-même ou, d'après un théorème bien connu, que la série

$$|a_{21}| + |a_{31}| + |a_{41}| + \dots + |a_{n1}| + \dots + |a_{12}| + |a_{32}| + \dots + |a_{13}| + \dots$$

converge elle-même.

En effet, soient Δ_n et Δ_{n+p} les déterminants obtenus en prenant dans le Tableau (5) les n premières, puis les $n + p$ premières lignes et colonnes. Soient Π_n et Π_{n+p} les valeurs correspondantes du produit Π défini plus haut.

Comme dans le Tableau (5) les termes de la diagonale principale sont égaux à 1, on passera de Δ_{n+p} à Δ_n en annulant un certain nombre des éléments de ce déterminant Δ_{n+p} : on aura donc

$$|\Delta_{n+p} - \Delta_n| < \Pi_{n+p} - \Pi_n.$$

Mais, si le produit (8) converge, le second membre de cette inégalité tend vers zéro quand n et p croissent indéfiniment. Il en est donc de même du premier membre, ce qui prouve que Δ_n tend vers une limite finie et déterminée.

C. Q. F. D.

Donc, pour que le déterminant Δ converge, il suffit que la série obtenue en prenant dans ce déterminant tous les éléments qui n'appartiennent pas à la diagonale principale converge absolument.

Je vais faire voir maintenant que le déterminant converge absolument, c'est-à-dire qu'on peut modifier l'ordre des colonnes ou des lignes sans changer la valeur limite du déterminant.

Soient en effet deux Tableaux analogues à (5) et ne différant que par l'ordre des colonnes et des lignes. Je supposerai toutefois que, dans l'un comme dans l'autre Tableau, les éléments égaux à 1

occupent la diagonale principale. Soit Δ_n le déterminant obtenu en prenant les n premières lignes et colonnes du premier Tableau. Soit Δ'_p le déterminant obtenu en prenant les p premières lignes et colonnes du second Tableau, p étant assez grand pour que tous les éléments de Δ_n se retrouvent dans Δ'_p . Soient Π_n et Π'_p les produits Π correspondant à Δ_n et Δ'_p . On passera de Δ'_p à Δ_n en annulant dans Δ'_p un certain nombre d'éléments. Je puis donc écrire

$$|\Delta'_p - \Delta_n| < \Pi'_p - \Pi_n.$$

Mais le produit (8) étant absolument convergent, on aura

$$\lim \Pi'_p = \lim \Pi_n \quad (n, p = \infty).$$

On aura donc aussi

$$\lim \Delta'_p = \lim \Delta_n \quad \text{c. q. f. d.}$$

Imaginons maintenant que le Tableau (5) soit indéfini dans les deux sens, de sorte que les colonnes et les lignes soient numérotées depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Le terme qui appartiendra à la fois à la ligne numérotée n et à la colonne numérotée p s'appellera a_{np} . D'ailleurs n et p pourront prendre toutes les valeurs entières positives ou négatives, y compris la valeur zéro.

Nous appellerons Δ_n le déterminant formé en prenant les $2n+1$ lignes numérotées, $-n, -n+1, -n+2, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, n-1, n$ et les $2n+1$ colonnes portant les mêmes numéros. Le déterminant d'ordre infini convergera si Δ_n tend vers une limite finie et déterminée.

Nous supposerons toujours que les termes de la diagonale principale sont égaux à 1, c'est-à-dire que $a_{nn} = 1$.

Alors, en raisonnant tout à fait comme plus haut, on trouverait que le déterminant converge absolument pourvu que la série

$$\sum |a_{np}| \quad (n \neq p; n, p \text{ variant de } -\infty \text{ à } +\infty)$$

soit convergente.

Supposons maintenant que dans notre Tableau à double entrée, c'est-à-dire d'après la définition qui précède, dans notre déterminant d'ordre infini, on remplace tous les éléments d'une certaine

ligne par une suite de quantités

$$\dots, x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

qui soient toutes plus petites en valeur absolue qu'un certain nombre positif k . Je dis que le déterminant restera convergent si la série

$$\sum |a_{np}| \quad (n \geq p)$$

converge.

En effet, prenons, comme il a été dit plus haut, $2n + 1$ lignes et $2n + 1$ colonnes dans le Tableau à double entrée, de façon à former le déterminant Δ_n . Supposons que l'on fasse la somme des valeurs absolues des éléments de chaque ligne, en exceptant la ligne dont les éléments ont été remplacés par des quantités x . Faisons ensuite le produit Π_n des $2n$ sommes ainsi obtenues. Un terme quelconque du déterminant Δ_n sera un terme du produit Π_n multiplié par une des quantités x ou par cette quantité changée de signe. Donc, d'après l'hypothèse

$$|x_i| < k$$

on devra avoir

$$|\Delta_n| < k \Pi_n.$$

Si l'on annule quelques-uns des éléments de Δ_n ce déterminant devient Δ'_n et le produit Π_n devient Π'_n . Quelques-uns des termes du produit Π_n s'annulent et les termes correspondants de Δ_n s'annulent également. On a donc

$$|\Delta'_n - \Delta_n| < k(\Pi_n - \Pi'_n).$$

Observons maintenant que, pour passer du déterminant Δ_{n+p} au déterminant Δ_n , il suffit d'y annuler certains éléments; nous trouverons

$$|\Delta_{n+p} - \Delta_n| < k(\Pi_{n+p} - \Pi_n)$$

et nous en déduirons, comme précédemment, que Δ_n tend vers une limite finie et déterminée, pourvu qu'il en soit ainsi de Π_n , et c'est précisément ce qui arrive quand la série

$$\sum |a_{np}| \quad (n \geq p)$$

converge.

J'arrive maintenant au cas particulier traité par M. Hill. Ce



savant astronome envisage l'équation suivante

$$(9) \quad \frac{d^2 w}{dt^2} + \Theta w = 0,$$

où Θ est une série de la forme suivante

$$\Theta = \Theta_0 + 2\Theta_1 \cos t + 2\Theta_2 \cos 2t + 2\Theta_3 \cos 3t + \dots$$

ce qu'on peut écrire

$$\Theta = \Sigma \Theta_n e^{nit},$$

en supposant que $i = \sqrt{-1}$, que n varie de $-\infty$ à $+\infty$ et que $\Theta_n = +\Theta_{-n}$. Alors la théorie des équations linéaires nous apprend que l'équation (9) admet une intégrale de la forme suivante

$$(10) \quad w = \Sigma b_n e^{(n+c)it},$$

n variant de $-\infty$ à $+\infty$ et les b_n et c étant des constantes convenablement choisies. Elle admettra en outre l'intégrale

$$w = \Sigma b'_n e^{-(n+c)it}$$

(b'_n étant l'imaginaire conjuguée de b_n) et elle n'en aura pas d'autre.

Les quantités b_n et c seront déterminées par deux conditions :

- 1° Que la série (10) soit convergente;
- 2° Que les équations linéaires

$$(11) \quad \Sigma_p \Theta_{n-p} b_p - (n+c)^2 b_n = 0 \quad \left(\begin{array}{l} p \text{ varie de } -\infty \text{ à } +\infty \\ n \text{ varie de } -\infty \text{ à } +\infty \end{array} \right)$$

en nombre infini soient satisfaites.

M. Hill a traité ces équations d'après les règles ordinaires du calcul. Bien que cette hardiesse ait été justifiée par le succès, puisqu'il est arrivé ainsi au nombre même donné par l'observation (*mutatis mutandis*), il ne sera peut-être pas hors de propos de démontrer analytiquement la légitimité de sa méthode.

Le déterminant d'ordre infini auquel conduisent les équations (11) est défini comme il suit; en conservant à a_{np} le même sens que plus haut,

$$a_{nn} = \Theta_0 - (n+c)^2 \quad \text{et} \quad a_{np} = \Theta_{n-p} \quad (n \gtrless p).$$

Pour ramener ce déterminant à la forme étudiée plus haut, c'est-à-dire pour faire en sorte que les éléments de la diagonale princi-

pale soient tous égaux à 1, nous diviserons la $n^{\text{ième}}$ ligne par $\Theta_0 - (n + c)^2$, ce qui donnera

$$a_{nn} = 1, \quad a_{np} = \frac{\Theta_{n-p}}{\Theta_0 - (n + c)^2} \quad (n \geq p).$$

On obtiendra ainsi le déterminant que M. Hill a appelé $\square(c)$.

Je dis qu'il est convergent, pour cela il suffit en effet que la série

$$\sum \left| \frac{\Theta_{n-p}}{\Theta_0 - (n + c)^2} \right| \quad (n \geq p)$$

converge. Or cette série est le produit de deux autres, à savoir de

$$\sum |\Theta_n| \quad (n \geq 0, n \text{ variant de } -\infty \text{ à } +\infty)$$

ou, ce qui revient au même, de

$$2 \sum |\Theta_n| \quad (n = 1, 2, \dots, \text{ad inf.})$$

et de

$$\sum \frac{1}{|\Theta_0 - (n + c)^2|}.$$

Cette dernière série est manifestement convergente et il en est de même de la première dans le cas particulier envisagé par M. Hill. Donc le déterminant $\square(c)$ converge absolument.

Ce premier point établi, on en déduira sans peine les propriétés de ce déterminant, telles qu'elles ont été énoncées par M. Hill. Supposons donc qu'on ait déterminé c , de telle sorte que

$$\square(c) = 0.$$

Remplaçons dans le déterminant $\square(c)$ les éléments d'une ligne quelconque par des indéterminées x . Prenons, par exemple, la ligne numérotée zéro et remplaçons-y

$$\dots, \quad a_{0-n} = \frac{\Theta_n}{\Theta_0 - c^2}, \quad \dots, \quad a_{00} = 1, \quad a_{0n} = \frac{\Theta_n}{\Theta_0 - c^2}, \quad \dots$$

respectivement par

$$\dots, \quad x_{-n}, \quad \dots, \quad x_0, \quad \dots, \quad x_n, \quad \dots$$

D'après ce qui précède, le déterminant ainsi obtenu convergera encore, pourvu que les quantités x soient toutes plus petites en valeur absolue qu'un nombre donné k . La valeur limite de ce dé-

terminant d'ordre infini sera évidemment une fonction linéaire des quantités x et pourra s'écrire

$$\dots + A_{-n}x_{-n} + \dots + A_0x_0 + A_1x_1 + \dots + A_nx_n + \dots$$

On obtiendra d'ailleurs évidemment A_n , par exemple en donnant à x_n la valeur 1 et aux autres x la valeur zéro.

Je dis que les quantités A_n ainsi définies satisfont aux équations (11). En effet, faisons en particulier, pour une valeur quelconque de n ,

$$x_p = a_{np} = \frac{\theta_{n-p}}{\theta_0 - (n+c)^2} \quad (n \geq p); \quad x_n = a_{nn} = 1.$$

Le déterminant ainsi obtenu sera absolument convergent, car la série

$$\sum \left| \frac{\theta_{n-p}}{\theta_0 - (n+c)^2} \right|$$

devant converger, les quantités

$$x_p = \frac{\theta_{n-p}}{\theta_0 - (n+c)^2}$$

auront une valeur absolue limitée. De plus, ce déterminant a pour somme zéro, car il a deux lignes identiques (pourvu que $n \geq 0$). Il est encore nul si $n = 0$, car il se réduit alors à $\square(c)$, qui par hypothèse est nul. On a donc

$$\sum A_p x_p = 0$$

ou

$$\sum A_p \frac{\theta_{n-p}}{\theta_0 - (n+c)^2} + A_n = 0 \quad (n \geq p),$$

ou enfin

$$(11) \quad \sum A_p \theta_{n-p} + A_n (n+c)^2 = 0 \quad (n \geq p).$$

Les équations (11) admettent évidemment une infinité de solutions; mais nous savons d'avance qu'un seul système de solutions peut donner une série

$$\sum A_p e^{(p+c)it}$$

qui soit convergente, car l'équation (9) n'a que deux intégrales. Il reste donc à établir que la série $\sum A_p e^{(p+c)it}$ converge.

Or on obtiendra cette série en faisant

$$x_p = e^{(p+c)it},$$

dans le déterminant défini plus haut. Or le module de x_p est égal à 1 et est par conséquent limité.

Donc le déterminant restera convergent. C. Q. F. D.

Je crois qu'après les explications qui précèdent, la belle méthode de M. Hill ne peut plus donner prise à aucune objection.

Sur l'équation du quatrième degré et les fonctions elliptiques; par M. A.-E. PELLET.

(Séance du 17 mars 1886.)

1. Lorsque les racines d'une équation de degré pair $2m$ peuvent se partager en m groupes de deux racines satisfaisant à une relation de la forme

$$(1) \quad ax_1x_2 + b(x_1 + x_2) + c = 0,$$

les racines de chaque groupe étant inégales, on peut ramener l'équation à être réciproque ou à ne contenir que les puissances paires de l'inconnue par une substitution linéaire. Nous considérerons les deux cas, a différent de 0 et a nul.

Premier cas : $a \neq 0$. — L'équation devient réciproque en posant $x = \alpha z + \beta$ et paire en posant $x = \alpha \frac{y + \delta}{y - \delta} + \beta$, α étant égal à $\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$, β à $-\frac{b}{a}$, et δ une quantité indéterminée, différente de 0.

Second cas : $a = 0$. — L'équation devient paire en posant $x = zy - \frac{c}{2b}$, et réciproque en posant $x = z \frac{z \pm 1}{z \mp 1} - \frac{c}{2b}$, z étant une quantité indéterminée.

2. Lorsqu'une équation du quatrième degré n'a pas de racines égales, on peut former de trois manières différentes deux groupes



de deux racines; à chaque manière correspond une relation de la forme (1), et, par conséquent, on peut amener l'équation à être paire ou réciproque de trois manières différentes. Soit l'équation

$$X^4 + 4PX^3 + 6QX^2 + 4RX + S = 0$$

ou, en posant $X = x - P$,

$$f(x) = x^4 + 6qx^2 + 4rx + s = 0.$$

Cherchons à rendre cette équation réciproque par la substitution $x = \alpha z + \beta$; on obtient les équations

$$[6f'(\beta)]^2 - f(\beta)[f'''(\beta)]^2 = 0, \quad \alpha^2 = \frac{6f'(\beta)}{f'''(\beta)}.$$

La première développée devient

$$\varphi(\beta) = \beta^3 + \frac{s-9q^2}{2r}\beta^2 - 3q\beta - \frac{r}{2} = 0.$$

en supposant r différent de 0; puis on a

$$\alpha^2 = 3\beta^2 + \frac{s-9q^2}{r}\beta - 3q = \varphi'(\beta).$$

D'après sa formation, l'équation $\varphi(\beta) = 0$ admet comme racine toute racine multiple de l'équation $f(x) = 0$, avec le même degré de multiplicité, et réciproquement.

Supposons réels les coefficients de l'équation $f(x) = 0$. Il en est de même des coefficients de l'équation $\varphi(\beta) = 0$. Désignons par $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ ses trois racines; on a

$$\alpha_0^2 = \varphi'(\beta_0) = (\beta_0 - \beta_1)(\beta_0 - \beta_2);$$

par conséquent, lorsque les trois racines de l'équation en β sont réelles, les valeurs de α^2 correspondant à la plus grande et à la plus petite sont positives; si l'équation en β n'a qu'une racine réelle, la valeur correspondante de α^2 est positive.

Effectuons la substitution $x = \alpha \frac{y-\delta}{y-\delta} + \beta$, α, β, δ étant réels, ce qui est toujours possible d'après ce qui précède; et soit

$$Ay^4 + By^2 + C = 0$$

l'équation à laquelle on arrive. Les autres transformations pour

obtenir une équation paire seront données par la formule

$$y = \sqrt[4]{\frac{C}{A}} \frac{z + \delta}{z - \delta};$$

donc, lorsque les racines de l'équation en β sont réelles, $\frac{C}{A}$ est positif, par suite les racines de l'équation $f(x) = 0$ sont toutes réelles ou toutes imaginaires; lorsqu'une seule des trois valeurs de β est réelle, $\frac{C}{A}$ est négatif; l'équation $f(x) = 0$ a deux racines réelles et deux racines imaginaires conjuguées.

3. Ainsi les intégrales elliptiques peuvent se ramener par une transformation linéaire à la forme

$$\int \frac{F(x) dx}{\sqrt{Ax^4 + Bx^2 + C}},$$

où $F(x)$ est une fonction rationnelle. Si $F(x)$ est une fonction impaire, c'est-à-dire égale à $xf(x^2)$, $f(x^2)$ étant une fonction rationnelle, on voit, en prenant x^2 pour variable, que l'intégrale précédente se ramène à l'intégrale d'une fonction rationnelle. Si $F(x)$ n'est pas une fonction impaire, effectuons la substitution

$x = \sqrt[4]{\frac{C}{A}} \frac{y + \delta}{y - \delta}$; il vient

$$\int \frac{-2 F(x) \delta \sqrt[4]{\frac{C}{A}} dy}{\sqrt{A'y^4 + B'y^2 + C'}},$$

et, si $F\left(\sqrt[4]{\frac{C}{A}} \frac{y + \delta}{y - \delta}\right)$ est une fonction impaire, cette dernière se ramène à l'intégrale d'une fonction rationnelle; pour cela, il faut que l'on ait

$$F\left(\sqrt[4]{\frac{C}{A}} \frac{y + \delta}{y - \delta}\right) = -F\left(\sqrt[4]{\frac{C}{A}} \frac{y - \delta}{y + \delta}\right) \quad \text{ou} \quad F(x) = -F\sqrt[4]{\frac{C}{A}} \frac{1}{x}$$

et, dans le cas où $F(x)$ est une fonction paire $F(x^2)$,

$$F(x^2) = -F\left(\frac{C}{Ax^2}\right);$$

ce qui renferme un résultat de M. Hermite (*Journal de M. Resal*; année 1880).

Considérons en particulier l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ et effectuons la substitution $x = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{y+1}{y-1}$; on a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{k} \sqrt{4(y^2+1)^2 - \frac{(1+k)^2}{k} (y^2-1)^2}}.$$

Posons

$$\frac{4k}{(1+k)^2} = k'^2, \quad \frac{1}{k'} \frac{y^2-1}{y^2+1} = u,$$

il vient

$$u = \frac{x(1+k)}{1+kx^2}$$

et

$$(1+k) \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k'^2u^2)}},$$

et l'on est conduit ainsi naturellement à l'échelle des modules de Lagrange (BERTRAND, *Calcul intégral*, n^{os} 650 et suiv.; 659).

Sur certaines suites de fractions irréductibles; par M. MAURICE D'OCAGNE.

(Séance du 7 avril 1886.)

Soit

$$\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_m}{b_m}, \dots \right)$$

une suite de fractions proprement dites, irréductibles, rangées par ordre de grandeur croissante, et telles que, pour toute valeur de l'indice m , on ait

$$b_m - \alpha a_m \leq N,$$

α étant un entier positif, nul ou négatif. N un entier positif. Nous supposons d'ailleurs que $\frac{a_1}{b_1}$ est la plus petite des fractions satisfaisant à la condition requise.

Nous représenterons une telle suite par la notation $\mathfrak{S}(\alpha, N)$, et

nous dirons que α est la *caractéristique* et N la *base* de la suite considérée. Lorsque la caractéristique est nulle, on retombe sur les suites dites de Farey, étudiées par Cauchy (*Bulletin des Sciences*, 1816), et M. Stouvenel (*Journal de Liouville*, t. V, 1840).

M. Halphen, dans une remarquable étude sur ce sujet (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1877), a fait connaître une classe étendue de suites de nombres commensurables jouissant de la propriété démontrée par Cauchy pour les suites de Farey, à savoir que *le numérateur de la différence de deux fractions consécutives est égal à l'unité*, d'où l'on déduit que

$$(1) \quad \frac{a_m}{b_m} = \frac{a_{m-1} + a_{m+1}}{b_{m-1} + b_{m+1}}.$$

En particulier, les suites $\mathfrak{S}$, ci-dessus définies, jouissent de cette propriété. Nous avons déduit de là, au sujet de ces suites $\mathfrak{S}$, un certain nombre de remarques dont nous allons énoncer les principales ⁽¹⁾.

La propriété (1) permet d'abord de trouver la loi d'enchaînement des termes successifs de la suite $\mathfrak{S}(\alpha, N)$. Cette loi est contenue dans les formules suivantes :

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, & a_2 &= 1; \\ b_1 &= N - \alpha, & b_2 &= N - \alpha - 1; \\ a_m &= \lambda a_{m-1} - a_{m-2} & \left| \quad \lambda = E \left(\frac{N + b_{m-2} + \alpha a_{m-2}}{b_{m-1} + \alpha a_{m-1}} \right), \right. \\ b_m &= \lambda b_{m-1} - b_{m-2} \end{aligned}$$

$E(x)$ représentant, suivant l'usage, la partie entière de la quantité x . Mais j'ai remarqué que *la connaissance d'une suite de caractéristique nulle $\mathfrak{S}(0, N)$ entraîne la connaissance IMMÉDIATE de toutes les suites de même base $\mathfrak{S}(\alpha, N)$* . J'entends par là que l'on peut, connaissant la suite $\mathfrak{S}(0, N)$, écrire immédiatement un terme de rang quelconque de la suite $\mathfrak{S}(\alpha, N)$, ce qui dispense des longs calculs qui résulteraient de l'application des formules précédentes.

(1) Nous renvoyons les lecteurs qui voudraient prendre connaissance de nos démonstrations au Mémoire d'où ces remarques sont extraites. Ce Mémoire paraîtra cette année dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, recueil que notre Société reçoit, bien qu'il ait été omis, par mégarde, sur la liste des échanges placée au commencement du présent Volume.

J'ai, en effet, démontré le théorème suivant :

THÉOREME I. — *Si le $m^{\text{ième}}$ terme de la suite $\mathfrak{S}(0, N)$ est $\frac{a_m}{b_m}$, le $m^{\text{ième}}$ terme de la suite $\mathfrak{S}(\alpha, N)$ est $\frac{a_m}{b_m - \alpha a_m}$.*

Ainsi, de la suite $\mathfrak{S}(0, 9)$, qui est

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \frac{1}{9} & \frac{1}{8} & \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{2}{9} & \frac{1}{4} & \frac{2}{7} & \frac{1}{3} & \frac{3}{8} & \frac{2}{5} & \frac{3}{7} & \frac{4}{9} & \frac{1}{2} \\ & \frac{5}{9} & \frac{4}{7} & \frac{3}{5} & \frac{5}{8} & \frac{2}{3} & \frac{5}{7} & \frac{3}{4} & \frac{7}{9} & \frac{4}{5} & \frac{6}{7} & \frac{7}{8} & \frac{8}{9} \end{array}$$

on déduit immédiatement

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{S}(1, 9) \dots\dots\dots & \frac{1}{8} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{5} \\ \mathfrak{S}(2, 9) \dots\dots\dots & \frac{1}{7} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \\ \mathfrak{S}(3, 9) \dots\dots\dots & \frac{1}{6} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \\ \mathfrak{S}(4, 9) \dots\dots\dots & \frac{1}{5} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \\ \mathfrak{S}(5, 9) \dots\dots\dots & \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \\ \mathfrak{S}(6, 9) \dots\dots\dots & \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \\ \mathfrak{S}(7, 9) \dots\dots\dots & \frac{1}{2} \end{array}$$

Lorsque la caractéristique α est négative, auquel cas nous mettrons son signe en évidence en posant $\alpha = -\beta$, le théorème I a besoin d'être complété. En effet, une suite $\mathfrak{S}(-\beta, N)$ a un nombre illimité de termes. A cet égard, j'ai démontré les théorèmes suivants :

THÉOREME II. — *Si la suite $\mathfrak{S}(0, N)$ se compose de $p - 1$ termes, le $p^{\text{ième}}$ terme de la suite $\mathfrak{S}(-\beta, N)$ est égal à $\frac{1}{\beta + 1}$.*

THÉOREME III. — *p étant le rang du terme $\frac{1}{\beta + 1}$ dans la suite $\mathfrak{S}(-\beta, N)$, le terme qui, dans cette suite, occupe le $p^{\text{ième}}$ rang après un terme quelconque $\frac{a_m}{b_m}$ est égal à $\frac{b_m - (\beta - 1)a_m}{(\beta + 1)b_m - \beta^2 a_m}$.*

Corollaire. — Si $\frac{a_{m+p}}{b_{m+p}}$ est le terme qui occupe le $p^{\text{ième}}$ rang après le terme $\frac{a_m}{b_m}$, on a

$$b_{m+p} - \beta a_{m+p} = b_m - \beta a_m.$$

Les théorèmes I et II font connaître immédiatement les p premiers termes de la suite $\mathfrak{S}(-\beta, N)$. Le théorème III permet de déduire, sans calcul, de ces p premiers termes, les groupes successifs de p termes de cette suite illimitée.

Représentant par $\mathfrak{C}(z, N)$ le nombre des termes de la suite $\mathfrak{S}(z, N)$, lorsque z n'est pas négatif, on voit immédiatement que, si $\varphi(k)$ représente, suivant l'usage, le nombre des entiers non supérieurs à l'entier k et premiers avec lui, on a

$$(a) \quad \mathfrak{C}(0, N) = \sum_{k=2}^{k=N} \varphi(k).$$

J'ai démontré aussi la formule, moins facile à obtenir,

$$(b) \quad \mathfrak{C}(z, N) = \frac{1}{z} \sum_{k=3}^{k=N-\alpha+1} \varphi(k).$$

En vertu du théorème II et de la formule (a), on voit que le nombre p , pour une suite à caractéristique négative et de base N , est donné par la formule

$$(c) \quad p = \sum_{k=1}^{k=N} \varphi(k).$$

Les théorèmes précédents reçoivent une interprétation géométrique fort simple, si l'on convient de représenter la fraction $\frac{a}{b}$ par le point dont les coordonnées rectangulaires sont

$$x = b, \quad y = a.$$

Dans ce système de représentation, toutes les fractions proprement dites sont données par les sommets d'un réseau à mailles carrées, compris entre l'axe Ox et la bissectrice de l'angle xOy . Le point représentatif de toute fraction irréductible est tel que le segment de droite, qui unit ce point à l'origine, ne contient aucun autre sommet du réseau.

Imposer à une fraction $\frac{a}{b}$ une certaine condition, telle que

$$f(a, b) \leq N,$$

c'est astreindre le point représentatif de cette fraction à se trouver dans une certaine région du plan, limitée par l'axe Ox , la bissectrice de l'angle xOy et la courbe dont l'équation est

$$f(x, y) - N = 0,$$

ce point représentatif pouvant d'ailleurs se trouver sur cette courbe elle-même. Dans le cas des suites $\mathfrak{S}$, auquel se rapporte la présente Note, cette courbe est une droite. Ranger les fractions irréductibles qui répondent à la condition requise par ordre de grandeur croissante, cela revient à prendre ces fractions dans l'ordre où leurs points représentatifs sont successivement atteints par une droite pivotant autour de l'origine O , dans le sens de Ox vers Oy .

La propriété fondamentale liant deux fractions consécutives $\frac{a_{m-1}}{b_{m-1}}$ et $\frac{a_m}{b_m}$, dont les points représentatifs seront désignés par A_{m-1} et A_m , propriété qui s'exprime par l'égalité

$$a_m b_{m-1} - a_{m-1} b_m = 1,$$

se traduit géométriquement comme suit : *La surface du triangle $A_m A_{m-1} O$ est égale à $\frac{1}{2}$.*

Le théorème I conduit à l'énoncé géométrique que voici :

Les points représentatifs des termes de même rang, dans toutes les suites de même base, sont régulièrement espacés sur une parallèle à l'axe Ox ; l'équidistance de ces points comprend autant de divisions qu'il y en a entre cette parallèle et l'axe Ox .

Quant au corollaire du théorème III, il se traduit ainsi :

p étant le rang du terme $\frac{1}{\beta+1}$ dans la suite $\mathfrak{S}(-\beta, N)$, si l'on prend, dans cette suite, tous les termes de p en p , à partir d'un terme quelconque, les points représentatifs de ces termes sont régulièrement espacés sur une droite dont le coefficient angulaire est égal à $\frac{1}{\beta}$.

Au sujet de la décomposition d'une forme quadratique en une somme de carrés de formes linéaires et indépendantes ⁽¹⁾;
par M. DE PRESLE.

(Séance du 21 avril 1886.)

La théorie de la décomposition d'une forme quadratique en une somme de carrés indépendants peut se déduire du théorème suivant, dont nous allons proposer une démonstration :

Si une forme quadratique est décomposée en une somme de carrés de formes linéaires indépendantes, le déterminant principal du discriminant de la forme quadratique est en valeur absolue égal au carré du déterminant principal du système des coefficients des variables dans les formes linéaires composantes.

Soit U une forme quadratique à m variables $x_1, \dots, x_h, \dots, x_m$; soient $P_1, \dots, P_k, \dots, P_n$, n formes linéaires indépendantes de ces variables, en lesquelles la forme U est décomposée, a_{kh} le coefficient de la variable x_k dans P_h ; l'expression de P_k est la suivante :

$$P_k = \sum_{h=1}^{k=n} a_{kh} x_h.$$

Les formes linéaires étant indépendantes, le déterminant principal du système des coefficients des variables est d'ordre n , et nous pouvons, sans nuire à la généralité de la proposition, supposer que ce déterminant principal δ soit

$$\delta = | a_{kh} |_{\substack{h=1, 2, \dots, n \\ k=1, 2, \dots, n}}.$$

Désignons par ε la quantité ± 1 ; nous aurons

$$U = \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k P_k^2.$$

Soit l un indice de x ; nous aurons

$$\frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k a_{kl} P_k$$

(1) Le présent travail suppose connue la remarquable théorie de la résolution des équations linéaires de M. E. Rouché, publiée dans le *Journal de l'École Polytechnique* en 1882.

ou, en remplaçant P_k par sa valeur,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k a_{kl} \sum_{h=1}^{h=m} a_{kh} x_h;$$

dans cette expression, le coefficient de x_h est

$$\sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k a_{kl} a_{kh},$$

le discriminant Δ est donc

$$\Delta = \left| \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k a_{kl} a_{kh} \right|_{l=1, 2, \dots, m}^{h=1, 2, \dots, m}.$$

1° Considérons un mineur quelconque du discriminant, nous pouvons le décomposer en déterminants partiels obtenus en combinant entre elles les colonnes partielles correspondant aux différentes valeurs de k . Cette décomposition faite, les déterminants partiels dans la composition desquels entrent deux colonnes partielles de même rang, c'est-à-dire correspondant à une même valeur de k , sont nuls.

En effet, les éléments de l'une étant

$$a_{kl_1} a_{kh'}, a_{kl_2} a_{kh'}, a_{kl_3} a_{kh'}, \dots,$$

les éléments de l'autre seront

$$a_{kl_1} a_{kh''}, a_{kl_2} a_{kh''}, a_{kl_3} a_{kh''}, \dots,$$

et, par suite, seront proportionnels aux premiers.

2° Les mineurs du discriminant d'ordre supérieur à n sont nuls. En opérant la décomposition précédente, il faudra associer $n + i$ colonnes partielles prises chacune parmi les $n + i$ colonnes du discriminant, lesquelles n'ont chacune que n colonnes partielles; donc au moins deux colonnes partielles auront le même rang, et les mineurs seront nuls.

3° Parmi les mineurs du discriminant d'ordre n , il y en a un égal en valeur absolue au carré du déterminant principal du système des coefficients des variables dans les formes linéaires.

Considérons le mineur δ' du discriminant

$$\delta' = \left| \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k a_{kl} a_{kh} \right|_{l=1, 2, \dots, n}^{h=1, 2, \dots, n}.$$

Décomposons-le en déterminants partiels; parmi ceux-ci les déterminants partiels provenant de l'association de colonnes partielles de même rang seront nuls; les déterminants partiels provenant de

l'association de colonnes partielles de rang différent (ce qui est possible, car ces colonnes partielles doivent être prises dans les n colonnes de δ' , qui ont chacune n colonnes partielles) ne seront pas nuls, et contiendront le facteur $\prod_{k=1}^{k=n} \epsilon_k$.

On peut conserver dans la somme provenant de la décomposition précédente les déterminants partiels nuls, en supposant que, dans les facteurs ϵ_k , k ait toutes les valeurs de 1 à n ; et le produit $\prod_{k=1}^{k=n} \epsilon_k$ étant égal à ± 1 , on aura

$$\delta' = \pm \left| \sum_{k=1}^{k=n} a_{kl} a_{kh} \right|_{l=1, 2, \dots, n}^{h=1, 2, \dots, n},$$

la quantité placée entre traits verticaux représentant l'élément appartenant à la $l^{\text{ème}}$ ligne et à la $h^{\text{ème}}$ colonne. On l'obtiendra en considérant les sommes

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_{kl}, \quad \sum_{k=1}^{k=n} a_{kh}$$

et faisant la somme des produits des termes de même rang. On a donc le carré du déterminant principal δ et, par suite,

$$\delta' = \pm \delta^2,$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

Détermination des nombres de Bernoulli; par M. DE PRESLE.

(Séance du 6 juin 1886.)

1. *Exposé de la question.* — Les nombres de Bernoulli B sont définis par la relation

$$\frac{x}{2} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 1 = B_1 \frac{x^2}{1.2} - B_2 \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots - (-1)^n B_n \frac{x^{2n}}{1.2 \dots (2n)} \pm \dots$$

La valeur de $\cot x$ est

$$\cot x = i \frac{e^{2xi} + 1}{e^{2xi} - 1}$$

et, en développant le second membre à l'aide de la relation précédente,

$$\cot x = \frac{1}{x} - B_1 \frac{2^2 x}{1.2} + B_2 \frac{2^4 x^3}{1.2.3.4} - \dots - (-1)^n B_n \frac{2^{2n} x^{2n-1}}{1.2 \dots (2n)} \pm \dots;$$

si nous désignons par C_n le coefficient de x^{2n-1} , nous aurons

$$C_n = (-1)^n \frac{2^{2n}}{1.2 \dots (2n)} B_n, \quad B_n = (-1)^n \frac{1.2 \dots (2n)}{2^{2n}} C_n.$$

L'expression de la tangente se déduit de celle de la cotangente par la relation

$$\text{tang } x = \cot x - 2 \cot 2x;$$

on aura donc, pour le coefficient E_n de x^{2n-1} , dans $\text{tang } x$,

$$E_n = -(2^{2n} - 1) C_n$$

et, par suite,

$$E_n = (-1)^{n+1} \frac{(2^{2n} - 1) 2^{2n}}{1.2 \dots (2n)} B_n, \quad B_n = (-1)^{n+1} \frac{1.2 \dots (2n)}{(2^{2n} - 1) 2^{2n}} E_n;$$

si donc nous connaissons le développement de $\text{tang } x$, nous déduirions de la dernière égalité la valeur de B_n .

2. Développement de la tangente en série entière. — Nous allons d'abord nous proposer la détermination des dérivées successives de $\text{tang } x$. Soit

$$\varphi(x) = a_n \cos^{-2n} x;$$

nous aurons

$$\varphi'(x) = 2na_n \cos^{-(2n+1)} x \sin x,$$

$$\varphi''(x) = 2n(2n+1)a_n \cos^{-2(n+1)} x \sin^2 x + 2na_n \cos^{-2n} x$$

ou bien

$$\varphi''(x) = 2n(2n+1)a_n \cos^{-2(n+1)} x - 4n^2 a_n \cos^{-2n} x.$$

La dérivée de $\text{tang } x$ étant $\cos^{-2} x$, de la valeur de $\varphi''(x)$, on déduira les expressions successives des dérivées impaires de $\text{tang } x$:

$$D_1 \text{ tang } x = 1 \cos^{-2} x.$$

$$D_3 \text{ tang } x = 1.2.3 \cos^{-4} x - 1.2^3.1^2 \cos^{-2} x,$$

$$D_5 \text{ tang } x = 1.2.3.4.5 \cos^{-6} x - 1.2.3.2^2(1^2 - 2^2) \cos^{-4} x - 12^5.1^4 \cos^{-2} x,$$

$$D_7 \text{ tang } x = 1.2.3.4.5.6.7 \cos^{-8} x - 1.2.3.4.5.2^2(1^2 - 2^2 \dots 3^2) \cos^{-6} x - 1.2.3.2^3(1^2 - 2^2 - 1^2 2^2) \cos^{-4} x - 1.2^6.1^6 \cos^{-2} x.$$

$$\begin{aligned} D_9 \text{ tang } x &= 1.2.3.4.5.6.7.8.9 \cos^{-10} x \\ &- 1.2.3.4.5.6.7.2^2(1^2 - 2^2 - 3^2 - 4^2) \cos^{-8} x \\ &- 1.2.3.4.5.2^3(1^2 - 2^2 - 3^2 - 1^2 2^2 - 2^3 3^2 - 3^2 1^2) \cos^{-6} x \\ &- 1.2.3.2^4(1^2 - 2^2 - 1^2 2^2 - 1^2 2^2 \cos^{-4} x - 1.2^6.1^6 \cos^{-2} x \end{aligned}$$

Désignons par $S_1^q(z^2)^r$ la somme des produits obtenus en prenant les nombres $1^2, 2^2, 3^2, \dots, q^2$ et, en formant avec eux tous les produits possibles de degré $2r$ avec répétition, nous apercevons la loi de formation suivante :

$$\begin{aligned} D_{2n+1} \operatorname{tang} x &= 1.2 \dots (2n+1) \cos^{-2(n+1)} x \\ &\quad - 1.2 \dots (2n-1) 2^2 S_1^n(z^2)^1 \cos^{-2n} x \\ &\quad + 1.2 \dots (2n-3) 2^2 S_1^{n-1}(z^2)^2 \cos^{-2(n-1)} x - \dots \\ &\quad + (-1)^p 1.2 \dots [2(n-p)+1] 2^{2p} S_1^{n-p}(z^2)^p \cos^{-2(n-p+1)} x \\ &\quad + (-1)^{p+1} 1.2 \dots [2(n-p)-1] 2^{2(p+1)} S_1^{n-p}(z^2)^{p+1} \cos^{-2(n-p)} x \pm \dots \end{aligned}$$

Supposons cette loi vraie pour $D_{2n+1} \operatorname{tang} x$, elle le sera encore pour $D_{2n+3} \operatorname{tang} x$; en effet :

Dans $D_{2n+3} \operatorname{tang} x$, le coefficient de $\cos^{-2(n-p+1)} x$ sera

$$\begin{aligned} &(-1)^{p+1} 2(n-p)[2(n-p)+1].1.2 \dots [2(n-p)-1] 2^{2(p+1)} S_1^{n-p}(z^2)^{p+1} \\ &\quad - (-1)^p 2^2(n-p+1)^2 1.2 \dots [2(n-p)+1] 2^{2p} S_1^{n-p+1}(z^2)^p \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} &(-1)^{p+1} 1.2 \dots [2(n-p)+1] 2^{2(p+1)} [S_1^{n-p}(z^2)^{p+1} \\ &\quad + (n-p+1)^2 S_1^{n-p+1}(z^2)^p] \end{aligned}$$

ou encore

$$(-1)^{p+1} 1.2 \dots \{2[(n+1)-p]-1\} 2^{2(p+1)} S_1^{n+1-p}(z^2)^{p+1},$$

car on a

$$S_1^q(z^2)^r = S_1^{q-1}(z^2)^r + q^2 S_1^q(z^2)^{r-1};$$

la loi est donc générale.

3. Expression des nombres de Bernoulli. — Dans l'expression de $D_{2n+1} \operatorname{tang} x$ supposons x nul; nous avons

$$\begin{aligned} 1.2 \dots (2n+1) &= 1.2 \dots (2n-1) 2^2 S_1^n(z^2)^1 + \dots \\ &\quad + (-1)^{p+1} 1.2 \dots [2(n-p)-1] 2^{2(p+1)} S_1^{n-p}(z^2)^{p+1}. \end{aligned}$$

Cette expression, divisée par $1.2 \dots (2n+1)$, est le coefficient de x^{2n+1} dans le développement de $\operatorname{tang} x$; nous avons donc

$$\begin{aligned} E_n &= 1 - \frac{2^2}{2n(2n+1)} S_1^n(z^2)^1 + \dots \\ &\quad + (-1)^{p+1} \frac{2^{2(p+1)}}{2(n-p)[2(n-p)+1] \dots (2n+1)} S_1^{n-p}(z^2)^{p+1} \pm \dots \\ &\quad + (-1)^n \frac{2^{2n}}{1.2 \dots (2n-1)} \end{aligned}$$

et, par suite,

$$B_n = (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 2 \dots (2n)}{(2^{2n} - 1) 2^{2n}} \left[1 - \frac{2^2}{2n(2n+1)} S_1^n (2^2)^1 + \dots \right. \\ \left. + (-1)^{p+1} \frac{2^{2(p+1)}}{2(n-p)[2(n+p)+1] \dots (2n+1)} S_1^{n-p} (2^2)^{p+1} \pm \dots \right. \\ \left. + (-1)^n \frac{2^{2n}}{1 \cdot 2 \dots (2n+1)} \right].$$

Nouvelle construction de la courbe d'ombre propre d'une surface de révolution et de la tangente en un point quelconque de cette courbe ; par M. NER, élève à l'École Polytechnique.

(Séance du 19 mai 1886.)

Soient C, C' les projections du méridien principal qui, en tournant autour de l'axe vertical O, engendre la surface.

1. Supposons la surface éclairée par des rayons parallèles de direction OR, O'R' (*fig. 1*) ; si l'on fait tourner ce rayon autour de l'axe O, le point R décrira le cercle Γ et le point R' décrira l'horizontale H'.

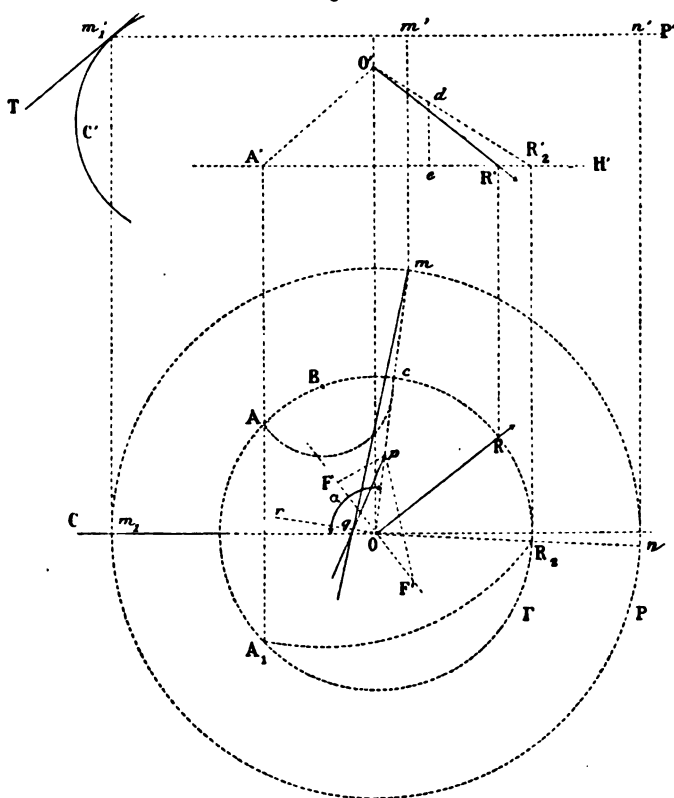
Proposons-nous de déterminer le point de la courbe d'ombre situé sur un parallèle PP'. Soit mm' le point cherché : en ce point le plan tangent à la surface est parallèle au rayon lumineux. Faisons tourner ce plan autour de l'axe O de façon à amener le point mm' dans le plan méridien principal en m₁m'₁. En ce point le plan tangent est perpendiculaire au plan vertical et sa trace verticale est la tangente m₁T en m'₁ à la courbe C'. Le point mm' a tourné d'un angle α dans le sens trigonométrique : si l'on fait tourner le rayon OR, O'R' du même angle dans le même sens, sa projection verticale deviendra parallèle à m₁T, puisque le plan tangent en un point de la courbe d'ombre à la surface considérée doit être parallèle au rayon lumineux. De là résulte pour la construction du point de la courbe d'ombre situé sur un parallèle PP' la construction suivante :

Mener par le point O' une droite OA parallèle à la tangente en m₁ à C'. Le point A où cette parallèle rencontre H' se projette

en A sur Γ ; le point m se trouve sur une droite Om telle que $\widehat{mOm_1} = \widehat{ROA}$.

Pour déterminer cette droite il suffit, d'un point quelconque B de la bissectrice de l'angle m_1OR comme centre, de décrire un

Fig. 1.



arc de cercle passant par A ; cet arc de cercle coupe Γ au point c situé sur Om . On aurait une seconde solution n, n' en considérant A' comme projection du point A_1 .

Cette construction permet d'obtenir des points sur un parallèle ou sur un méridien donnés : elle fournit immédiatement les parallèles limites.

Déterminons la tangente à la courbe au point mm' ; il suffit de

construire la projection horizontale de cette tangente puisque nous connaissons le plan tangent.

Si la courbe C' est un arc de cercle de rayon ρ dont le centre est à une distance r de l'axe, on sait que la projection horizontale de la courbe d'ombre est une conchoïde de l'ellipse ombre propre d'une sphère de centre O et de rayon ρ . Le pôle de cette conchoïde est le point O , le paramètre est r . Pour obtenir le point p de cette ellipse correspondant au point m il suffit de prendre sur Om une longueur $mp = r$. Sur la droite $O'R'_2$, faisant avec H' un angle égal à l'angle du rayon lumineux avec le plan horizontal, portons $R'_2d = \rho$; le point d se projette sur H' en e ; de sera la demi-distance focale de l'ellipse considérée dont le grand axe est perpendiculaire à OR ; on obtient ainsi les foyers F, F' . On en déduit la normale pq à l'ellipse au point p ; cette droite rencontre la perpendiculaire Or à Om au point q ; qm sera la normale à la courbe d'ombre au point m . De là résulte la construction suivante.

Sur la droite $O'R'_2$ prendre $R'_2d = \rho$; d se projette en e sur H' .

Sur une perpendiculaire à OR porter $OF = OF' = de$; cette construction servira pour tous les points situés sur la portion de la surface engendrée par un même arc de cercle.

Sur Om prendre le point p tel que $mp = r$; mener la bissectrice pq de l'angle $F'pF$ qui coupe la perpendiculaire en O à mO au point q ; qm sera la normale à la courbe au point m .

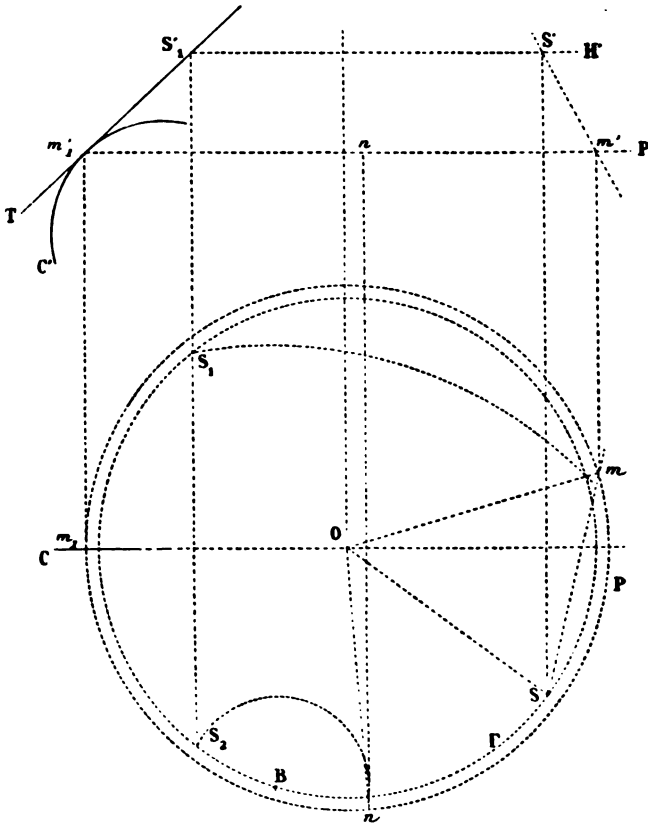
Si la courbe C' n'est pas un arc de cercle, on considérera le tore osculateur à la surface le long du parallèle PP' ; les deux courbes d'ombre sur la surface et sur le tore ont même tangente au point m ; il suffira donc de mener, comme dans le cas précédent, la tangente à la courbe d'ombre sur le tore engendré par le cercle osculateur à la courbe C' au point m'_1 .

2. Supposons la surface éclairée par un flambeau SS' (*fig. 2*). Par un raisonnement analogue au précédent on arrive à la construction suivante :

Mener l'horizontale H' passant par S' et tracer le cercle Γ de rayon OS , prendre en S'_1 l'intersection de H' et de la tangente en m'_1 à la méridienne : S'_1 se projette horizontalement en S_1 ou en S_2 sur le cercle Γ ; joindre OS_1, OS_2 et prendre les symétriques de ces droites par rapport à la bissectrice de l'angle m_1OS ; on a ainsi

deux droites qui coupent le parallèle P aux points cherchés m et n .

Fig. 2.



Pour déterminer la tangente au point m on peut supposer que le point SS' s'éloigne à l'infini sur le rayon Sm , $S'm'$ et opérer comme dans le cas des rayons parallèles.

Quelques questions se rapportant à l'étude des antiparallèles des côtés d'un triangle ; par ÉMILE LEMOINE, ancien élève de l'École Polytechnique.

(Séance du 19 mai 1886.)

Depuis quelques années la figure formée par les intersections des côtés d'un triangle avec trois droites parallèles à ces côtés et passant par un même point a été l'objet de nombreuses études, tant en France qu'à l'étranger, à propos, par exemple, des propriétés des points de Brocard et du point de Lemoine (¹) ; nous allons nous occuper ici de la figure formée par les intersections des côtés d'un triangle avec les trois antiparallèles à ces côtés menées par un point de son plan en développant l'étude que nous avons commencée dans le *Bulletin de la Société mathématique*, t. XII, p. 72, 1883-84, et dont M. Casey (*Treatise on the analytical Geometry*) nous a fait l'honneur de reproduire quelques résultats. Nous nous servirons des coordonnées normales.

Définitions, notations et propositions préliminaires.

Par un point O (α , β , γ) du plan d'un triangle ABC je mène les antiparallèles de chaque côté :

L'antiparallèle de BC coupe BC en	1_1 ,	CA en	1_2 ,	AB en	1_3 ,
»	CA	»	2_1	2_2	» 2_3 ,
»	AB	»	3_1	3_2	» 3_3 .

Ces antiparallèles à BC, AC, AB ont respectivement pour équations

$$\begin{aligned} \xi \alpha (b\gamma + c\beta) + \eta [(b^2 - c^2)\gamma - ac\alpha] - \zeta [(b^2 - c^2)\beta + ab\alpha] &= 0, \\ -\xi [(c^2 - a^2)\gamma + bc\beta] + \eta b(c\alpha + a\gamma) + \zeta [(c^2 - a^2)\alpha - ab\beta] &= 0, \\ \xi [(a^2 - b^2)\beta - bc\gamma] - \eta [(a^2 - b^2)\alpha + ac\gamma] + \zeta c(b\alpha + a\beta) &= 0; \end{aligned}$$

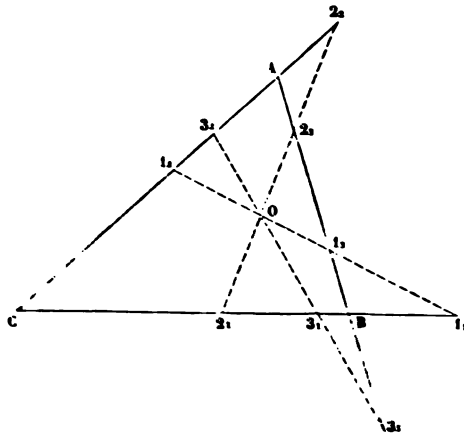
(¹) Nous rappelons que les points de Brocard O et O' dans un triangle ABC sont définis par les égalités d'angles

$$OAC = OBA = OCB, \quad O'AB = O'BC = O'CA.$$

Le point de Lemoine est le point inverse du centre de gravité ; il a par conséquent pour coordonnées normales a , b , c .

au moyen de ces équations on aurait immédiatement les coordonnées des neuf points $1_1, 1_2, 1_3, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 3_2, 3_3$.

Nous allons placer ici le Tableau des *longueurs* des principales



lignes de la figure exprimées en fonction des côtés et des distances α, β, γ du point O aux trois côtés.

Nous supposons $a > b > c$:

$$2_1 3_1, \quad 3_2 1_2, \quad 1_3 2_3$$

ont respectivement pour longueurs

$$\frac{\alpha b c \cos A}{S}, \quad \frac{\beta a c \cos B}{S}, \quad \frac{\gamma a b \cos C}{S},$$

$$1_2 1_3, \quad 2_3 2_1, \quad 3_1 3_2$$

ont respectivement pour longueurs

$$\frac{a^2 b^2 - c^2 \gamma^2}{4S}, \quad \frac{b^2 c^2 - a^2 \alpha^2}{4S}, \quad \frac{c^2 a^2 - b^2 \beta^2}{4S}.$$

On a

$$1_2 2_1 = \frac{c^2}{4S}, \quad 2_1 3_1 = \frac{a^2}{4S} - \frac{b^2}{4S} + \frac{c^2}{4S} \cos^2 A,$$

S designant comme à l'ordinaire la surface de ABC :

$$1_1 2_1 = \frac{a^2}{4S} - \frac{b^2}{4S} + \frac{c^2}{4S} \cos^2 A, \quad 1_1 3_1 = \frac{a^2}{4S} - \frac{b^2}{4S} + \frac{c^2}{4S} \cos^2 B,$$

$$1_2 3_1 = \frac{a^2}{4S} - \frac{b^2}{4S} + \frac{c^2}{4S} \cos^2 C, \quad 1_2 2_2 = \frac{a^2}{4S} - \frac{b^2}{4S} + \frac{c^2}{4S} \cos^2 A,$$

$$\begin{aligned}
 A_{12} &= \frac{c(b\gamma + c\beta)}{2S}, & A_{13} &= \frac{b(b\gamma + c\beta)}{2S}, \\
 A_{22} &= \frac{bc}{a^2 - c^2} \frac{bc\beta - (a^2 - c^2)\gamma}{2S}, & A_{23} &= \frac{cb\beta - (a^2 - c^2)\gamma}{2S}, \\
 A_{32} &= \frac{cb}{a^2 - b^2} \frac{\beta(a^2 - b^2) - bc\gamma}{2S}, & A_{33} &= \frac{bc\gamma - (a^2 - b^2)\beta}{2S}, \\
 B_{11} &= \frac{ac}{b^2 - c^2} \frac{ac\alpha - (b^2 - c^2)\gamma}{2S}, & B_{12} &= \frac{ac\alpha - (b^2 - c^2)\gamma}{2S}, \\
 B_{21} &= \frac{a(c\alpha + a\gamma)}{2S}, & B_{22} &= \frac{c(c\alpha + a\gamma)}{2S}, \\
 B_{31} &= -\frac{ac}{a^2 - b^2} \frac{ac\gamma + (a^2 - b^2)\alpha}{2S}, & B_{32} &= \frac{ac\gamma + (a^2 - b^2)\alpha}{2S}, \\
 C_{11} &= \frac{ab\alpha + (b^2 - c^2)\beta}{2S}, & C_{12} &= \frac{ab}{b^2 - c^2} \frac{ab\alpha + (b^2 - c^2)\beta}{2S}, \\
 C_{21} &= \frac{ab\beta + (a^2 - c^2)\alpha}{2S}, & C_{22} &= \frac{ab}{a^2 - c^2} \frac{ab\beta + (a^2 - c^2)\alpha}{2S}, \\
 C_{31} &= \frac{b(a\beta + b\alpha)}{2S}, & C_{32} &= \frac{a(b\alpha + a\beta)}{2S}.
 \end{aligned}$$

Les longueurs des antiparallèles à BC menées par A, B, C et terminées aux côtés opposés sont respectivement

$$\frac{abc}{b^2 - c^2}, \quad \frac{ac}{b}, \quad \frac{ab}{c}.$$

Les longueurs des antiparallèles à CA menées par A, B, C et terminées aux côtés opposés sont respectivement

$$\frac{cb}{a}, \quad \frac{abc}{a^2 - c^2}, \quad \frac{ab}{c}.$$

Les longueurs des antiparallèles à AB menées par A, B, C et terminées aux côtés opposés sont respectivement

$$\frac{bc}{a}, \quad \frac{ac}{b}, \quad \frac{abc}{a^2 - b^2}.$$

Remarque. — Si l'on considère les tangentes au cercle circonscrit menées par chaque sommet et que l'on prenne les longueurs de chaque tangente entre ce sommet et le côté opposé, l'inverse de la plus petite de ces longueurs est égal à la somme des inverses des deux autres.

Nous appellerons $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les pieds des bissectrices intérieures et $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$ les pieds des bissectrices extérieures. Les points

o, o_a, o_b, o_c seront respectivement les centres du cercle inscrit et des cercles exinscrits ; r, r_a, r_b, r_c les rayons de ces cercles ;

R le rayon du cercle circonscrit :

A', B', C' sont les points de contact de BC, CA, AB avec le cercle inscrit ;
 A'_a, B'_a, C'_a " " " exinscrit o_a ;
 A'_b, B'_b, C'_b " " " o_b ;
 A'_c, B'_c, C'_c " " " o_c ,

$\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$ les points où les droites qui joignent respectivement A, B, C au centre du cercle circonscrit coupent BC, AC, AB.

A_1, B_1, C_1 les pôles de BC, AC, AB par rapport au cercle circonscrit ou les associés respectivement en A, en B, en C du point de Lemoine (*voir* plus loin la note sur les points associés).

On trouve

$$(A) \quad \text{surf. } 1_2 2_3 3_1 = - \frac{\beta \gamma ac \cos C + \gamma \alpha ba \cos A + \alpha \beta cb \cos B}{2S},$$

$$(B) \quad \text{surf. } 1_3 2_1 3_2 = \frac{\beta \gamma ab \cos B + \gamma \alpha bc \cos C + \alpha \beta ca \cos A}{2S};$$

pour le point de Lemoine ces deux surfaces sont égales à

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{surf. } 1_1 2_2 3_3 = - \frac{\frac{16S^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} \cdot a^2 b^2 c^2}{(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)} \\ \quad \times \frac{\beta \gamma (b^2-c^2) \cos A + \gamma \alpha (c^2-a^2) \cos B + \alpha \beta (a^2-b^2) \cos C}{2S}, \\ (D) \quad \text{surf. } 1_1 2_3 3_2 = \frac{a^2}{c^2-b^2} \frac{\beta \gamma (c^2-b^2) \cos A - \gamma \alpha bc \cos C + \alpha \beta bc \cos B}{2S}, \\ \text{surf. } 2_3 1_3 3_1 2_1 1_2 3_2 = S - \frac{1}{4S} [\Sigma \alpha^2 (a^2 - 2bc \cos A) + 2 \Sigma \beta \gamma (cb - a^2 \cos A)]. \end{array} \right.$$

Construction des droites.

$$(I_a) \quad \alpha + \beta \cos C + \gamma \cos B = 0,$$

$$(I_b) \quad \alpha \cos C + \beta + \gamma \cos A = 0,$$

$$(I_c) \quad \alpha \cos B + \beta \cos A + \gamma = 0.$$

En B je mène une perpendiculaire à AB qui coupe AC en 1_b ; en C une perpendiculaire à AC qui coupe AB en 1_c ; la droite $1_b 1_c$ et la droite (I_a) se confondent. Le quadrilatère CB $1_b 1_c$ étant in-

scriptible à un cercle, on voit que (I_a) est une antiparallèle à BC. [Remarquons que (I_a) passe par A_1 , (I_b) par B_1 , (I_c) par C_1 .] Appelons 1_a le point où (I_a) coupe BC, on voit que 1_a est le conjugué harmonique de λ_a par rapport à B et à C.

De même (I_b) et (I_c) , respectivement antiparallèles à AC et à AB, donneront $2_a, 2_b, 2_c$; $3_a, 3_b, 3_c$ par leurs intersections avec les trois côtés du triangle de référence, 2_b et 3_c étant conjugués harmoniques de λ_b, λ_c .

Nous appellerons I_a, I_b, I_c les sommets du triangle formé par les droites $(I_a), (I_b), (I_c)$, I_a étant l'intersection des droites $(I_b), (I_c)$, ...

Remarques. — $A\lambda_a, B\lambda_b, C\lambda_c$ étant trois droites concourantes, $1_a, 2_b, 3_c$ sont en ligne droite; donc les deux triangles ABC, $I_a I_b I_c$ sont homologues; l'axe d'homologie $1_a 2_b 3_c$ a pour équation

$$\frac{x}{\cos A} + \frac{\beta}{\cos B} + \frac{\gamma}{\cos C} = 0;$$

Le centre d'homologie a pour coordonnées

$$\frac{1}{\cos A - \cos B \cos C}, \quad \frac{1}{\cos B - \cos C \cos A}, \quad \frac{1}{\cos C - \cos A \cos B}.$$

Construction des droites.

$$\begin{aligned} \text{C } (J_a) & \quad - (p - a)x + b\beta + c\gamma = 0, \\ \text{C } (J_b) & \quad ax - (p - b)\beta + c\gamma = 0, \\ \text{C } (J_c) & \quad ax + b\beta - (p - c)\gamma = 0. \end{aligned}$$

$(J_a), (J_b), (J_c)$ sont respectivement parallèles à BC, AC, AB; Le centre d'homothétie du triangle qu'elles forment et du triangle ABC est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

Soient

J_{ab}, J_{ac} les points où (J_a) coupe BA et CA,

J_{bc}, J_{ba} ceux où (J_b) coupe CB et AB,

J_{ca}, J_{cb} ceux où (J_c) coupe AC et BC,

$$\begin{array}{ll} A' J_{ba} \text{ et } C J_{ab} & \text{sont parallèles à } AA'_b. \\ A' J_{ca} \text{ et } B J_{ac} & \text{» à } AA'_c. \\ B' J_{cb} \text{ et } A J_{bc} & \text{» à } BB'_c. \\ B' J_{ab} \text{ et } C J_{ba} & \text{» à } BB'_a. \\ C' J_{ac} \text{ et } B J_{ca} & \text{» à } CC'_a. \\ C' J_{bc} \text{ et } A J_{cb} & \text{» à } CC'_b. \end{array}$$

d'où, pour construire (J_a) , on mène par C une parallèle à AA'_b qui coupe AB en J_{ab} ; la parallèle à BC menée par J_{ab} est la droite (J_a) ; pour avoir J_{ab} , on pourrait partir encore de B' en menant une parallèle à BB'_a ; de même on pourrait se proposer de trouver d'abord J_{ac} en partant soit de B, soit de C' et menant une parallèle soit à AA'_c , soit à CC'_a .

Nous avons aussi à nous servir des neuf droites du groupe K :

$$(K) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad p\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \\ (2) \quad (p-b)\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \\ (3) \quad (p-c)\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \\ (4) \quad a\alpha + p\beta + c\gamma = 0, \\ (5) \quad a\alpha + (p-c)\beta + c\gamma = 0, \\ (6) \quad a\alpha + (p-a)\beta + c\gamma = 0, \\ (7) \quad a\alpha + b\beta + p\gamma = 0, \\ (8) \quad a\alpha + b\beta + (p-a)\gamma = 0, \\ (9) \quad a\alpha + b\beta + (p-b)\gamma = 0, \end{array} \right.$$

qui jouissent de propriétés analogues aux droites (J_a) , (J_b) , (J_c) .

Les trois premières sont parallèles à BC ;

Les trois suivantes, à CA ;

Les trois dernières, à AB.

(1), (4) et (7) forment un triangle homothétique à ABC; le centre d'homothétie est le point r_c, r_a, r_b ;

(2), (5), (8) forment un triangle homothétique à ABC; le centre d'homothétie est le point r_a, r_b, r_c ;

(3), (6), (9) forment un triangle homothétique à ABC; le centre d'homothétie est le point r_c, r_a, r_b .

Pour étudier toutes les droites du groupe, il nous suffira d'étudier les deux types qui comprennent les neuf droites; nous prendrons, par exemple,

$$p\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$

et

$$\alpha(p-b) + b\beta + c\gamma = 0.$$

La droite $p\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ est parallèle à BC; elle coupe AC en V et AB en V'; BV et AA'_b sont parallèles, CV' et AA'_c également.

La droite $(p-b)\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ est parallèle à BC; elle coupe AC en V₁ et AB en V'₁; BV₁ et AA' sont parallèles, CV'₁ et AA'_a également.

Étude de 12 points; groupe (M).

Nous les définissons ainsi

$\alpha_0, \alpha_a, \alpha_b, \alpha_c$	sont sur BC,
$\beta_0, \beta_a, \beta_b, \beta_c$	» CA,
$\gamma_0, \gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$	» AB,
$o \alpha_0, o \beta_0, o \gamma_0$	sont respectivement perpendiculaires à Ao, Bo, Co ;
$o_a \alpha_a, o_a \beta_a, o_a \gamma_a$	» » Ao_a, Bo_a, Co_a ;
$o_b \alpha_b, o_b \beta_b, o_b \gamma_b$	» » Ao_b, Bo_b, Co_b ;
$o_c \alpha_c, o_c \beta_c, o_c \gamma_c$	» » Ao_c, Bo_c, Co_c ;

on voit alors que

H)	$A \alpha_0$ et $C'_b B'_c$	sont parallèles;	α_0	a pour coordonnées	$o, -(p-c), (p-b),$
	$B \beta_0$ et $A'_c C'_a$	»	β_0	»	$(p-c), o, -(p-a),$
	$C \gamma_0$ et $B'_a A'_b$	»	γ_0	»	$-(p-b), (p-a), o,$
	$A \alpha_a$ et $B'_b C'_c$	»	α_a	»	$o, -(p-b), (p-c),$
	$B \beta_a$ et $C' A'_b$	»	β_a	»	$(p-b), o, -p,$
	$C \gamma_a$ et $B' A'_c$	»	γ_a	»	$-(p-c), p, o,$
	$A \alpha_b$ et $C' B'_a$	»	α_b	»	$o, -(p-a), p,$
	$B \beta_b$ et $A'_a C'_c$	»	β_b	»	$(p-a), o, -(p-c),$
	$C \gamma_b$ et $A' B'_c$	»	γ_b	»	$-p, (p-c), o,$
	$A \alpha_c$ et $B' C'_a$	»	α_c	»	$o, -p, (p-a),$
	$B \beta_c$ et $A' C'_b$	»	β_c	»	$p, o, -(p-b),$
	$C \gamma_c$ et $A'_a B'_b$	»	γ_c	»	$-(p-a), (p-b), o.$

Les points $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ sont sur la droite

$$(N_0) \quad \alpha(p-a) + \beta(p-b) + \gamma(p-c) = 0;$$

les points $\alpha_a, \beta_b, \gamma_c$ sont sur la droite

$$(N'_0) \quad \frac{\alpha}{p-a} + \frac{\beta}{p-b} + \frac{\gamma}{p-c} = 0;$$

les points $\alpha_a, \beta_a, \gamma_a$ sont sur la droite

$$(N_a) \quad \alpha p + \beta(p-c) + \gamma(p-b) = 0;$$

les points $\alpha_0, \beta_c, \gamma_b$ sont sur la droite

$$(N'_a) \quad \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p-c} + \frac{\gamma}{p-b} = 0.$$

On aurait de même les droites $(N_b), (N'_b), (N_c), (N'_c)$.

Le point d'intersection N_a de (N_b) et de (N_c) est

$$-(b+c), \quad b \cos C, \quad c \cos B;$$

le point d'intersection N'_a de (N'_b) et de (N'_c) est

$$-(b+c) \tan^2 \frac{A}{2}, \quad b \cos C, \quad c \cos B;$$

le point d'intersection N_{oa} de (N_o) et de (N_a) est

$$(b-c), \quad -b \cos C, \quad c \cos B;$$

le point d'intersection N'_{oa} de (N'_o) et de (N'_a) est

$$(b-c) \cot^2 \frac{A}{2}, \quad -b \cos C, \quad c \cos B;$$

on aurait de même les points $N_b, N'_b, N_c, N'_c, N_{ob}, N'_{ob}, N_{oc}, N'_{oc}$.

Les deux triangles $ABC, N_a N_b N_c$ sont homologues; l'axe d'homologie est (N'_o) et le centre d'homologie a pour coordonnées $\tan A, \tan B, \tan C$, qui est aussi le centre d'homologie de ABC et de $N'_a N'_b N'_c$. Les deux triangles $ABC, N_{oa} N_{ob} N_{oc}$ sont homologues; l'axe d'homologie est (N'_c) , le centre d'homologie est $\tan A, \tan B, -\tan C$ qui est aussi le centre d'homologie de ABC et de $N'_{oa} N'_{ob} N'_{oc}$, de même pour $ABC, N_{oa} N_b N_{oc}, ABC, N'_{oa} N'_b N'_{oc}, \dots$

Remarque. — Le centre d'homologie des deux triangles $ABC, N_{oa} N_{ob} N_{oc}$ est le point associé en A ⁽¹⁾ du centre d'homologie des

(¹) Nous avons montré, à diverses reprises, l'importance de la notion des points associés dans la géométrie du triangle. Voici les définitions et quelques propriétés.

Le point O ayant pour coordonnées α, β, γ aura respectivement les points $O_a: -\alpha, \beta, \gamma; O_b: \alpha, -\beta, \gamma; O_c: \alpha, \beta, -\gamma$ pour points associés en A, en B et en C.

Une courbe est simplement associée à elle-même en A, si elle est le lieu du point O en même temps que le lieu du point O_a .

Si une courbe est doublement associée à elle-même, par exemple en A et en B, elle l'est aussi en C, c'est-à-dire qu'elle est triplement associée à elle-même.

Une courbe de degré impair ne peut être doublement associée à elle-même, à moins qu'un des côtés du triangle de référence ne fasse partie de la courbe.

Une conique, qui est elle-même triplement son associée, a évidemment une équation de la forme $Lx^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0$, c'est-à-dire :

1° Qu'elle ne peut couper à la fois en des points réels les trois côtés du triangle de référence;

2° Que les deux points d'intersection d'un côté du triangle de référence avec

deux triangles ABC, $N_a N_b N_c$; nous avons déjà rencontré ce point (voir *Bulletin de la Société mathématique*, p. 76; 1884).

Lemme. — Soit une circonférence tangente à deux droites X et Y. Je mène une tangente à cette circonférence qui coupe X en x , Y en y ; par x je mène une parallèle à une direction donnée λ , par y une parallèle à une direction donnée μ : ces deux droites se rencontrent en O. Le lieu de O, si la tangente varie, est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à λ et à μ .

Nous n'insistons pas sur la démonstration fort simple de ce lemme.

A. Supposons que le cercle soit le cercle inscrit :

1° Prenons pour droites X et Y les deux côtés AB et AC du triangle de référence et pour λ et μ les antiparallèles à AB et à AC.

L'hyperbole lieu de O aura pour équation

$$(P_a) \quad \begin{cases} 0 = -\alpha^2(p-a) + \beta^2(p-b) + \gamma^2(p-c) \\ \quad + (2p \cos A - b - c)\beta\gamma + (c-a)\alpha\gamma + (b-a)\alpha\beta. \end{cases}$$

2° Prenons BC et BA pour droites X et Y et pour λ et μ les antiparallèles à BA et à BC.

L'hyperbole lieu de O aura pour équation

$$(P_b) \quad \begin{cases} 0 = \alpha^2(p-a) - \beta^2(p-b) + \gamma^2(p-c) \\ \quad + (c-b)\beta\gamma + (2p \cos B - a - c)\alpha\gamma + (a-b)\alpha\beta. \end{cases}$$

3° Prenons CA et CB pour droites X et Y et pour λ et μ les antiparallèles à CB et à CA.

cette conique sont conjugués harmoniques par rapport aux deux sommets qui sont sur ce côté.

Si une parabole est à elle-même triplement son associée, son équation a l'une des trois formes

$$\begin{aligned} -\alpha^2\alpha^2\lambda + (b^2 + c^2\lambda)(\gamma^2 + \lambda\beta^2) &= 0, \\ -\beta^2b^2\lambda + (c^2 + \alpha^2\lambda)(\alpha^2 + \lambda\gamma^2) &= 0, \\ -\gamma^2c^2\lambda + (\alpha^2 + b^2\lambda)(\beta^2 + \lambda\alpha^2) &= 0; \end{aligned}$$

elle est inscrite dans le triangle qui a pour sommets les milieux des côtés du triangle de référence.

Si une hyperbole équilatère est à elle-même triplement son associée, elle passe par les quatre centres des cercles tangents aux trois côtés du triangle de référence et réciproquement.

L'hyperbole lieu de O aura pour équation

$$(P_c) \quad \begin{cases} 0 = \alpha^2(p-a) + \beta^2(p-b) - \gamma^2(p-c) \\ \quad + (b-c)\beta\gamma + (a-c)\alpha\gamma + (2p \cos C - a-b)\alpha\beta. \end{cases}$$

(P_a) coupe AC et AB aux pieds β₁, γ₁ des bissectrices intérieures;

(P_a) coupe encore AC et AB en β₀, γ₀;

(P_a) passe par A₁ et a pour asymptotes des antiparallèles à AB et à AC.

Les hyperboles (P_b), (P_c) jouissent de propriétés analogues.

B. Supposons que le cercle soit le cercle exinscrit o_a.

1° Prenons AB et AC pour X et Y et pour λ et μ les antiparallèles à AC et à AB.

L'hyperbole lieu de O aura pour équation

$$(P'_a) \quad \begin{cases} 0 = \alpha^2 p + \beta^2(p-c) + \gamma^2(p-b) \\ \quad - [2(p-a) \cos A - b-c] \gamma\beta + (c+a)\alpha\gamma + (a+b)\alpha\beta. \end{cases}$$

2° Prenons BC et BA pour X et Y et pour λ et μ les antiparallèles à AB et à BC.

L'hyperbole lieu de O aura pour équation

$$(P'_b) \quad \begin{cases} 0 = \alpha^2 p + \beta^2(p-c) - \gamma^2(p-b) + (c-b)\gamma\beta \\ \quad + [2(p-a) \cos B + c-a] \alpha\gamma + (a+b)\alpha\beta. \end{cases}$$

3° Prenons CA et CB pour X et Y et pour λ et μ les antiparallèles à CB et CA.

L'hyperbole lieu de O aura pour équation

$$(P'_c) \quad \begin{cases} 0 = \alpha^2 p - \beta^2(p-c) + \gamma^2(p-b) \\ \quad + (b-c)\beta\gamma + (c+a)\alpha\gamma + [2(p-a) \cos C + b-a] \alpha\beta. \end{cases}$$

C. Supposons que le cercle soit le cercle exinscrit o_b, on aura de même :

1° AB et AC pris pour X et Y, les antiparallèles à A et à B pour λ et μ,

$$(P''_a) \quad \begin{cases} 0 = \alpha^2(p-c) + \beta^2 p - \gamma^2(p-a) \\ \quad + [2(p-b) \cos A + c-b] \gamma\beta + (c-a)\alpha\gamma + (a+b)\alpha\beta; \end{cases}$$

2° BA et BC pris pour X et Y ; les antiparallèles à BC et à BA

pour λ et μ ,

$$(P'_b) \quad \begin{cases} 0 = x^2(p-c) + \beta^2 p + \gamma^2(p-a) + (c+b)\gamma\beta \\ \quad - [2(p-b)\cos B - c-a]x\gamma + (a+b)\alpha\beta; \end{cases}$$

3° CA et CB pris pour X et Y; les antiparallèles à CB et CA pour λ et μ ,

$$(P'_c) \quad \begin{cases} 0 = -x^2(p-c) + \beta^2 p + \gamma^2(p-a) \\ \quad + (c+b)\gamma\beta + (a-c)x\gamma + [2(p-b)\cos C + a-b]\alpha\beta. \end{cases}$$

D. Supposons que le cercle soit le cercle exinscrit o_c , on aura enfin :

1° AB et AC pris pour X et Y; les antiparallèles à AC et à AB pour λ et μ ,

$$(P''_a) \quad \begin{cases} 0 = x^2(p-b) - \beta^2(p-a) + \gamma^2 p \\ \quad + [2(p-c)\cos A + b-c]\beta\gamma + (a+c)x\gamma + (b-a)\alpha\beta; \end{cases}$$

2° BA et BC pris pour X et Y les antiparallèles à BC et à BA pour λ et μ ,

$$(P''_b) \quad \begin{cases} 0 = -x^2(p-b) + \beta^2(p-a) + \gamma^2 p + (b+c)\beta\gamma \\ \quad + [2(p-c)\cos B + a-c]x\gamma + (a-b)\alpha\beta, \end{cases}$$

3° CA et CB pris pour X et Y; les antiparallèles à CB et à CA pour λ et μ ,

$$(P''_c) \quad \begin{cases} 0 = x^2(p-b) + \beta^2(p-a) + \gamma^2 p + (b+c)\beta\gamma \\ \quad + (a+c)x\gamma - [2(p-c)\cos C - a-b]\alpha\beta. \end{cases}$$

(P'_a) a pour asymptotes des antiparallèles à AB et à AC, coupe AB en γ_a et en γ'_1 , AC en β_a et en β'_1 et passe par A_1 .

(P'_b) a pour asymptotes des antiparallèles à AB et à BC, coupe BC en α_a et en α_1 , AB en γ_a et en γ'_1 et passe par B_1 ; de même

(P'_c) a pour asymptotes des antiparallèles à CA et à CB, coupe CA en β_a et β'_1 , CB en α_1 et α_a et passe par C_1 .

Il n'est pas nécessaire d'insister sur les courbes (P'_a), (P'_b), (P'_c), (P''_a), (P''_b), (P''_c) qui jouissent de propriétés analogues.

PROBLÈME I. — *Trouver le lieu du point O, tel que les trois points 1_1 , 2_2 , 3_3 soient en ligne droite.*

Il suffit d'exprimer que la surface du triangle $1_1 2_2 3_3$ est nulle.

La formule (C) nous donne

$$(1) \quad \beta\gamma(b^2 - c^2) \cos A + \alpha\gamma(c^2 - a^2) \cos B + \alpha\beta(a^2 - b^2) \cos C = 0;$$

c'est une hyperbole *équilatère* circonscrite au triangle ABC. Elle passe par le point de Lemoine et a pour inverse la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au centre de gravité.

Le centre de l'hyperbole (1) a pour coordonnées

$$\cos A \sin^2(B - C), \quad \cos B \sin^2(C - A), \quad \cos C \sin^2(A - B).$$

La tangente à cette courbe au point de Lemoine passe par le point $a \tan A$, $b \tan B$, $c \tan C$ ou

$$\frac{a^2}{\cos A}, \quad \frac{b^2}{\cos B}, \quad \frac{c^2}{\cos C},$$

et a pour équation

$$\sum \alpha \frac{\sin(B - C)}{\tan A} = 0;$$

Remarque I. — Si O est le point de Lemoine, la droite $1_1, 2_2, 3_3$ a pour équation

$$\sum \frac{\alpha}{a \tan A} = 0;$$

nous savons que les six points $1_2, 1_3, 2_1, 2_3, 3_1, 3_2$ sont alors sur un cercle, que $3_2, 2_3, 1_3, 3_1, 2_1, 1_2$ sont respectivement parallèles à BC, AC, AB et proportionnels à $\cos A, \cos B, \cos C$.

Remarque II. — Si, pour trouver le lieu, nous nous étions servi du théorème de Ménélaüs qui donne

$$\frac{1_1 B}{1_1 C} \frac{2_2 C}{2_2 A} \frac{3_3 A}{3_3 B} = 1,$$

nous aurions trouvé une équation du troisième degré en α, β, γ , mais contenant le facteur $a\alpha + b\beta + c\gamma$ qui, égalé à zéro, représente la droite de l'infini; ce facteur étant enlevé, on trouve naturellement l'équation (1).

PROBLÈME II. — *Trouver le lieu du point O, tel que les trois points $1_3, 2_1, 3_2$ soient en ligne droite.*

La formule (B) nous donne immédiatement

$$(2) \quad \beta\gamma ab \cos B + \gamma\alpha bc \cos C + \alpha\beta ca \cos A = 0,$$

qui représente une conique circonscrite à ABC.

PROBLÈME III. — *Trouver le lieu du point O, tel que les trois points $1_2, 2_3, 3_1$ soient en ligne droite.*

La formule (A) nous donne immédiatement

$$(3) \quad \beta\gamma ac \cos C + \gamma\alpha ba \cos A + \alpha\beta cb \cos B = 0$$

qui représente une conique circonscrite à ABC.

Remarque. — Si trois points (pris chacun sur un côté différent de ABC) parmi les neuf points $1_1, 1_2, 1_3, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 3_2, 3_3$ sont en ligne droite, les six autres sont sur une conique ; cela permet d'énoncer autrement les problèmes I, II, III et V.

PROBLÈME IV. — *Trouver le lieu des points O pour lesquels les deux triangles $1_2 2_3 3_1, 1_3 2_1 3_2$ sont équivalents.*

1° On peut pour cela écrire que les expressions (A) et (B) sont égales, ce qui donnera le lieu qui a pour équation

$$\alpha\beta\gamma(\sin 2B - \sin 2C) + b\gamma\alpha(\sin 2C - \sin 2A) + c\alpha\beta(\sin 2A - \sin 2B);$$

on la met facilement sous la forme

$$\beta\gamma(b^2 - c^2) \cos A + \gamma\alpha(c^2 - a^2) \cos B + \alpha\beta(a^2 - b^2) \cos C = 0,$$

c'est-à-dire l'équation (1).

On a donc ce théorème :

THÉORÈME I. — *Si les trois points $1_1, 2_2, 3_3$ sont en ligne droite les triangles $1_2 2_3 3_1, 1_3 2_1 3_2$ sont équivalents.*

2° On peut aussi écrire que les deux expressions (A) et (B) ont une somme égale à zéro.

Ce qui donne la conique

$$(4) \quad \Sigma \alpha\beta\gamma(b \cos B + c \cos C) = 0,$$

qui passe par le point

$$\frac{1}{(c^2 - b^2) \cos A}, \quad \frac{1}{(a^2 - c^2) \cos B}, \quad \frac{1}{(b^2 - a^2) \cos C}.$$

Remarque I. — Il est facile de voir que les quatre coniques

(1), (2), (3), (4) passent au point

$$\frac{a}{a^2 \cos^2 A - bc \cos B \cos C},$$

$$\frac{b}{b^2 \cos^2 B - ca \cos C \cos A},$$

$$\frac{c}{c^2 \cos^2 C - ab \cos A \cos B}$$

ou

$$\frac{\sin A}{\sin^2 A - \sin^2 B \sin^2 C}, \dots$$

et que pour ce point les trois groupes $1_1, 2_2, 3_3; 1_2, 2_1, 3_2; 1_3, 2_3, 3_1$ sont formés chacun de trois points en ligne droite.

PROBLÈME V. — *Trouver le point O pour lequel les trois points $1_1, 2_3, 3_2$ sont en ligne droite.*

La formule (D) nous donne comme équation du lieu

$$(5) \quad \beta\gamma(c^2 - b^2) \cos A - \gamma\alpha bc \cos C + \alpha\beta bc \cos B = 0;$$

de même, les trois points $2_2, 1_3, 3_1$ seront en ligne droite si O décrit le lieu

$$(6) \quad \beta\gamma ac \cos C + \gamma\alpha(a^2 - c^2) \cos B - \alpha\beta ac \cos A = 0,$$

et les trois points $3_3, 2_1, 1_2$ seront en ligne droite si O décrit le lieu

$$(7) \quad -\beta\gamma ab \cos B + \gamma\alpha ab \cos A + \alpha\beta(b^2 - a^2) \cos C = 0;$$

en ajoutant (5), (6), (7) membre à membre, on trouve une identité; donc ces trois coniques se coupent en un même point pour lequel les points $1_1, 2_3, 3_2; 2_2, 1_3, 3_1; 3_3, 2_1, 1_2$ forment trois groupes de trois points en ligne droite.

Ce point a pour coordonnées

$$\frac{\sin A}{\sin^2 A \sin^2 B + \sin^2 A \sin^2 C - \sin^2 B \sin^2 C},$$

$$\frac{\sin B}{\sin^2 B \sin^2 C + \sin^2 B \sin^2 A - \sin^2 A \sin^2 C},$$

$$\frac{\sin C}{\sin^2 C \sin^2 A + \sin^2 C \sin^2 B - \sin^2 A \sin^2 B}.$$

PROBLÈME VI. — *Trouver le point O pour lequel les trois longueurs O_1, O_2, O_3 sont égales.*

En nous reportant aux expressions de ces longueurs données précédemment, on voit que cette égalité a lieu pour le point T

$$\frac{b^2 - c^2}{a}, \quad \frac{c^2 - a^2}{b}, \quad \frac{a^2 - b^2}{c}$$

et pour les trois associés ⁽¹⁾ T_a, T_b, T_c.

Le point T étant à l'infini, il ne reste que les trois points T_a

$$-\frac{b^2 - c^2}{a}, \quad \frac{c^2 - a^2}{b}, \quad \frac{a^2 - b^2}{c},$$

T_b, T_c.

On a alors, pour le point T_a;

$${}_1T_a = \frac{abc}{b^2 - c^2};$$

pour le point T_b,

$${}_1T_b = \frac{abc}{a^2 - c^2};$$

pour le point T_c,

$${}_1T_c = \frac{abc}{a^2 - b^2}.$$

Remarque I. — Ces longueurs sont respectivement égales à la partie de la tangente au cercle circonscrit comprise entre le sommet et le côté opposé.

Remarque II. — Les expressions données en fonction de α, β, γ des diverses lignes de la figure nous permettent d'écrire immédiatement le lieu du point O qui correspond à une relation donnée entre ces lignes; elles permettent aussi d'établir (par exemple, en se servant de l'identité $2S = a\alpha + b\beta + c\gamma$) une série d'autres identités et aussi d'énoncer un grand nombre de théorèmes. En voici quelques exemples :

1. *Quel que soit O, on a*

$$\begin{aligned} abc &= O_1(b^2 - c^2) + O_2(c^2 - a^2) + O_3(a^2 - b^2), \\ abc &= a^2 O_3 + b^2 O_1 + c^2 O_2 = a^2 O_2 + b^2 O_3 + c^2 O_1, \\ O_1 \times O_2 \times O_3 &= O_1 \times O_2 \times O_3. \end{aligned}$$

(¹) Voir précédemment la Note sur les points associés.

2. Le point O, pour lequel on a

$$\frac{O I_1}{b^2 - c^2} = \frac{O I_2}{c^2 - a^2} = \frac{O I_3}{a^2 - b^2},$$

est tel que $\overline{O I_1}^2 + \overline{O I_2}^2 + \overline{O I_3}^2$ est un minimum.

Les coordonnées de ce point O sont

$$\frac{(b^2 - c^2)^2}{a}, \quad \frac{(c^2 - a^2)^2}{b}, \quad \frac{(a^2 - b^2)^2}{c}.$$

3. Pour tous les points d'une même parallèle à l'axe d'homologie du triangle ABC et du triangle formé par les pieds des symmédianes, on a

$$I_2 I_3 + 2_2 2_1 + 3_1 3_2 = \text{const.}$$

etc., etc.

PROBLÈME VII. — Trouver le lieu des points O pour lesquels I_1, I_3, O, I_2 forment une division harmonique.

En écrivant les valeurs des rapports au moyen des expressions précédemment données des longueurs $I_3 I_1, I_3 I_2, O I_1, O I_2$, on a

$$\frac{2(c^2 - b^2)}{a\alpha} - \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} = 0:$$

c'est une hyperbole circonscrite à ABC; elle passe par le point de l'infini $-\frac{2}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$; c'est-à-dire qu'elle a une asymptote parallèle à la médiane partant de A.

THÉORÈME II. — Si le point O décrit une hyperbole circonscrite au triangle ABC et qui ait une asymptote antiparallèle à BC, le rapport anharmonique des quatre points comprenant O et les trois points où l'antiparallèle à BC menée par O coupe les trois côtés est constant.

PROBLÈME VIII. — Trouver les points O du plan pour lesquels l'hexagone $2_1 3_1 1_3 2_3 3_2 1_2$ est circonscriptible à un cercle.

Ce cercle ne peut être que l'un des quatre cercles inscrits dans le triangle ABC; il y aura quatre points O donnant une solution du problème; appelons H_0 celui de ces points qui correspond au cercle inscrit, H_a, H_b, H_c ceux qui correspondent respectivement aux cercles exinscrits o_a, o_b, o_c .

Cherchons d'abord le point H_0 : puisque $H_0 2_3$ et $H_0 3_2$ sont antiparallèles à AC et à AB et que $2_3 3_2$ doit être tangente au cercle inscrit, il est évident que H_0 appartient à l'hyperbole (P_a) ; de même H_0 appartient à (P_b) et à (P_c) .

Le problème revient à chercher le point commun à ces trois hyperboles ou par conséquent à deux d'entre elles.

Si l'on ajoute (P_b) , (P_c) , on voit que H_0 sera sur la droite

$$(8) \quad \alpha(p - a) + \beta(p \cos C - b) + \gamma(p \cos B - c) = 0;$$

il sera de même sur les droites

$$(9) \quad \alpha(p \cos C - a) + \beta(p - b) + \gamma(p \cos A - c) = 0,$$

$$(10) \quad \alpha(p \cos B - a) + \beta(p \cos A - b) + \gamma(p - c) = 0.$$

L'équation (8) peut s'écrire

$$p(\alpha + \beta \cos C + \gamma \cos B) - (\alpha a + \beta b + \gamma c) = 0,$$

par conséquent (8) est parallèle à l'antiparallèle (I_a) à BC : c'est donc l'antiparallèle à BC passant par H_0 .

Donc les intersections de (8), diagonale de l'hexagone cherché, avec AC et AB, seront les sommets 1_2 et 1_3 de cet hexagone.

De même (9) et (10) représentent les diagonales $2_1 2_3$ et $3_1 3_2$.

Calculons les coordonnées de H_0 .

Il suffit évidemment de résoudre deux des équations (8), (9) et (10), mais les résultats ne se présentant pas immédiatement sous une forme symétrique, nous allons procéder autrement.

En retranchant deux à deux les trois équations (8), (9) et (10), on trouve

$$(11) \quad -\alpha(1 - \cos B) + \beta(\cos A - \cos C) + \gamma(1 - \cos B) = 0,$$

$$(12) \quad \alpha(1 - \cos C) - \beta(1 - \cos C) + \gamma(\cos B - \cos A) = 0,$$

$$(13) \quad \alpha(\cos C - \cos B) + \beta(1 - \cos A) - \gamma(1 - \cos A) = 0,$$

qui représentent trois droites passant en H_0 ; en tirant de deux d'entre elles les valeurs α , β , γ , on trouve facilement pour ces coordonnées

$$(1 - \cos A)(1 + \cos A - \cos B - \cos C),$$

$$(1 - \cos B)(1 + \cos B - \cos A - \cos C),$$

$$(1 - \cos C)(1 + \cos C - \cos A - \cos B),$$

ou

$$ar_a(2R - r_a), \quad br_b(2R - r_b), \quad cr_c(2R - r_c)$$

ou

$$ar_a(br_b + cr_c - ar_a), \quad br_b(ar_a + cr_c - br_b), \quad cr_c(ar_a + br_b - cr_c).$$

Construction géométrique du point H_0 .

PREMIÈRE CONSTRUCTION.

La droite (8) peut se mettre sous la forme

$$(p - a)\alpha - b\beta - c\gamma + p(\beta \cos C + \gamma \cos B) = 0;$$

c'est donc l'antiparallèle à BC qui passe par le point d'intersection des deux droites

$$\beta \cos C + \gamma \cos B = 0;$$

c'est-à-dire A_{1a} ,

$$-(p - a)\alpha + b\beta + c\gamma = 0;$$

c'est-à-dire (J_a) .

Donc pour construire (8) on joint A_{1a} ; on mène par C une parallèle à BB'_a , parallèle qui coupe AB en un point par lequel on mène une parallèle à BC; cette parallèle coupe A_{1a} en un point par lequel on mène l'antiparallèle à BC: c'est la droite (8).

On construit de même soit (9), soit (10), et le point H_0 est déterminé.

SECONDE CONSTRUCTION.

Au lieu de construire deux des droites (8), (9) et (10) comme cela se présente le plus naturellement à l'idée, il est plus simple de construire deux des droites (11), (12), (13).

(11) peut s'écrire

$$(\gamma + \beta \cos A + \alpha \cos B) - (\alpha + \beta \cos C + \gamma \cos B) = 0:$$

donc (11) passe par I_b , intersection des deux droites (I_c) et (I_a) ; mais (11) coupe AC au pied β_1 de la bissectrice de l'angle CBA: donc la droite (11) est la droite $\beta_1 I_b$, de même (12) est la droite $\gamma_1 I_c$ et (13) est la droite $\alpha_1 I_a$; donc:

THÉOREME III. — *Les trois droites $\alpha_1 I_a$, $\beta_1 I_b$, $\gamma_1 I_c$ se coupent au point H_0 .*

Remarque. — La tangente $1_2 2_1$ au cercle inscrit a pour équation

$$\alpha \frac{p-a}{c-p \cos B} + \beta \frac{p-b}{c-p \cos A} - \gamma = 0.$$

Cherchons maintenant le point H_a .

On verrait de même, par les considérations qui nous ont servi pour le point H_b , que H_a est le point commun aux trois hyperboles (P'_a) , (P'_b) , (P'_c) ou encore le point commun à leurs intersections deux à deux, c'est-à-dire le point commun aux droites

$$(8') \quad \alpha p + \beta[(p-a) \cos C + b] + \gamma[(p-a) \cos B + c] = 0,$$

$$(9') \quad \alpha[(p-a) \cos C - a] - \beta(p-c) + \gamma[(p-a) \cos A - c] = 0,$$

$$(10') \quad \alpha[(p-a) \cos B - a] + \beta[(p-a) \cos A - b] - \gamma(p-b) = 0;$$

(8') peut s'écrire

$$\alpha p + \beta p \cos c + \gamma p \cos B + \beta(b - a \cos C) + \gamma(C - a \cos B) = 0$$

ou

$$p(\alpha + \beta \cos C + \gamma \cos B) + \cos A(\beta c + \gamma b) = 0;$$

comme les deux droites $\alpha + \beta \cos C + \gamma \cos B = 0$ et $\beta c + \gamma b = 0$ sont des antiparallèles à BC, on voit que (8') est antiparallèle à BC.

(8') donne donc par ses intersections avec AC et AB les points 1_2 , 1_3 de l'hexagone cherché : elle est une de ses diagonales.

(9') peut s'écrire

$$(p-a)(\alpha \cos C + \beta + \gamma \cos A) - (a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0,$$

ce qui prouve qu'elle est parallèle à (I_b) , c'est-à-dire antiparallèle à AC; de même (10') est antiparallèle à BC; (9') et (10') sont donc aussi des diagonales de l'hexagone cherché.

Calcul des coordonnées de H_a .

Des équations (8'), (9') et (10) on déduit, en retranchant (10') de (9') et divisant par $(p-a)$,

$$(11') \quad \alpha(\cos C - \cos B) + \beta(1 - \cos A) - \gamma(1 - \cos A) = 0.$$

En ajoutant (8') et (9'), puis divisant par $(p-a)$,

$$(12') \quad \alpha(1 + \cos C) + \beta(1 + \cos C) + \gamma(\cos A + \cos B) = 0.$$

En ajoutant (8') et (10'), puis divisant par $(p - a)$,

$$(13') \quad \alpha(1 + \cos B) + \beta(\cos A + \cos C) + \gamma(1 + \cos B) = 0;$$

de deux des équations (11'), (12'), (13') on déduit facilement pour les coordonnées de H_a

$$\begin{aligned} &-(1 - \cos A)(1 + \cos A + \cos B + \cos C), \\ &(1 + \cos B)(1 - \cos A - \cos B + \cos C), \\ &(1 + \cos C)(1 - \cos A + \cos B - \cos C), \end{aligned}$$

ou

$$-ar(2R + r), \quad br_c(2R - r_c), \quad cr_b(2R - r_b).$$

Remarquons en passant les identités

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &= 1 + \frac{r}{R}, \\ \cos B + \cos C - \cos A &= \frac{r_a}{R} - 1, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \cos B + \cos C &= \frac{r + r_a}{2R}, \\ \cos A &= 1 - \frac{r_a - r}{2R}. \end{aligned}$$

L'équation (11') et l'équation (13') sont identiques, cela prouve que

$$\alpha(\cos C - \cos B) + \beta(1 - \cos A) - \gamma(1 - \cos A) = 0$$

est l'équation de la droite H_oH_a , celles de H_oH_b , H_oH_c seront donc respectivement

$$\begin{aligned} &-\alpha(1 - \cos B) + \beta(\cos A - \cos C) + \gamma(1 - \cos B) = 0, \\ &\alpha(1 - \cos C) - \beta(1 - \cos C) + \gamma(\cos B - \cos A) = 0. \end{aligned}$$

Si nous cherchons à déterminer H_b , nous trouverions trois équations analogues à (11'), (12'), (13'), parmi lesquelles se retrouvera

$$\alpha(1 + \cos C) + \beta(1 + \cos C) + \gamma(\cos A + \cos B) = 0;$$

c'est-à-dire (12').

Cette équation est donc l'équation de H_aH_b ; de même H_aH_c , H_bH_c ont pour équations

$$\begin{aligned} &\alpha(1 + \cos B) + \beta(\cos A + \cos C) + \gamma(1 + \cos B) = 0, \\ &\alpha(\cos B + \cos C) + \beta(1 + \cos A) + \gamma(1 + \cos A) = 0. \end{aligned}$$

Construction géométrique du point H_a .

PREMIÈRE CONSTRUCTION.

(8') peut s'écrire

$$\alpha p + \beta b + \gamma c + (p - a)(\beta \cos C + \gamma \cos B) = 0;$$

par conséquent, elle passe par le point d'intersection de

$$\alpha p + \beta b + \gamma c = 0,$$

première droite du groupe K avec A_{1a} .

Donc, pour construire (8'), on joint A_{1a} ; on mène par C une parallèle à AA'_c qui coupe AB en un point par lequel on mène une parallèle à BC; cette parallèle coupe A_{1a} en un point par lequel on mène l'antiparallèle à BC. C'est la droite (8').

Construction de (9') et de (10') : (9') et (10') peuvent s'écrire

$$(p - a)(\alpha \cos C + \gamma \cos A) - [\alpha a + \beta(p - c) + \gamma c] = 0,$$

$$(p - a)(\alpha \cos B + \beta \cos A) - [\alpha a + \beta b + \gamma(p - b)] = 0;$$

elles peuvent donc se construire par les droites B_{2b} , C_{3c} la cinquième et la neuvième du groupe K.

SECONDE CONSTRUCTION.

Au lieu des droites (8'), (9'), (10'), nous allons employer les droites (11'), (12'), (13').

(11') passe en α_1 , mais son équation peut s'écrire

$$\alpha \cos C + \beta + \gamma \cos A - (\alpha \cos B + \beta \cos A + \gamma) = 0,$$

elle passe donc par I_a :

(11') est donc $\alpha_1 I_a$; on verrait de même que (12') est la droite $\gamma'_1 I_c$ et (13') la droite $\beta'_1 I_b$.

On a donc ce théorème :

THÉORÈME IV. — *Les trois droites $\alpha_1 I_a$, $\beta'_1 I_b$, $\gamma'_1 I_c$ se coupent en H_a .*

On trouverait de même les points H_b , H_c .

ABC et $H_a H_b H_c$ sont homologues, l'axe d'homologie est la droite $\alpha'_1 \beta'_1 \gamma'_1$, ou $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Le centre d'homologie est le point

$$\frac{a}{r_a(2R - r_a)}, \quad \frac{b}{r_b(2R - r_b)}, \quad \frac{c}{r_c(2R - r_c)}.$$

ABC et $H_b H_a H_c$ sont homologues ; l'axe d'homologie est la droite α, β, γ ou $\alpha + \beta - \gamma = 0$.

Le centre d'homologie a pour coordonnées

$$-\frac{a}{r_b(2R - r_b)}, \quad -\frac{b}{r_a(2R - r_a)}, \quad \frac{c}{r(2R + r)},$$

etc., etc.

Énonçons pour terminer le théorème suivant dont la démonstration est facile.

THÉORÈME V. — Soit ω l'un des quatre centres des cercles tangents aux côtés du triangle A, B, C (l'un de ces centres est le centre du cercle circonscrit à ABC ; les trois autres forment un triangle directement semblable à ABC ; le centre de similitude est l'orthocentre de ABC, et le rapport de similitude $2 \cos A \cos B \cos C$), si par ω on mène les trois antiparallèles aux côtés, les trois distances d'un sommet de ABC à l'antiparallèle du côté opposé sont égales entre elles.

Sur la racine carrée des nombres ; par M. WEILL.

(Séance du 16 juin 1886.)

Soit l'équation $x^2 - n = 0$, n étant un nombre positif et a un nombre plus grand que $\sqrt{n}$. Le nombre a_1 , donné par la relation

$$a_1 = \frac{a^2 + n}{2a},$$

approche plus de $\sqrt{n}$ que a , et dans le même sens ; de même pour $a_2 = \frac{a_1^2 + n}{2a_1}$. Cherchons l'expression de a_p . Posons

$$a_1 = a^2 + nb^2, \quad b_1 = 2ab,$$

d'où

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 \sqrt{n} &= (a + b \sqrt{n})^2, \\ a_2 + b_2 \sqrt{n} &= (a_1 + b_1 \sqrt{n})^2 = (a + b \sqrt{n})^{2^2}, \\ &\dots\dots\dots, \\ a_p + b_p \sqrt{n} &= (a + b \sqrt{n})^{2^p}. \end{aligned}$$

Posant $2^p = h$, il vient

$$a_p = \frac{a^h + C_h^2 n . a^{h-2} + C_h^4 n^2 a^{h-4} + \dots}{C_h^1 a^{h-1} + C_h^3 n . a^{h-3} + \dots}.$$

Lorsque h augmente indéfiniment, les nombres tels que a_p vont en décroissant constamment et tendent vers la limite $\sqrt{n}$.

Considérons, d'autre part, la substitution itérative

$$a_1 = \frac{a^3 + 3an}{3a^2 + n},$$

où a est un nombre positif plus petit que $\sqrt{n}$. En effectuant cette substitution p fois de suite, on aura une suite de nombres croissants, inférieurs à $\sqrt{n}$, et ayant pour limite $\sqrt{n}$; l'expression de a_p est, en posant $3^p = h$, identique à l'expression posée plus haut; il en résulte que, h croissant indéfiniment, la limite de a_p est $\sqrt{n}$, quel que soit le nombre a d'où l'on est parti.

En posant $z = \frac{\sqrt{n}}{a}$, on trouve

$$a_p = \frac{1 + C_h^2 z^2 + C_h^4 z^4 + \dots}{C_h^1 z + C_h^3 z^3 + \dots} \sqrt{n} = \sqrt{n} \frac{(1+z)^h + (1-z)^h}{(1+z)^h - (1-z)^h},$$

et cette expression confirme le résultat trouvé.

Revenant à la première substitution et posant

$$a = \lambda i \sqrt{n},$$

$$a_1 = \lambda_1 i \sqrt{n},$$

il vient

$$-\lambda_1 = \frac{1-\lambda^2}{2\lambda};$$

par suite, en faisant $\lambda = \tan x$, $\lambda_1 = \tan x_1$, on a

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x + \frac{\pi}{2}, \\ x_2 &= 4x + \pi + \frac{\pi}{2}, \\ x_3 &= 8x + \frac{7\pi}{2}, \\ &\dots\dots\dots, \\ x_p &= 2 \cdot 2^p + \frac{\pi}{2} (2^p - 1), \end{aligned}$$

d'où une nouvelle expression de a_p .

Si l'on suppose, dans les résultats précédents, que a et n désignent des nombres entiers, on voit que l'on obtient des valeurs approchées de $\sqrt{n}$, les unes par excès, les autres par défaut, exprimées par le quotient de deux nombres entiers. On arrive à un résultat analogue en partant d'une autre expression de valeurs approchées. Soient a et b deux nombres positifs, $a < b$, et comprenant $\sqrt{n}$; soit

$$b_1 = \frac{n + ab}{a + b},$$

et effectuons p fois de suite cette substitution, nous aurons une suite de nombres qui auront pour limites $\sqrt{n}$. Posons

$$b = \sqrt{n} \frac{1-x}{1+x}, \quad b_1 = \sqrt{n} \frac{1-x_1}{1+x_1},$$

d'où

$$\begin{aligned} x_1 &= x \frac{a - \sqrt{n}}{a - \sqrt{n}}, \\ x_2 &= x_1 \frac{a - \sqrt{n}}{a - \sqrt{n}} = x \left(\frac{a - \sqrt{n}}{a - \sqrt{n}} \right)^2, \\ &\dots\dots\dots, \\ x_p &= x \left(\frac{a - \sqrt{n}}{a - \sqrt{n}} \right)^p; \end{aligned}$$

d'où, en posant $\frac{b}{\sqrt{n}} = \lambda$, $\frac{a}{\sqrt{n}} = \mu$,

$$b_p = \sqrt{n} \frac{(\lambda + 1)(\mu - 1)^p - (\lambda - 1)(\mu + 1)^p}{(\lambda + 1)(\mu - 1)^p + (\lambda - 1)(\mu + 1)^p}.$$

Telle est l'expression de b_p en fonction rationnelle de a et b , et qui tend vers $\sqrt{n}$ pour p infini. On peut encore ici introduire les fonctions trigonométriques, en posant

$$b = iz\sqrt{n}, \quad b_1 = iz_1\sqrt{n}, \quad a = \frac{-i\sqrt{n}}{\beta},$$

d'où

$$z_1 = \frac{\beta + z}{1 - \beta z};$$

et, en faisant $\beta = \tan \omega$, $z = \tan \varphi$, $z_1 = \tan \varphi_1$, on en conclut

$$\varphi_1 = n\omega + \varphi.$$

Sur le développement des fonctions elliptiques en séries trigonométriques; par M. DE PRESLE.

(Séance du 7 juillet 1886.)

1. Expression des fonctions elliptiques en dérivées logarithmiques de sommes de fonctions elliptiques. — Prenons les relations

$$D \operatorname{sn} z = \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z, \quad D \operatorname{cn} z = -\operatorname{dn} z \operatorname{sn} z, \quad D \operatorname{dn} z = -k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z;$$

ajoutons-les deux à deux, après avoir multiplié l'une d'elles par l'une des indéterminées α , β , γ ,

$$D \operatorname{cn} z + \alpha D \operatorname{dn} z = \operatorname{sn} z (-\operatorname{dn} z - \alpha k^2 \operatorname{cn} z),$$

$$D \operatorname{dn} z + \beta D \operatorname{sn} z = \operatorname{cn} z (-k^2 \operatorname{sn} z + \beta \operatorname{dn} z),$$

$$D \operatorname{sn} z + \gamma D \operatorname{cn} z = \operatorname{dn} z (\operatorname{cn} z - \gamma \operatorname{sn} z).$$

Déterminons α , β , γ de manière que les premiers membres soient, à un facteur constant près, les dérivées des seconds facteurs des deuxièmes membres

$$\frac{1}{-\alpha k^2} = \frac{\alpha}{-1}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{\beta}{-k^2}, \quad \frac{1}{-\gamma} = \frac{\gamma}{1};$$

d'où

$$\alpha = \pm \frac{1}{k}, \quad \beta = \pm ik, \quad \gamma = +i;$$

on a donc

$$\begin{aligned} D \operatorname{dn} z \mp k D \operatorname{cn} z &= \pm k \operatorname{sn} z (\operatorname{dn} z \mp k \operatorname{cn} z), \\ D \operatorname{dn} z \pm ik D \operatorname{sn} z &= \pm ik \operatorname{cn} z (\operatorname{dn} z \pm ik \operatorname{sn} z), \\ D \operatorname{cn} z \pm i D \operatorname{sn} z &= \pm i \operatorname{dn} z (\operatorname{cn} z \pm i \operatorname{sn} z), \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \mp k \operatorname{sn} z &= D \log (\operatorname{dn} z \mp k \operatorname{cn} z), \\ \mp ik \operatorname{cn} z &= D \log (\operatorname{dn} z \pm ik \operatorname{sn} z), \\ \pm i \operatorname{dn} z &= D \log (\operatorname{cn} z \pm i \operatorname{sn} z). \end{aligned}$$

2. Transformation des sommes précédentes en produits. —
Prenons les relations

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} \left(z + \frac{\omega'}{2} \right) &= \frac{1}{k \operatorname{sn} z}, \\ \operatorname{cn} \left(z + \frac{\omega'}{2} \right) &= -\frac{i \operatorname{dn} z}{k \operatorname{sn} z}, \\ \operatorname{dn} \left(z + \frac{\omega'}{2} \right) &= -\frac{ik \operatorname{cn} z}{k \operatorname{sn} z} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} a &= \frac{2 \operatorname{sn} \frac{a}{2} \operatorname{cn} \frac{a}{2} \operatorname{dn} \frac{a}{2}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{a}{2}}, \\ \operatorname{cn} a &= \frac{\operatorname{cn}^2 \frac{a}{2} - \operatorname{sn}^2 \frac{a}{2} \operatorname{dn}^2 \frac{a}{2}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{a}{2}}, \\ \operatorname{dn} a &= -\frac{\operatorname{dn}^2 \frac{a}{2} - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{a}{2} \operatorname{cn}^2 \frac{a}{2}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{a}{2}}. \end{aligned}$$

Remplaçons a par $z - \frac{\omega'}{2}$ dans les dernières; il vient, en vertu des premières,

$$\frac{1}{k \operatorname{sn} z} = \frac{2 \operatorname{sn} \left(\frac{z}{2} - \frac{\omega'}{4} \right) \operatorname{cn} \left(\frac{z}{2} - \frac{\omega'}{4} \right) \operatorname{dn} \left(\frac{z}{2} - \frac{\omega'}{4} \right)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 \left(\frac{z}{2} - \frac{\omega'}{4} \right)}.$$

$$-\frac{i \operatorname{dn} z}{k \operatorname{sn} z} = \frac{\operatorname{cn}^2\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) - \operatorname{sn}^2\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{dn}^2\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)},$$

$$-\frac{ik \operatorname{cn} z}{k \operatorname{sn} z} = \frac{\operatorname{dn}^2\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{cn}^2\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)},$$

ou bien

$$k \operatorname{sn} z = \frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^4\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)}{2 \operatorname{sn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{cn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{dn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)},$$

$$-i \operatorname{dn} z = \frac{\operatorname{cn}^2\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) - \operatorname{sn}^2\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{dn}^2\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)}{2 \operatorname{sn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{cn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{dn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)},$$

$$-ik \operatorname{cn} z = \frac{\operatorname{dn}^2\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{cn}^2\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)}{2 \operatorname{sn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{cn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{dn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)},$$

ce qui donne, pour les valeurs des sommes des fonctions elliptiques,

$$\operatorname{dn} z - k \operatorname{cn} z = -\frac{ik^2 \operatorname{sn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)}{\operatorname{cn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{dn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)},$$

$$\operatorname{dn} z + ik \operatorname{sn} z = \frac{i \operatorname{cn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{sn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)},$$

$$\operatorname{cn} z + i \operatorname{sn} z = \frac{i \operatorname{dn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)}{k \operatorname{sn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{cn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)}$$

et

$$\operatorname{dn} z + k \operatorname{cn} z = \frac{i \operatorname{cn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right) \operatorname{dn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)}{\operatorname{sn}\left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}\right)},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{dn} z - ik \operatorname{sn} z &= - \frac{i \operatorname{dn} \left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4} \right) \operatorname{sn} \left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4} \right)}{\operatorname{cn} \left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4} \right)}, \\ \operatorname{cn} z - i \operatorname{sn} z &= - \frac{ki \operatorname{sn} \left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4} \right) \operatorname{cn} \left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4} \right)}{\operatorname{dn} \left(\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4} \right)}; \end{aligned}$$

les trois dernières relations donnent lieu aux mêmes calculs que les trois précédentes; nous ne nous occuperons que de celles-ci.

3. *Dérivées logarithmiques des fonctions elliptiques.* — Les dérivées logarithmiques des fonctions elliptiques ont pour expression

$$\begin{aligned} D \log \operatorname{sn} z &= \frac{\pi i}{\omega} \frac{e^{\frac{\pi z i}{\omega}} + e^{-\frac{\pi z i}{\omega}}}{e^{\frac{\pi z i}{\omega}} - e^{-\frac{\pi z i}{\omega}}} \\ &\quad + \frac{2\pi i}{\omega} \sum_0^\infty q^{n+1} \frac{\left(e^{\frac{2(n+1)\pi z i}{\omega}} - e^{-\frac{2(n+1)\pi z i}{\omega}} \right)}{1 + q^{n+1}}, \\ D \log \operatorname{cn} z &= \frac{\pi i}{\omega} \frac{e^{\frac{\pi z i}{\omega}} - e^{-\frac{\pi z i}{\omega}}}{e^{\frac{\pi z i}{\omega}} + e^{-\frac{\pi z i}{\omega}}} \\ &\quad + \frac{2\pi i}{\omega} \sum_0^\infty q^{n+1} \frac{\left(e^{\frac{2(n+1)\pi z i}{\omega}} - e^{-\frac{2(n+1)\pi z i}{\omega}} \right)}{1 + (-1)^{n+1} q^{n+1}}, \\ D \log \operatorname{dn} z &= \frac{i\pi}{\omega} \sum_0^\infty q^{2n+1} \frac{\left(e^{\frac{2(2n+1)\pi z i}{\omega}} - e^{-\frac{2(2n+1)\pi z i}{\omega}} \right)}{1 - q^{2(2n+1)}}. \end{aligned}$$

(Ces formules se trouvent dans les *Fundamenta nova* de Jacobi et dans le *Traité des fonctions elliptiques* de Briot et Bouquet, n° 297, p. 482.)

4. *Expression des fonctions elliptiques.* — Des formules précédentes, on déduit

$$\begin{aligned} D \log \operatorname{sn} z - D \log \operatorname{cn} z - D \log \operatorname{dn} z \\ = \frac{i\pi}{\omega} \frac{1}{e^{\frac{2\pi z i}{\omega}} - e^{-\frac{2\pi z i}{\omega}}} - \frac{i\pi}{\omega} \sum_0^\infty q^{2n+1} \frac{\left(e^{\frac{2(2n+1)\pi z i}{\omega}} - e^{-\frac{2(2n+1)\pi z i}{\omega}} \right)}{1 - q^{2(2n+1)}}, \end{aligned}$$

$$D \log cn z - D \log dn z - D \log sn z$$

$$= -\frac{4\pi i}{\omega} \frac{1}{e^{\frac{2\pi zi}{\omega}} - e^{-\frac{2\pi zi}{\omega}}} - \frac{4\pi i}{\omega} \sum_0^{\infty} q^{2n+1} \frac{\left(e^{\frac{2(2n+1)\pi zi}{\omega}} - e^{-\frac{2(2n+1)\pi zi}{\omega}} \right)}{1 + q^{2n+1}},$$

$$D \log dn z - D \log sn z - D \log cn z$$

$$= -\frac{2\pi i}{\omega} \frac{e^{\frac{2\pi zi}{\omega}} + e^{-\frac{2\pi zi}{\omega}}}{e^{\frac{2\pi zi}{\omega}} - e^{-\frac{2\pi zi}{\omega}}} - \frac{4\pi i}{\omega} \sum_0^{\infty} q^{2(n+1)} \frac{\left(e^{\frac{4(n+1)\pi zi}{\omega}} - e^{-\frac{4(n+1)\pi zi}{\omega}} \right)}{1 + q^{2(n+1)}}.$$

Remplaçons z par $\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}$, q étant égal à $e^{\frac{\pi \omega' i}{\omega}}$, introduisons les facteurs constants $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{ik}$, $\frac{1}{i}$ qui sont les inverses des coefficients de $sn z$, $cn z$, $dn z$ dans les deuxièmes équations du premier paragraphe, et multiplions par la dérivée de $\frac{z}{2} + \frac{\omega'}{4}$ qui est $\frac{1}{2}$; nous aurons, pour les expressions cherchées,

$$\begin{aligned} sn z &= -\frac{2\pi i \sqrt{q}}{k\omega} \sum_0^{\infty} q^n \frac{\left(e^{\frac{(2n+1)\pi zi}{\omega}} - e^{-\frac{(2n+1)\pi zi}{\omega}} \right)}{1 - q^{2n+1}}, \\ cn z &= \frac{2\pi \sqrt{q}}{k\omega} \sum_0^{\infty} q^n \frac{\left(e^{\frac{(2n+1)\pi zi}{\omega}} + e^{-\frac{(2n+1)\pi zi}{\omega}} \right)}{1 + q^{2n+1}}, \\ dn z &= \frac{\pi}{\omega} + \frac{2\pi}{\omega} \sum_0^{\infty} q^{n+1} \frac{\left(e^{\frac{2(n+1)\pi zi}{\omega}} + e^{-\frac{2(n+1)\pi zi}{\omega}} \right)}{1 + q^{2(n+1)}} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} sn z &= \frac{4\pi \sqrt{q}}{k\omega} \sum_0^{\infty} \frac{q^n}{1 - q^{2n+1}} \sin \frac{(2n+1)\pi z}{\omega}, \\ cn z &= \frac{4\pi \sqrt{q}}{k\omega} \sum_0^{\infty} \frac{q^n}{1 + q^{2n+1}} \cos \frac{(2n+1)\pi z}{\omega}, \\ dn z &= \frac{\pi}{\omega} + \frac{4\pi}{\omega} \sum_0^{\infty} \frac{q^{n+1}}{1 + q^{2(n+1)}} \cos \frac{2(n+1)\pi z}{\omega}. \end{aligned}$$

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 13 AVRIL 1885.

PRÉSIDENCE DE M. POINCARÉ.

Élection : M. Sauvage, professeur à la Faculté de Montpellier, présenté par MM. Appell et Poincaré, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. Humbert : *Sur l'intersection des courbes algébriques.*

M. Poincaré : *Sur les formes d'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation.*

SÉANCE DU 6 MAI 1885.

PRÉSIDENCE DE M. APPELL.

Communications :

M. Perrin : *Sur l'équation de Fermat $x^3 + y^3 = z^3$.*

M. Raffy : *Sur les quadratures algébriques et logarithmiques.*

M. Appell : *Sur l'emploi des polynômes $U_{m,n}$ de M. Hermite pour trouver le polynôme qui approche le plus d'une fonction de deux variables dans des limites données.*

SÉANCE DU 20 MAI 1885.

PRÉSIDENCE DE M. APPELL.

Élection : M. Walter Dyck, présenté par MM. Appell et Paraf, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur la projection de Mercator.*

M. Appell : *Sur les courbes elliptiques dont l'aire est fonction de l'argument elliptique.*

SÉANCE DU 3 JUIN 1885.

PRÉSIDENCE DE M. POINCARÉ.

Élections : MM. Rouquet et Ferraz, présentés par MM. Appell et Goursat, sont élus à l'unanimité.

Communications :

M. Haton : *Sur l'actinométrie des plaques mobiles.*

M. Halphen : *Sur le développement en fractions continues de*

$$\sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}.$$

SÉANCE DU 4 NOVEMBRE 1885.

PRÉSIDENCE DE M. APPELL.

Communications :

M. Raffy : *Sur une proposition de M. Tchebychef relative aux différentielles algébriques intégrables en termes finis.*

SÉANCE DU 18 NOVEMBRE 1885.

PRÉSIDENCE DE M. APPELL.

Élection : MM. Demartres et Dautherville, présentés par MM. Poincaré et Appell, sont élus à l'unanimité.

M. Vaněček, présenté par MM. Picquet et Mannheim, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. Guccia : *Sur les systèmes linéaires de courbes planes unicursales.*

M. Fouret : *Sur des courbes homologiques et polaires réciproques l'une de l'autre.*

M. Weill : *Sur une question de probabilités.*

M. Poincaré : *Sur la stabilité de l'anneau de Saturne.*

SÉANCE DU 2 DÉCEMBRE 1885.

PRÉSIDENTE DE M. APPELL.

Communications :

M. Haton : *Sur les propriétés de (Δ_2) .*

M. Fouret : *Sur la génération des courbes unicursales.*

M. Weill : *Sur les courbes unicursales.*

SÉANCE DU 16 DÉCEMBRE 1885.

PRÉSIDENTE DE M. APPELL.

Communications :

M. Fouret : *Sur la génération des courbes unicursales.*

M. Poincaré : *Sur une méthode de M. Lindstedt.*

M. Appell : *Sur une généralisation de la méthode d'interpolation de Lagrange.*

SÉANCE DU 6 JANVIER 1886.

PRÉSIDENTE DE M. APPELL.

La Société procède au renouvellement de son Bureau.

Communications :

M. Fouret : *Sur une généralisation du théorème de Kœnig.*

M. Appell : *Sur la figure d'équilibre d'un fil.*

M. Humbert : *Sur les lignes de courbure algébriques planes.*

M. Weill : *Sur les substitutions itératives rationnelles.*

SÉANCE DU 20 JANVIER 1886.

PRÉSIDENCE DE M. POINCARÉ.

Élection : M. Jablonski, présenté par MM. Appell et Weill, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. Fouret : *Sur un mode de génération des courbes de degré m à point multiple d'ordre $m - 1$.*

M. Humbert : *Sur les lignes de courbure algébriques planes.*

M. Poincaré : *Sur les résidus des intégrales doubles.*

SÉANCE DU 3 FÉVRIER 1886.

PRÉSIDENCE DE M. POINCARÉ.

Communications :

M. Humbert : *Sur les lignes de courbure algébriques.*

M. Fouret : *Sur une équation différentielle du premier ordre.*

SÉANCE DU 17 FÉVRIER 1886.

PRÉSIDENCE DE M. POINCARÉ.

Élection : M. Wladimir de Maximovitch, professeur à l'Université de Kazan, présenté par MM. Lucas et Laisant, est élu à l'unanimité.

SÉANCE DU 3 MARS 1886.

PRÉSIDENCE DE M. FOURET.

Communications :

M. Paraf : *Sur les courbes de genre un.*

SÉANCE DU 17 MARS 1886.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Élections : M. Lyon, présenté par MM. Séguy et Fouret, est élu à l'unanimité.

M. de Presle, membre démissionnaire, est admis à faire de nouveau partie de la Société.

SÉANCE DU 7 AVRIL 1886.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur la théorie des formes et les sous-invariants.*

M. d'Ocagne : *Sur certaines suites numériques.*

M. Humbert : *Sur les courbes de direction.*

SÉANCE DU 5 MAI 1886.

PRÉSIDENCE DE M. POINCARÉ.

Communications :

M. de Presle : *Sur les formes quadratiques.*

SÉANCE DU 19 MAI 1886.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. Lemoine : *Sur les propriétés du triangle.*

M. de Presle : *Sur les nombres de Bernoulli.*

SÉANCE DU 2 JUIN 1886.

PRÉSIDENCE DE M. POINCARÉ.

Communications :

M. Poincaré : *Sur les fonctions abéliennes.*

M. Humbert : *Sur les courbes de direction.*

SÉANCE DU 7 JUILLET 1886.

PRÉSIDENCE DE M. POINCARÉ.

Communications :

M. de Presle : *Sur le développement des fonctions elliptiques en séries trigonométriques.*

— *Sur l'expression* $\frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1.2\dots p}$.

M. Paraf : *Sur la théorie des caractéristiques.*

SÉANCE DU 21 JUILLET 1886.

PRÉSIDENCE DE M. POINCARÉ.

Élection : M. John Fields, présenté par MM. Craig et Poincaré, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. Poincaré : *Sur l'équation $\Delta V = 0$.*

M. de Presle : *Sur la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples.*

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

OUVRAGES ET MÉMOIRES REÇUS DU 1^{er} AVRIL 1885 AU 21 JUILLET 1886.

Halphen : *Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables.*

Starkoff : *Tri Soobtchenii.*

— *Ob odnom lineinum differentialunom ouravnenii 3 — go poridka.*

— *Zadaki newtona.*

Haton de la Goupillière : *Propriétés nouvelles du paramètre différentiel du second ordre.*

Humbert : *Sur les surfaces cyclides.*

Georg Cantor : *Ueber die verschiedenen Standpunkte in Bezug auf das actuale Unendliche.*

Guccia : *Sur les transformations géométriques planes birationnelles.*

— *Sur les transformations Cremona dans le plan.*

D'Ocagne : *Divers Mémoires.*

Walter Dyck : *Sur l'Analysis situs à trois dimensions.*

Sur une généralisation du théorème de Kœnig, concernant la force vive d'un système matériel; par M. G. FOURET.

(Séance du 6 janvier 1886.)

1. A l'occasion d'une Communication de M. Gilbert sur la force vive des systèmes matériels, M. Resal rappelait récemment ⁽¹⁾ les élégants théorèmes donnés sur ce sujet, il y a quelques années, par M. O. Bonnet, dans les Mémoires de l'Académie de Montpellier ⁽²⁾. L'un de ces théorèmes, retrouvé et démontré d'une manière un peu différente par M. Gilbert ⁽³⁾, est une généralisa-

⁽¹⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CI, p. 1140.

⁽²⁾ *Mémoires de la section des Sciences*, t. I^{er}, p. 142.

⁽³⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CI, p. 1054.

tion d'un théorème bien connu dû à Kœnig, dont l'application est très fréquente dans la dynamique des systèmes.

Le théorème de M. Bonnet peut s'énoncer de la manière suivante :

Pour que la force vive d'un système matériel soit égale à la force vive de la masse totale, supposée concentrée en un certain point du système, augmentée de la force vive due au mouvement relatif du système autour de ce point, il faut et il suffit que la vitesse de ce dernier point soit égale à la projection, sur sa direction, de la vitesse absolue du centre de gravité du système.

Je me propose, dans cette Note, de démontrer un théorème très général sur le déplacement d'un système matériel qui conduit immédiatement, entre autres conséquences, au théorème de M. Bonnet, et qui comprend comme cas particulier une propriété relative à deux systèmes matériels, que j'ai exposée précédemment dans le *Bulletin de la Société mathématique* ⁽¹⁾.

2. La proposition qu'il s'agit d'établir peut s'énoncer comme il suit :

Lorsqu'un système, composé de points en nombre et de masses quelconques ⁽²⁾, *se déplace, en subissant ou non une déformation quelconque, la somme des produits obtenus, en multipliant la masse de chaque point par le carré de son déplacement, est égale au produit de la masse totale du système, multipliée par le carré de la projection du déplacement du centre de gravité sur une direction arbitrairement choisie, augmenté de la somme des produits obtenus, en multipliant les masses des divers points respectivement par les carrés des déplacements qu'il faut leur imprimer, pour les amener dans leur position finale, après leur avoir fait subir, dans la direction déjà choisie, une translation commune, égale à la projection, sur cette direction, du déplacement du centre de gravité.*

⁽¹⁾ T. XI, p. 53.

⁽²⁾ Les masses peuvent, en partie, être supposées négatives, lorsqu'on se place à un point de vue géométrique.

La démonstration de ce théorème se déduirait facilement de l'analyse dont j'ai fait usage dans mon précédent Mémoire; mais il sera plus intéressant de l'établir par des considérations basées sur les notions les plus élémentaires de Géométrie.

3. Soient $m_1, m_2, \dots, m_n$ les masses, affectées de signes quelconques, de n points composant le système, et occupant respectivement les positions primitives $A_1, A_2, \dots, A_n$ et les positions finales $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$.

Soient G et G' les positions primitive et finale du centre de gravité du système, dont la masse totale sera désignée par M , et GX une direction arbitrairement choisie. Projetons G' orthogonalement sur GX en G'' , et donnons aux divers points $A_1, A_2, \dots, A_n$ une même translation, identique à GG'' , en grandeur, direction et sens, laquelle amènera ces points respectivement en $A''_1, A''_2, \dots, A''_n$, de manière que l'on ait

$$(1) \quad A_1 A''_1 = A_2 A''_2 = \dots = A_n A''_n = GG''.$$

Projetons enfin $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ respectivement en $B_1, B_2, \dots, B_n$, sur les droites $A_1 A'_1, A_2 A'_2, \dots, A_n A'_n$. En vertu d'un théorème de Géométrie élémentaire des plus classiques, on a, dans l'un quelconque des triangles $A_1 A'_1 A''_1, A_2 A'_2 A''_2, \dots, A_n A'_n A''_n$,

$$(2) \quad \overline{A_i A'_i}^2 = \overline{A_i A''_i}^2 + \overline{A'_i A''_i}^2 + 2 \overline{A_i A'_i} \times \overline{A'_i B_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

en ayant soin, toutefois, de considérer les segments, tels que $A'_i B_i$, comme positifs ou négatifs, suivant qu'ils ont le sens de la translation, c'est-à-dire le sens de GG'' , ou le sens opposé. Ajoutons les n relations (2), après les avoir multipliées respectivement par $m_1, m_2, \dots, m_n$: nous obtenons, en tenant compte des égalités (1),

$$(3) \quad \sum m_i \overline{A_i A'_i}^2 = M \overline{GG''}^2 + \sum m_i \overline{A'_i A''_i}^2 + 2 GG'' \times \sum m_i \overline{A'_i B_i}.$$

Considérons le plan perpendiculaire en G'' à GX : ce plan contient G' , dont G'' est la projection orthogonale sur GX . En désignant par $C_1, C_2, \dots, C_n$ les points d'intersection respectifs de $A_1 A''_1, A_2 A''_2, \dots, A_n A''_n$ avec ce plan, on a, en tenant compte des signes, les deux égalités

$$(4) \quad \sum m_i \overline{B_i C_i} = 0, \quad \sum m_i \overline{A'_i C_i} = 0.$$

qui expriment, la première, que G' est le centre de gravité du système $(A'_1, A'_2, \dots, A'_n)$; la seconde, que G'' est le centre de gravité du système $(A''_1, A''_2, \dots, A''_n)$.

Or des relations (4) on déduit par soustraction

$$\Sigma m_i \overline{A''_i B_i} = 0.$$

Par suite, la relation (3) se réduit à

$$(5) \quad \Sigma m_i \overline{A_i A'_i}^2 = M. \overline{GG'}^2 + \Sigma m_i \overline{A'_i A''_i}^2.$$

C'est l'expression même du théorème qu'il s'agissait de démontrer (1).

4. En supposant, comme cas particulier, que la droite GX , dont la direction a été laissée jusqu'ici arbitraire, coïncide avec GG' , on retrouve immédiatement un théorème que j'ai établi dans le Mémoire déjà rappelé, et dont j'ai déduit très simplement plusieurs propriétés connues des moments d'inertie relatifs à un point, à une droite, à un plan, et le théorème de Kœnig sur la force vive d'un système matériel. Je ne reviens pas sur ces conséquences. Je vais seulement faire voir comment le théorème de M. Bonnet se déduit avec la plus grande facilité de celui qui vient d'être démontré.

Supposons qu'il existe un point O du système matériel, dont le déplacement total OO' soit égal et parallèle à GG'' , et dans le même sens. Le déplacement total du système matériel peut alors être considéré comme résultant d'une translation égale et parallèle à OO' , qui amène A_i en A''_i , et d'un déplacement relatif par rapport à O' , qui amène A''_i en A'_i . La relation (5) peut, en conséquence, s'écrire

$$(6) \quad \Sigma m_i \overline{A_i A'_i}^2 = M. \overline{OO'}^2 + \Sigma m_i \overline{A'_i A''_i}^2.$$

En divisant par le carré du temps Δt que dure le déplacement,

(1) Il est facile de voir, en modifiant légèrement la marche de la démonstration, que la relation (3) ne se réduit à la relation (5), par suite de l'annulation de son dernier terme, que dans le cas où GG'' est la projection orthogonale de GG' sur GX .

et faisant tendre Δt vers zéro, on conclut de la relation (6) une relation qui ne contient que des forces vives, et qui est précisément l'expression du théorème de M. Bonnet.

Sur un mode de transformation des déterminants;
par M. G. FOURET.

(Séance du 17 novembre 1886.)

Avant d'arriver à la transformation qui fait l'objet de cette Note, nous allons démontrer trois théorèmes préliminaires, qui nous seront utiles et qui présentent d'ailleurs quelque intérêt en eux-mêmes.

THÉORÈME I. — *Le déterminant du n^{ième} ordre ⁽¹⁾*

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}_n,$$

dont tous les éléments sont égaux à l'unité, sauf les $n - 1$ derniers éléments de la diagonale principale, qui sont nuls, est égal à $(-1)^{n-1}$.

En effet, en retranchant la seconde colonne de la première, on obtient

$$A_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}_{n-1} = A_{n-1}.$$

⁽¹⁾ Nous indiquerons, dans ce qui va suivre, l'ordre de chaque déterminant par un indice placé en bas et à la droite de ce déterminant.

On a, par suite, la série d'égalités

$$\begin{aligned} A_n &= -A_{n-1}, \\ A_{n-1} &= -A_{n-2}, \\ &\dots\dots\dots \\ A_3 &= -A_2; \end{aligned}$$

d'ailleurs

$$A = 2 - 1.$$

En multipliant ces égalités membre à membre, on en conclut

$$A_n = (-1)^{n-1}.$$

THÉOREME II. — *Le déterminant du n^{ième} ordre*

$$B_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}_n,$$

dont tous les éléments sont égaux à l'unité, sauf ceux de la diagonale principale, qui sont nuls, est égal à $(n-1)(-1)^{n-1}$.

En effet, on obtient, en ajoutant les $n-1$ dernières colonnes à la première,

$$B_n = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & . & . & \dots & . \\ n-1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}_n = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}_n = (n-1)A_n.$$

Donc, en vertu du théorème précédent,

$$B_n = (n-1)(-1)^{n-1}.$$

THÉOREME III. — *Le déterminant du n^{ième} ordre*

$$C_n = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 \end{vmatrix}_n,$$

dont tous les éléments sont égaux à l'unité, sauf ceux de la diagonale principale, qui sont égaux à -1 , a pour valeur $(n-2)(-2)^{n-1}$.

En effet, en ajoutant la première colonne à toutes les colonnes suivantes, on obtient

$$C_n = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 0 \end{vmatrix}_n = - \begin{vmatrix} 0 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 0 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & 0 \end{vmatrix}_{n-1} = -2^{n-1} B_{n-1};$$

d'où l'on conclut, en vertu du théorème II,

$$C_n = -(n-2)(-1)^{n-2} 2^{n-1} = (n-2)(-2)^{n-1}.$$

Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant, qui pourra servir, dans certains cas, à transformer un déterminant.

THÉORÈME IV. — *La valeur d'un déterminant est multipliée par $(n-2)2^{n-1}$, et changée de signe, lorsqu'on transforme n lignes parallèles de ce déterminant, en retranchant des éléments de chacune d'elles les éléments correspondants des $n-1$ autres.*

Soit

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & \dots & k & l & x & \dots & \lambda \\ a' & b' & c' & \dots & k' & l' & x' & \dots & \lambda' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'' & b'' & c'' & \dots & k'' & l'' & x'' & \dots & \lambda'' \end{vmatrix}_m$$

un déterminant d'un ordre m quelconque, dont nous mettons en évidence les n premières colonnes, en les écrivant en caractères italiques. En appliquant aux n premières colonnes de ce déterminant D la transformation spécifiée dans l'énoncé du théorème IV, on obtient le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-b-c-\dots-l & -a+b-c-\dots-l & \dots & -a-b-c-\dots+l & x\dots\lambda \\ a'-b'-c'-\dots-l' & -a'+b'-c'-\dots-l' & \dots & -a'-b'-c'-\dots+l' & x'\dots\lambda' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a''-b''-c''-\dots-l'' & -a''+b''-c''-\dots-l'' & \dots & -a''-b''-c''-\dots+l'' & x''\dots\lambda'' \end{vmatrix}$$

Or ce déterminant Δ est le produit, effectué par lignes horizontales, du déterminant D et du déterminant

$$C = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}_m.$$

On a d'ailleurs, en réduisant et s'appuyant sur le théorème III,

$$C = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & 1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 1 \end{vmatrix}_n = (-1)^n C_n = -(n-2)2^{n-1};$$

par conséquent

$$(1) \quad \Delta = CD = -(n-2)2^{n-1}.$$

Le théorème se trouve ainsi démontré pour le cas où les n lignes parallèles sur lesquelles on opère occupent les n premiers rangs. Mais il est bien clair que, dans le cas général, on peut toujours amener aux premiers rangs les n lignes parallèles de D que l'on considère, et les n lignes correspondantes de Δ ; car on ne fait ainsi que multiplier ces deux déterminants par la même puissance de -1 . La relation (1) s'appliquant, comme nous l'avons démontré, aux déterminants D et Δ ainsi modifiés, s'applique, par conséquent, aussi à ces déterminants non altérés. La démonstration du théorème IV est donc complète.

Autre démonstration. — Le même théorème peut se démontrer d'une manière moins élégante, mais plus directe, sans s'appuyer sur les trois théorèmes préliminaires et sur la multiplication des déterminants. Pour abréger l'écriture, nous représenterons les déterminants D et Δ par leur première ligne horizontale. Les transformations que nous ferons subir aux éléments de cette première ligne horizontale seront supposées appliquées aux éléments correspondants de toutes les autres. En vertu d'une remarque déjà

faite, il suffira d'ailleurs de faire la démonstration sur les n premières colonnes.

En écrivant Δ sous la forme

$$\Delta = | a-b-c-\dots-k-l \quad b-c-\dots-l-a \quad \dots \quad l-a-b-\dots-k \quad \dots |,$$

on obtient successivement, en ajoutant la première colonne aux $n-1$ suivantes,

$$\begin{aligned} \Delta &= | a-b-c-\dots-k-l \quad -2(c+d+\dots+l) \quad \dots \quad -2(b+c+\dots+k) \quad \dots | \\ &= (-1)^{n-1} 2^{n-1} | a-b-c-\dots-k-l \quad c+d+\dots+l \quad \dots \quad b+c+\dots+k \quad \dots |; \end{aligned}$$

puis, en ajoutant encore la première colonne aux $n-1$ suivantes dans le déterminant ainsi transformé,

$$\Delta = (-1)^{n-1} 2^{n-1} | a-b-c-\dots-l \quad a-b \quad a-c \quad \dots \quad a-l \quad \dots |,$$

en retranchant ensuite de la première colonne les $n-1$ qui la suivent

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^{n-1} 2^{n-1} | -(n-2)a, \quad a-b, \quad a-c \quad \dots \quad a-l \quad \dots | \\ &= (-1)^{n-1} (n-2) 2^{n-1} | -a \quad a-b \quad a-c \quad \dots \quad a-l \quad \dots |, \end{aligned}$$

en ajoutant enfin la première colonne aux $n-1$ suivantes

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^{n-1} (n-2) 2^{n-1} | -a \quad -b \quad -c \quad \dots \quad -l \quad \dots | \\ &= (-1)^{2n-1} (n-2) 2^{n-1} | a \quad b \quad c \quad \dots \quad l \quad \dots |, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\Delta = -(n-2) 2^{n-1} D.$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Avant d'appliquer au déterminant D la transformation qui conduit à Δ , on pourrait changer les signes des éléments d'une ou plusieurs colonnes de D , ou bien encore multiplier les éléments d'une même colonne par un même nombre. On obtiendrait ainsi de nouveaux déterminants dont le rapport au déterminant D s'évaluerait aisément à l'aide du théorème qui vient d'être démontré.

Exemple. — En vertu de cette remarque, on déduit aisément

du théorème IV la suite d'identités

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} b+c-a & c+a-b & a+b-c \\ b'+c'-a' & c'+a'-b' & a'+b'-c' \\ b''+c''-a'' & c''+a''-b'' & a''+b''-c'' \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} a+b+c & a-b-c & b-a-c \\ a'+b'+c' & a'-b'-c' & b'-a'-c' \\ a''+b''+c'' & a''-b''-c'' & b''-a''-c'' \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b-c & a-b-c \\ a'+b'+c' & a'+b'-c' & a'-b'-c' \\ a''+b''+c'' & a''+b''-c'' & a''-b''-c'' \end{vmatrix} \end{aligned}$$

et, plus généralement,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \frac{1}{4\alpha\beta\gamma} \begin{vmatrix} b\beta + c\gamma - a\alpha & c\gamma + a\alpha - b\beta & a\alpha + b\beta - c\gamma \\ b'\beta + c'\gamma - a'\alpha & c'\gamma + a'\alpha - b'\beta & a'\alpha + b'\beta - c'\gamma \\ b''\beta + c''\gamma - a''\alpha & c''\gamma + a''\alpha - b''\beta & a''\alpha + b''\beta - c''\gamma \end{vmatrix},$$

α, β, γ désignant des nombres quelconques, positifs ou négatifs.

*Sur la valeur du reste des formules d'approximation
pour le calcul des intégrales définies; par M. J. DERUYTS.*

(Séance du 3 novembre 1886.)

M. Mansion a fait connaître récemment l'expression du reste dans la formule de quadrature de Gauss (1). Je me propose d'indiquer, dans cette Note, un résultat plus général pour les formules d'approximation des intégrales définies.

L'emploi des fonctions interpolaires rapproche l'analyse suivante de celle qui a été exposée par le savant Professeur de l'Université de Gand.

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1^{er} semestre 1886, p. 412; *Bulletin de l'Académie de Belgique* (avril 1886).

I. Je désignerai par $\varphi(x)$ une fonction régulière entre les limites réelles a et b , ($a < b$), et par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ deux groupes de quantités distinctes comprises entre a et b ; soient

$$P(x) = \Pi(x - \alpha_i), \quad p(x) = \Pi(x - \beta_i).$$

La fonction interpolaire de $\varphi(x)$ par rapport aux quantités $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ est représentée par

$$\psi = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\frac{\varphi(\alpha_i) - \varphi(x)}{\alpha_i - x}}{P'(\alpha_i) p(\alpha_i)} + \frac{\frac{\varphi(\beta_i) - \varphi(x)}{\beta_i - x}}{P(\beta_i) p'(\beta_i)} \right].$$

D'après un théorème de Cauchy (*), on a

$$\psi = \frac{1}{1.2.3 \dots 2n} \varphi^{2n}(\zeta),$$

ζ étant compris entre la plus grande et la plus petite des quantités

$$x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n.$$

La démonstration de ce théorème suppose les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ distinctes entre elles. Pour ce qui suit, il est nécessaire de connaître la valeur de ψ quand on fait $\alpha_i = \beta_i$.

Je prendrai d'abord $\beta_i = \alpha_i + \theta$: la quantité ψ devient alors

$$(1) \quad \chi(\theta, x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{P'(\alpha_i)} \left[\frac{\frac{\varphi(\alpha_i) - \varphi(x)}{\alpha_i - x}}{P(\alpha_i + \theta)} + \frac{\frac{\varphi(\alpha_i + \theta) - \varphi(x)}{\alpha_i + \theta - x}}{P'(\alpha_i + \theta)} \right].$$

En posant

$$F(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x)}{x - x},$$

on a encore

$$\begin{aligned} \chi(\theta, x) &= \sum \frac{1}{P'(x)} \frac{F(x) P(x + \theta) + F(x - \theta) P(x - \theta)}{P(x - \theta) P(x + \theta)} \\ &= \sum \frac{1}{P'(x)} \frac{\theta^2 [2F(x) P''(x) - 2F'(x) P'(x)] + \theta^3 [F'P'' - F''P'] + \dots}{-\theta^2.2P''(x) - \frac{\theta^3}{6} [-4P'(x)P'''(x) + 3P''^2(x)] + \dots} \end{aligned}$$

Au moyen de la dernière formule, on voit que $\chi(0, x)$ est une

(*) Œuvres de Cauchy, t. V, p. 409.

quantité finie; de plus, pour les valeurs de θ voisines de zéro, $\chi(\theta, x)$ varie d'une manière continue. On peut donc trouver une quantité ε infiniment petite, telle que l'on ait

$$\chi(0, x) = \chi(\varepsilon, x) + \frac{\eta}{1.2.3 \dots 2n},$$

η étant une quantité infiniment petite ou nulle (¹).

D'après la formule de Cauchy, on a

$$\chi(\varepsilon, x) = \frac{\varphi^{2n}(\zeta)}{1.2.3 \dots 2n}$$

et, par suite,

$$(2) \quad \chi(0, x) = \frac{\varphi^{2n}(\zeta) + \eta}{1.2.3 \dots 2n} = \frac{\varphi^{2n}(\xi)}{1.2.3 \dots 2n}$$

si l'on désigne par ξ une quantité comprise entre les mêmes limites que ζ .

On voit par là que le théorème de Cauchy est applicable à la fonction interpolaire relative aux quantités α_i et β_i quand on fait $\alpha_i = \beta_i$.

II. Soit $f(x)$ une fonction finie continue et différente de zéro entre les limites a, b ; la valeur de l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx$$

peut être représentée approximativement par

$$I_1 = \sum_{i=1}^n A_i \varphi(\alpha_i).$$

Dans cette formule, les coefficients A_i sont indépendants de la forme de $\varphi(x)$: ils sont déterminés par cette condition, que la différence $I - I_1$ est nulle pour

$$\varphi(x) = x^p \quad (p = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

La formule d'approximation est la plus précise quand on prend,

(¹) Quand $\varphi(x)$ est un polynôme de degré inférieur à $2n+1$, la quantité η est nulle: cela résulte de la formule (1).

pour le polynôme $\Pi(x - \alpha_i)$, le dénominateur P_n de la $n^{\text{ième}}$ réduite dans le développement en fraction continue de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(z)}{x-z} dz = \int_a^b f(z) \sum \frac{z^k}{x^{k+1}} dz \quad (1).$$

Dans ce cas, la formule $I = I_1$ est exacte quand $\varphi(x)$ est un polynôme de degré $(2n - 1)$.

On trouve, de différentes manières,

$$I_1 = c_n \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(\alpha_i)}{P'_n(\alpha_i) P_{n-1}(\alpha_i)},$$

c_n étant un facteur numérique.

Je remarque que l'on peut écrire

$$\varphi(x) = \Pi_{2n-1}(x) + P_n^2(x) \chi(0, x),$$

si l'on désigne par Π_{2n-1} un polynôme du degré $2n - 1$; $\chi(0, x)$ représente, comme précédemment, la fonction interpolaire de $\varphi(x)$ par rapport aux $2n$ quantités $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2, \dots, \beta_n = \alpha_n$.

En observant que l'on a

$$\int_a^b f(x) \Pi_{2n-1}(x) dx = \sum A_i \Pi_{2n-1}(\alpha_i) = \sum A_i \varphi(\alpha_i),$$

j'obtiens

$$I - I_1 = \int_a^b f(x) P_n^2(x) \chi(0, x) dx$$

ou bien

$$I - I_1 = \chi(0, x_1) \int_a^b f(x) P_n^2(x) dx \quad (a < x_1 < b).$$

Au moyen de la formule (2), on a, par suite,

$$I - I_1 = \frac{\varphi^{2n}(\xi)}{1.2.3 \dots 2n} \int_a^b f(x) P_n^2(x) dx;$$

la quantité ξ est comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs $x_1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$: elle est donc intermédiaire entre a et b .

(1) HEINE, *Traité des fonctions sphériques*, t. II, p. 22 (2^e édition, 1881).

Le reste R de la formule d'approximation

$$(3) \quad \int_a^b f(x) \varphi(x) dx = c_n \sum \frac{\varphi(\alpha)}{P'(\alpha) P_{n-1}(\alpha)} + R$$

est donc représenté par

$$(4) \quad R = \frac{\varphi^{2n}(\xi)}{1.2.3 \dots 2n} \int_a^b f(x) P_n^2(x) dx \quad (a < \xi < b).$$

Cas particuliers. — Soient $f(x) = 1$, $a = -1$, $b = +1$; le polynôme P_n ne diffère de la fonction X_n de Legendre que par un facteur numérique. La formule (3) se ramène immédiatement à la formule de Gauss.

La formule (4) donne

$$1 - I_1 = \frac{\varphi^{2n}(\zeta)}{1.2.3 \dots 2n} \times \frac{2}{2n+1} \left[\frac{1.2.3 \dots n}{1.2.3 \dots (2n-1)} \right]^2 \quad (-1 < \zeta < +1) :$$

c'est le résultat auquel M. Mansion est parvenu.

Une autre application intéressante se rapporte à la formule d'approximation

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \varphi(\cos \theta) d\theta = \frac{\pi}{n} \sum_0^{n-1} \varphi\left(\cos \frac{2k+1}{2n} \pi\right) + R,$$

démontrée dans le *Cours d'Analyse* de M. Hermite.

On a, dans ce cas,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n(\arccos x)$$

et

$$R = \frac{\varphi^{2n}(\zeta)}{1.2.3 \dots 2n} \frac{1}{4^{n-1}} \int_{-1}^{+1} \frac{\cos^2 n(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \frac{\varphi^{2n}(\zeta)}{1.2.3 \dots 2n},$$

$$(-1 < \zeta < +1).$$

III. La méthode indiquée ci-dessus s'applique très simplement à la généralisation de la formule de Cotes.

Soit $F(x)$ une fonction régulière dans l'intervalle ab ; soient $a_1, a_2, \dots, a_n$, n quantités distinctes comprises dans ce même intervalle.

L'intégrale

$$\int_a^b F(x) \varphi(x) dx$$

peut être représentée, avec le degré de précision n , par

$$\sum_{i=1}^n A_i \varphi(a_i);$$

quand les quantités a_i sont données, on détermine les coefficients A_i par les conditions

$$\int_a^b F(x) x^p dx = \sum A_i a_i^p \quad (p = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Soit

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) = \Pi(x);$$

on trouve, comme précédemment, pour le reste de la formule d'approximation,

$$R = \int_a^b F(x) \Pi(x) \times \lambda(x) dx \quad (1),$$

si l'on désigne par $\lambda(x)$ la fonction interpolaire de $\varphi(x)$ par rapport aux quantités $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Par l'application du théorème de Cauchy, on trouve

$$R = \frac{b-a}{1.2.3\dots n} F(\xi) \Pi(\xi) \times \varphi^n(\zeta) \quad \left(\begin{matrix} a < \xi < b \\ a < \zeta < b \end{matrix} \right).$$

Cette formule est, du reste, susceptible d'expressions plus simples ou plus précises, suivant la forme de $F(x)$ et suivant les valeurs de $a_1, a_2, \dots, a_n$.

(1) Cette formule a été employée dans un cas particulier par M. Mansion.

Multiplication de deux déterminants de même degré;
par M. A. DE PRESLE.

(Séance du 1^{er} décembre 1886.)

Soient les déterminants

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Nous avons

$$AB = \Sigma A(\pm b_{1p_1} b_{2p_2} \dots b_{np_n}),$$

$p_1, p_2, \dots, p_n$ étant une combinaison des nombres 1, 2, ..., n , de sorte que $\pm b_{1p_1} b_{2p_2} \dots b_{np_n}$ est l'expression générale d'un terme du déterminant B.

En désignant par $[a]_p$ la colonne $\begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \dots \\ a_{np} \end{pmatrix}$, on a

$$A = \pm |[a]_{p_1} [a]_{p_2} \dots [a]_{p_n}|,$$

de sorte que

$$AB = \Sigma \pm |[a]_{p_1} [a]_{p_2} \dots [a]_{p_n}| b_{1p_1} b_{2p_2} \dots b_{np_n};$$

mais nous pouvons supprimer le double signe; en effet, d'une part, le terme $b_{1p_1} b_{2p_2} \dots b_{np_n}$ du déterminant B est affecté du signe plus ou du signe moins, selon que l'on passe de ce terme au terme principal par un nombre pair ou par un nombre impair d'échanges deux à deux des indices p ; mais, d'autre part, pour être égal au déterminant A, le déterminant $|[a]_{p_1} [a]_{p_2} \dots [a]_{p_n}|$ doit être affecté du signe + ou du signe —, selon que l'on passe de ce déterminant au déterminant A par un nombre pair ou par un nombre impair d'échanges deux à deux des indices p ; nous pouvons donc écrire

$$AB = \Sigma |[a]_{p_1} [a]_{p_2} \dots [a]_{p_n}| b_{1p_1} b_{2p_2} \dots b_{np_n}.$$

Cela posé, pour multiplier le déterminant du second membre par $b_{1p}, b_{2p}, \dots, b_{np}$, il suffit de multiplier la première colonne par b_{1p} , la seconde par b_{2p} , et ainsi de suite; donc

$$AB = \Sigma | [a]_p, b_{1p}, [a]_p, b_{2p}, \dots, [a]_{pn}, b_{np} |.$$

Pour former cette somme, considérons la Tableau formé de n groupes de n colonnes

$$[a]_1, b_{11}, [a]_2, b_{12}, \dots, [a]_n, b_{1n}; [a]_1, b_{21}, [a]_2, b_{22}, \dots, [a]_n, b_{2n}; \dots; [a]_1, b_{n1}, [a]_2, b_{n2}, \dots, [a]_n,$$

Il faudra former tous les déterminants partiels possibles avec une colonne de chaque groupe, mais en évitant de prendre deux colonnes occupant le même rang dans leur groupe.

Cette dernière restriction est inutile; car, en ne la faisant pas, on introduit seulement dans la somme des déterminants partiels nuls comme ayant deux colonnes formées d'éléments proportionnels; donc tous les déterminants partiels, dont l'addition constitue AB, ont leur somme égale à un déterminant unique de même degré, et l'on a

$$B = [[a]_1, b_{11} + [a]_2, b_{12} + \dots + [a]_n, b_{1n} | [a]_1, b_{21} + [a]_2, b_{22} + \dots + [a]_n, b_{2n} | \dots | [a]_1, b_{n1} + [a]_2, b_{n2} + \dots + [a]_n,$$

Un terme c_{pq} de AB a pour expression

$$c_{pq} = a_{1p} b_{1q} + a_{2p} b_{2q} + \dots + a_{np} b_{nq};$$

d'où la règle connue pour avoir le terme général du produit de deux déterminants.

Question de probabilité; par M. WEILL.

(Séance du 1^{er} décembre 1886.)

Considérons k événements différents, également probables, et p épreuves consécutives; cherchons la probabilité pour qu'un des événements considérés et désigné se produise au moins deux fois de suite dans l'ensemble des p épreuves.

Représentons par des lettres différentes les k événements, et soient a l'événement que l'on considère, $X(p)$ la probabilité cherchée. Le nombre de cas possibles étant k^p , le nombre de cas favorables est $k^p X(p)$.

Ce nombre est, d'autre part, égal à k fois le nombre de cas favorables présentés par $(p-1)$ événements consécutifs, c'est-à-dire à

$$k^p X(p-1),$$

augmenté du nombre des cas défavorables présentés par les $(p-1)$ événements, mais terminés par l'événement a . Ce deuxième nombre est égal à la différence entre le nombre des cas défavorables et le nombre de ceux non terminés par a , c'est-à-dire à

$$k^{p-1}[1 - X(p-1)] - k^{p-2}(k-1)[1 - X(p-2)].$$

On a donc la formule de récurrence

$$k^p X(p) = k^p X(p-1) + k^{p-1}[1 - X(p-1)] - k^{p-2}(k-1)[1 - X(p-2)]$$

ou

$$X(p) = \frac{k-1}{k} X(p-1) + \frac{k-1}{k^2} X(p-2) + \frac{1}{k^2}.$$

L'expression de $X(p)$ est de la forme

$$C\alpha^p + C'\beta^p - \frac{1}{k^2-1},$$

α , β , C , C' étant des constantes que l'on sait déterminer par la méthode de Lagrange.

On peut raisonner autrement : supposons, en représentant les k événements par des lettres, que λ lettres précèdent le premier groupe de deux lettres a consécutives que l'on rencontre; le nombre de cas présentés par ces λ lettres est égal à

$$k^{\lambda-1}[1 - X(\lambda-1)](k-1).$$

Le nombre total des cas favorables est donc égal à

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-2} (k-1) k^{\lambda-1} [1 - X(\lambda-1)].$$

En égalant cette somme à $X(p)k^p$, on aura une formule de récurrence permettant de calculer $X(p)$. En égalant les résultats de ces deux méthodes, on aura une identité algébrique.



TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XIV.

	Pages
État de la Société mathématique de France au 1 ^{er} janvier 1886.....	5
Sur un Mémoire de Poisson; par M. BOCHE.....	13
Sur la recherche de deux courbes planes, ou surfaces, dont les points se correspondent chacun à chacun, à la fois par homologie et par polaires réciproques; par M. G. FOURET.....	18
Sur une suite récurrente; par M. MAURICE D'OCAGNE.....	20
Sur un problème de Fermat; par M. PAUL TANNERY.....	41
Sur l'hypercycle et la théorie des cycles polaires; par M. DAUTHEVILLE.....	45
Note sur le conoïde de Plücker; par M. H. PICQUET.....	68
Sur les déterminants d'ordre infini; par M. H. POINCARÉ.....	77
Sur l'équation du quatrième degré et les fonctions elliptiques; par M. A.-E. PELLET.....	90
Sur certaines suites de fractions irréductibles; par M. MAURICE D'OCAGNE...	93
Au sujet de la décomposition d'une forme quadratique en une somme de carrés de formes linéaires et indépendantes; par M. DE PRESLE.....	98
Détermination des nombres de Bernoulli; par M. DE PRESLE.....	100
Nouvelle construction de la courbe d'ombre propre d'une surface de révolution et de la tangente en un point quelconque de cette courbe; par M. NEU.....	103
Quelques questions se rapportant à l'étude des antiparallèles des côtés d'un triangle; par M. ÉMILE LEMOINE.....	107
Sur la racine carrée des nombres; par M. WEILL.....	128
Sur le développement des fonctions elliptiques en séries trigonométriques; par M. DE PRESLE.....	131
Extraits des procès-verbaux (séances du 15 avril 1885 au 21 juillet 1886).....	136
Bulletin bibliographique.....	142
Sur une généralisation du théorème de Kœnig, concernant la force vive d'un système matériel; par M. G. FOURET.....	141
Sur un mode de transformation des déterminants; par M. G. FOURET.....	146
Sur la valeur du reste des formules d'approximation pour le calcul des intégrales définies; par M. J. DERUYTS.....	151
Multiplication de deux déterminants de même degré; par M. A. DE PRESLE.	157
Questions de probabilité; par M. WEILL.....	158

PARIS. — IMPRIMERIE D'ATHÈS-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE
PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME QUINZIÈME.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1887

ERRATA.

Pages.

- 108, ligne 4 en remontant, au lieu de $2abx\beta \cos^2 c$, lisez $4abx\beta \cos^2 C$.
 111, ligne 13 en remontant, après BC, AC, AB, ajoutez et tangentes au cercle inscrit.
 112, ligne 17, après (J_a) , (J_b) , (J_c) , ajoutez et sont tangentes chacune à un des cercles ex-inscrits.
 112, ligne 22, au lieu de r_c, r_a, r_b , lisez r_a, r_b, r_c .
 ligne 24, au lieu de r_a, r_b, r_c , lisez r_c, r_a, r_b .
 ligne 26, au lieu de r_c, r_a, r_b , lisez r_b, r_c, r_a .
 112, après la ligne 26, ajouter : Les triangles formés par les droites (1), (6), (8); (J_a) , (6), (8); (J_a) (4), (7); (J_a) , (J_b) , (7); (J_a) , (J_b) , (8); etc., sont homothétiques avec ABC et les centres d'homothétie sont respectivement les points

$$\begin{array}{lll} -r_a, r_c, r_b; & r, r_c, r_b; & -r, r_b, r_c; \\ r_c, r_c, -r; & r_b, r_b, r; & \dots\dots\dots \end{array}$$

138. Dans le théorème V, ligne 4 de ce théorème, il faut ajouter, après ABC : si ce dernier est acutangle et inversement semblable s'il est obtusangle; et ligne 5, au lieu de : orthocentre de ABC, lisez : le point U dont les coordonnées sont : $a \tan A$, $b \tan B$, $c \tan C$ rencontré déjà page 118, ligne 9. Le point U est le centre d'homothétie du triangle formé par les pôles des côtés par rapport au cercle circonscrit et du triangle orthocentrique; la polaire trilinéaire de U est perpendiculaire à UK, K étant le point de Lemoine; UK est la polaire trilinéaire du symétrique de U par rapport à K.

COMMISSION D'IMPRESSION.

(ART. 20 DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.)

MM. HUMBERT,	{	Secrétaires de la Société.
WEILL,		
COLLIGNON,	{	Membres du Conseil.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE,		
JORDAN,		
MANNHEIM.		

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME QUINZIÈME. — ANNÉE 1886-87.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1887

,

‘

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

COMMISSION D'IMPRESSION.

(ART. 20 DU REGLEMENT ADMINISTRATIF.)

MM. HUMBERT,	}	Secrétaires de la Société.
WEILL,		
COLLIGNON,	}	Membres du Conseil.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE,		
JORDAN,		
MANNHEIM.		

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME QUINZIÈME. — ANNÉE 1886-87.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

—
1887

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1887 (').

Les initiales S. P. désignent les Sociétaires perpétuels.

Président.....	MM. FOURET.
Vice-Présidents	{ ANDRÉ. COLLIGNON. PICQUET. VICAIRE.
Secrétaires	{ HUMBERT. WEILL.
Vice-Secrétaires.....	{ PARAF. RAFFY.
Archiviste.....	SIMART.
Trésorier.....	CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil	{ APPELL. CLAYEUX. COMBEROUSSE (DE). DARBOUX. HALPHEN. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. JORDAN. LAISANT. MANNHEIM. PICARD. POINCARÉ. ROUCHÉ.
Membres du Conseil non résidents..	{ CREMONA. GENTY. MATHIEU. TCHÉBICHEFF.

(') MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

- ACHARD, directeur-adjoint de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de Chabrol, 40, à Paris.
- AMIGUES, prof. de Mathématiques spéciales au lycée, boulevard du Musée, 66, à Marseille.
- ANDRÉ (Désiré), docteur ès Sciences, place de la Sorbonne, 5, à Paris.
- APPELL, professeur à la Faculté des Sciences, rue Soufflot, 22, à Paris.
- ARNAUD, élève-ingénieur des Ponts et Chaussées, rue Hautefeuille, 9, à Paris.
- ARON (Henri), banquier, rue de Grammont, 14, à Paris.
- ASTOR, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard de Bonne, à Grenoble.
- AUBERT, ingénieur des Mines, à Tunis.
- AUTONNE, ingénieur des Ponts et Chaussées, place d'Helvétie, 7, à Lyon.
- BARBERENA, ingénieur topographe, à San-Salvador.
- BENOIST (Adolphe), docteur en droit, place du Châtelet, 3, à Chalon-sur-Saône (Saône-et-Loire), S. P.
- BERDELLE, ancien garde général des forêts, rue de Chosnot, à Besançon-Chaprais (Doubs).
- BERTRAND (Joseph), secrétaire perp. de l'Académie des Sciences, rue de Tournon, 4, à Paris.
- BISCHOFFSHEIM, banquier, rue Taitbout, 3, à Paris, S. P.
- BIENAYMÉ (Arthur), directeur des Constructions navales, à Toulon.
- BIENAYMÉ, membre de l'Institut (décédé), S. P.
- BONCOMPAGNI (le prince Balthasar), place Colonna, palais Piombino, à Rome.
- BOUNET (Ossian), membre de l'Institut, 42, rue des Écoles, à Paris.
- BORCHARDT, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé), S. P.
- BOUCHER, ancien directeur de l'École préparatoire des Sciences et Lettres, rue du Pin, 9, à Angers.
- BOLLANGER, professeur de Mathématiques, 116, rue Trallier, maison Deloncle, à Mustapha inférieure (Algérie).
- BRAULT (A.), négociant à Pons (Charente-Inférieure).
- BRIOSCHI, directeur de l'École Polytechnique, à Milan (Italie).
- BRISSE (Ch.), répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Becon, 55, à Courbevoie (Seine).
- BROCARD, capitaine à l'École régimentaire du Génie de Montpellier, S. P.
- BRINEL, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux (Gironde).
- CANTOR, professeur à l'Université de Halle %a Saal (Allemagne).
- CARON, professeur de Géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 82, à Paris.
- CASEY (John), professeur à l'Université catholique de Dublin, Stephens Green, 84.
- CASPARY, professeur au Collège Humboldt, à Berlin.
- CATALAN, professeur émérite à l'Université, à Liège (Belgique).
- CHASLES, membre de l'Institut (décédé), S. P.
- CHEVIN, ingénieur des Ponts et Chaussées, rue de Rennes, 73, à Paris.
- CHRISTAL, professeur à l'Université d'Édimbourg (Écosse).
- CIVILE, rue de la Tour-des-Dames, 2, à Paris.
- CLAYTON, intendant divisionnaire en retraite, avenue de Clichy, 52, à Paris.
- CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris, S. P.
- COLLIGNON, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, rue des Saints-Pères, 28, à Paris.
- COMBEROUSSÉ DE ., professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École Centrale, rue Blanche, 45, à Paris.
- COURCELLES, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, 36, rue Gay-Lussac, à Paris.
- CRAIG (Thomas), professeur à l'Université John Hopkins, Baltimore (Maryland).
- CREMONA, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome.
- CRETIN, professeur au lycée Saint-Louis, rue de Rennes, 107, à Paris.
- DARBOUX, professeur à la Faculté des Sciences, membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
- DAUTHVILLE, maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier (Hérault).
- DAVID, lieutenant-colonel d'Artillerie en retraite, place de l'École d'Artillerie, 42, à Toulouse.

- DEFFORGES**, capitaine d'infanterie, attaché à l'Etat-major du Ministre de la Guerre, rue de Grenelle Saint-Germain, 123, à Paris.
- DELANVOY**, sous-intendant militaire, à Orléans.
- DEWARTRES**, professeur à la Faculté des Sciences de Lille.
- DERUYTS**, docteur ès sciences, chargé de Cours à l'Université de Liège (Belgique).
- DEWULF**, colonel du Génie, à Bayonne.
- DUNCAN**, assistant à l'Université John Hopkins, à Baltimore.
- DOSTOR**, docteur ès sciences, impasse Royer-Collard, 4, à Paris.
- DREYFUS** (Ferdinand), publiciste, avenue Duquesne, 24, à Paris.
- DURRANDE**, professeur à la Faculté des Sciences, à Poitiers.
- DYCK WALTHER**, professeur au Polytechnicum, à Munich (Bavière).
- ESCAÏY**, professeur au Prytanée militaire, à la Flèche (Sarthe).
- FABRE**, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Trudaine, 26, à Paris.
- FIELDS** (John), à l'université de John Hopkins, à Baltimore.
- FERRAZ**, professeur au Lycée, à Toulouse (Haute-Garonne).
- FLEUREAU**, ingénieur des Ponts et Chaussées, au Puy (Haute-Loire).
- FLOQUET**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Saint-Lambert 17, à Nancy.
- FLYE SAINTE-MARIE**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue du Sommerard, 12, à Paris.
- FONTÈS**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Toulouse (Haute-Garonne).
- FOURET**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Washington, 16, à Paris.
- GABRIEL**, ingénieur des Ponts et Chaussées, agrégé de la Faculté de Médecine, rue Jouffroy, 39, à Paris.
- GAUTHIER-VILLARS**, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris, S. P.
- GENOCCHI**, professeur à l'Université, rue Rossini, 14, à Turin (Italie).
- GENTY**, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Oran.
- GERONO**, rue Hallé, 32 et 34, à Paris.
- GIROD** (A.), ingénieur des Manufactures de l'État, 63, quai d'Orsay, à Paris.
- COFFART**, 53, rue Nollet, à Paris.
- GOUSAT**, maître de Conférences à l'École Normale supérieure, 83, rue Denfert-Rochereau, à Paris.
- GRAINDORGE**, professeur à l'Université, rue Paradis, 92, à Liège (Belgique).
- GRIEY**, directeur de l'Observatoire, à Besançon.
- GUCCIA** (Jean), via Ruggiero Settimo, 28, à Palerme (Sicile).
- GUELOT**, lieutenant-colonel au 118^e régiment d'infanterie, à
- GUNTHER** (Dr Sigismond), député au Reichstag allemand, à Ansbach (Bavière).
- GUYON**, lieutenant de vaisseau, 13, rue de l'Université, à Paris.
- HAAG**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 1, à Paris.
- HABICH**, directeur de l'École des Mines, à Lima (Pérou).
- HALPHEN**, membre de l'Institut, chef d'escadron d'Artillerie, rue Sainte-Sophie, 17, à Versailles (Seine-et-Oise). S. P.
- HAUPTMANN**, ingénieur attaché aux chemins de fer russes.
- HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des Mines, avenue du Trocadéro, 9, à Paris, S. P.
- HATT**, ingénieur hydrographe, rue de l'Université, 13, à Paris.
- HENRIOT**, ingénieur des Mines, à Reims (Marne).
- HENRY**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Privas (Ardèche).
- HENRY** (Charles), bibliothécaire à la Sorbonne, boulevard Saint-Michel, 137, à Paris.
- HERMARY**, chef d'escadrons au 17^e régiment d'Artillerie, à Douai (Nord).
- HERMITE**, membre de l'Institut, rue de la Sorbonne, 2, à Paris, S. P.
- HIRST**, Athenæum Club, Londres (Angleterre), S. P.
- HOLST** (Elling), stipendiat de l'Université, Pilestrade, 49, à Christiania (Norvège).
- HOUBICANT**, chef de bataillon du Génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris.
- HUGO** (Comte L.), traducteur au Ministère des Travaux publics, rue des Saints-Pères, 14, à Paris.
- HUMBERT**, ingénieur des Mines, répétiteur à l'École Polytechnique, 161, boulevard Haussmann, à Paris.
- IMBER**, répétiteur à l'Ecole Centrale, boulevard Beaumarchais, 109, à Paris.

- JABLONSKI, professeur au lycée Charlemagne, 40, boulevard Saint-Germain, à Paris.
- JACQUIER, ingénieur des Ponts et Chaussées, directeur des Travaux publics à Saint-Denis (Réunion).
- JANIV, chef d'escadron au 17^e régiment d'Artillerie, à la Fère.
- JAVARY, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris.
- JORDAN, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique, rue de Varennes, 48, à Paris, S. P.
- JOUFFRET, chef d'escadrons d'Artillerie, à Palaiseau (Seine-et-Oise).
- JUNG, professeur à l'Institut technique supérieur, 7, via Principe Umberto, à Milan (Italie).
- KœNIGS, maître de conférences à l'École Normale supérieure, boulevard de Port-Royal, 72, à Paris.
- KOSTEVEC (Antoine), professeur au lycée communal, à Prague (Bohême).
- KOVALEWSKY (M^{me} DE), professeur à l'Université de Stockholm (Suède).
- KRONECKER (Dr Léopold), professeur à l'Université, Bellevuestrasse, 13, à Berlin.
- LACOR, rue de Vaugirard, 16, à Paris.
- LAFFON DE LADÉBAT, amiral (décédé), S. P.
- LAISANT, député, avenue Victor Hugo, 162, à Paris.
- LAQUIÈRE, administrateur de la commune mixte de Tababort (Constantine).
- LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
- LAVEISSIÈRE, rue de la Verrerie, 58, à Paris.
- LÉAUTÉ, directeur des études à l'école Monge, 141, boulevard Malesherbes, à Paris.
- LEBON (Ernest), professeur au lycée Charlemagne, 4 bis, rue des Ecoles, à Paris.
- LEFÈVRE, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, à Bar-le-Duc.
- LEMOINE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Littre, 5, à Paris.
- LE PAIGE, professeur à l'Université, rue des Anges, 21, à Liège (Belgique).
- LE PONT, quai de Paris, 30, à Cherbourg (Calvados).
- LESAGE, professeur au lycée Charlemagne, 6, rue d'Arras, à Paris.
- LESPIALLT, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux.
- LEVY (Léon), ingénieur des Mines, rue de Logelbach, 9, à Paris.
- LEVY (Lucien), directeur des Études de l'École préparatoire de Sainte-Barbe, rue Valette, à Paris.
- LÉVY (Maurice), membre de l'Institut, boul. Saint-Germain, 258, à Paris.
- LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
- LIGUVE, professeur à l'Université, à Odessa (Russie).
- LIE (Sophus), professeur à l'Université de Christiania.
- LINDEMANN, professeur à l'Université, Fragheimer-Pulverplatz, 5, à Königsberg (Allemagne).
- LIQUVILLE, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 40, à Paris.
- LORIV, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du faubourg Saint-Honoré, 186, à Paris.
- LUCAS, professeur au lycée Saint-Louis, 1, rue Boutarel, à Paris.
- LYON, étudiant en Mathématiques, boulevard Arago, 39, à Paris.
- MACÉ DE LÉPINAY, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV, rue de l'Odéon, 21, à Paris.
- MALEYX, professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs, 44, à Paris.
- MALLOIZEL, rue de l'Estrapade, 17, à Paris.
- MAXNHEIM, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris-Passy, S. P.
- MARCHAND, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de Poissy, 13, à Paris.
- MARSILLY (le général DE), rue Chante-Pinot, à Auxerre.
- MARTIN (Artemas), maître ès-arts, docteur en Philosophie, à Érié (Pensylvanie).
- MATHIEU (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, rue du Faubourg-Saint-Jean, 27, à Nancy.
- MAXIMOVITCH (Vladimir), professeur à l'Université de Kasan (Russie).
- MERCEREAU, licencié ès sciences, rue Gay-Lussac, 38, à Paris.
- MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).

- MOUTARD**, inspecteur général des Mines, examinateur à l'École Polytechnique, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
- NEUBERG**, professeur à l'Athénée royal, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).
- OCAGNE** (v'), ingénieur des Ponts et Chaussées, rue des Fonderies, 8, à Rochefort-sur-Mer (Charente-Infér.)
- OVIDIO** (Enrico d'), professeur à l'Université, piazza Statuto, 17, à Turin.
- PANEK** (Auguste), professeur au lycée communal, à Prague (Bohême).
- PARAF**, agrégé des Sciences mathématiques, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue de la Pépinière, 22, à Nancy.
- PARENTIER** (le général), membre du Comité des fortifications, rue du Cirque, 5, à Paris.
- PARRAN**, ingénieur des Mines, avenue de l'Opéra, 26, à Paris.
- PATURET**, ancien élève de l'École Polytechnique, à Valegnat, par Bellenaves (Allier).
- PAUTONNIER** (l'abbé), professeur au collège Stanislas.
- PELLET**, professeur à la Faculté des Sciences, à Clermont-Ferrand.
- PELLETREAU**, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Constantine (Algérie).
- PERCIN**, chef d'escadrons d'Artillerie, au 16^e d'Artillerie, à Clermont.
- PERRIN**, ingénieur en chef des Mines, rue Erpelle 5, au Mans, S. P.
- PEROTT** (Joseph), à Port-Navalo, par Arzon (Morbihan), S. P.
- PHILIPPON**, secrétaire de la Faculté des Sciences, à la Sorbonne, à Paris.
- PICARD** (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris.
- PICQUET**, capitaine du Génie, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Michel, 73, à Paris.
- PISTOYE** (DE), capitaine d'Artillerie, rue Montbaurin, 20, à Versailles.
- POINCARÉ**, membre de l'Institut, ingénieur des Mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63, à Paris.
- POKORNY** (Martin), directeur du lycée communal, à Prague (Bohême).
- POLIGNAC** (prince C. DE), villa Jessie, route de Grasse, à Cannes (Alpes-Maritimes), S. P.
- POUSSET**, professeur au lycée, à Poitiers.
- PRESLE** (DE), sous-intendant militaire en retraite, rue Monge, 82, à Paris.
- PRICE** (Bartholoméo), professeur à l'Université, à Oxford (Angleterre).
- PUCCIARELLI**, répétiteur au lycée Saint-Louis.
- PUTZ** (le général), rue Saint-Méry, 98, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
- RADAU**, rue de Tournon, 12, à Paris.
- RAFFY**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Denfert-Rochereau, 16, à Paris.
- RANCY** (DE), directeur général de la Compagnie d'assurances *le Soleil*, boulevard Malesherbes, 84, à Paris.
- REINACH** (baron DE), banquier, rue de la Bourse, 4, à Paris.
- REY** (Casimir), professeur à l'École régimentaire du Génie, boulevard de la Reine, 25, à Versailles.
- RIBACOUR**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Philippeville (Algérie).
- RIBOT**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, rue Jacotot, 1, à Dijon.
- RODET**, ingénieur à la Manufacture des tabacs, quai d'Orsay, 63, à Paris.
- ROCART**, ingénieur civil, boulevard Voltaire, 137, à Paris.
- BOUCHÉ** (Eugène), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, examinateur à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.
- ROUQUET**, professeur au lycée, Toulouse (Haute-Garonne).
- ROUSSELIN**, professeur au lycée Fontanes, boulevard Pereire, 124, à Paris.
- SAINT-PAUL** (DUC DE), chef d'état-major de l'artillerie du 10^e corps, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
- SARRAU**, membre de l'Institut, prof. à l'École Polytechnique, avenue Daumesnil, 9 bis, à Saint-Mandé (Seine).
- SARTIAUX**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, chef adjoint de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
- SAUVAGE**, professeur à la Faculté, Marseille (Bouches-du-Rhône).

SCHLEGEL (Dr Victor), à Waren (Allemagne).
SCHROUTE, professeur à Groningue (Hollande).
SCHUBERT, professeur, Steindam, 107, à Hambourg (Allemagne).
SÉGUY, rue Pascal, 2, à Paris.
SÉLIVANOFF, attaché à l'Université, à Saint-Petersbourg.
SIMART, lieutenant de vaisseau, examinateur d'admission à l'École navale, rue de Miroménil, 70, à Paris.
SIMONNET, chef d'escadron d'artillerie, à Versailles.
SONINE (Nicolas), professeur à l'Université, à Varsovie (Russie).
STARKOFF (Alexis), professeur à l'École de Commerce, rue Forgowa, 49, à Odessa (Russie).
STEPHANOS (Dr Cyparissos), professeur à l'Université d'Athènes (Grèce).
STIELTJES, professeur à la Faculté des Sciences, rue d'Alsace-Lorraine, 48, à Toulouse.
STUDNICKA, professeur à l'Université, à Prague (Bohème).
SYLOW, professeur à l'Université, Frederikshald (Norvège, S. V.).
TANNERY (Paul), ingénieur du service de l'expertise à la Manufacture des Tabacs, faubourg Saint-Honoré, 221, à Paris, S. P.
TANNERY, sous-directeur de l'École Normale supérieure, 45, rue d'Ulm, à Paris.
TARRY (Gaston), receveur des Contributions diverses, rue Clauzel, à Alger.
TCHÉBICHEFF, membre de l'Académie des Sciences, à Saint-Petersbourg.
THEWISS, docteur ès sciences de l'Université de Liège, rue Casimir-Delavigne, 3, à Paris.
TERRIER, professeur de Mathématiques, rue Monsieur-le-Prince, 18, à Paris.
TISSOT, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Voreppe (Isère).
TISSERAND, membre de l'Institut, avenue de l'Observatoire, 5, à Paris.
TRESCA, ingénieur des Ponts et Chaussées, château de Courtozé, par Vendôme (Loir-et-Cher).
VACQUANT, inspecteur général de l'Université, boulevard Saint-Michel, 12, à Paris.
VANDANE, lieutenant d'artillerie, démissionnaire, rue de la Vignette, 65, à Lille.
VANĚCEK (J.-S.), professeur au lycée, à Jičín (Bohème).
VANĚCEK (M.-M.), répétiteur de l'École Polytechnique tchèque, à Prague (Bohème).
VICAIRE, ingénieur en chef des Mines, rue Gay-Lussac, 30, à Paris.
VIELLARD, manufacturier, aux forges de Morvillars (territoire de Belfort).
YOLLOT (Jules), professeur de Mathématiques au lycée, à Alger.
WALCKENAER, ingénieur des Mines, 9, rue Bayard, à Paris.
WEILL, professeur de Mathématiques, 8 bis, rue de la Station, au Vésinet (Seine-et-Oise).
WEYR (Dr Édouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohème).
WEYR (Dr Émile), professeur à l'Université, Hauptstrasse, 109, à Vienne (Autriche).
WILSON, député, au palais de l'Élysée, à Paris.
WORMS DE ROMILLY, ingénieur en chef des Mines, rue de Balzac, 7, à Paris.
ZABOUDSKY, capitaine de l'Artillerie russe, professeur à l'École d'Artillerie, à Saint-Petersbourg.
ZELLER (Charles), recteur du séminaire, à Markgrœningen, Wurtemberg.
ZEUTHEN, professeur à l'Université, Citadelsvej, 9, à Copenhague.

SOCIÉTAIRES PERPETUELS.

BENOIST, docteur en droit.
BISCHOFFSHEIM, banquier.
BIENAYMÉ, membre de l'Institut (décédé).
BORCHARDT, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé).
BROCARD, capitaine du Génie.

CHASLES, membre de l'Institut (décédé).
CLAUDE-LAFONTAINE, banquier.
GAUTHIER-VILLARS, éditeur.
MALPHER, répétiteur à l'École Polytechnique.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut.
HERMITE, membre de l'Institut.
HIRST, directeur des études de l'École navale de Greenwich.
JORDAN, membre de l'Institut.
LAFFON DE LADÉBAT, amiral (décédé).
MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique.
PEROTT (Joseph).
FERRIN, ingénieur en chef des Mines.
POLIGNAC (prince C. de).
RAPPY, maître de conférences à la Faculté des Sciences.
SYLOW, professeur à l'Université, Frederikshald.
TANNERY (Paul), ingénieur des manufactures de l'État.
TARRY, receveur des Contributions diverses.
ICHERICHEFF, membre de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg.
VIILLARD, manufacturier.

Modifications survenues depuis le 1^{er} janvier 1886.

DÉMISSIONNAIRES.

BRESARD, professeur, à Paris.
COLLET, professeur à la Faculté de Grenoble.
MILAIKE, professeur, à Douai.
LECORNU, à Caen.

NOUVEAUX MEMBRES.

BARBERENA, ingénieur topographe, à San-Salvador.
BRUNEL, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.
CASPARY, professeur au collège Humboldt, à Berlin.
DUNCAN, assistant à l'Université John Hopkins.
FIELDS, professeur à l'Université John Hopkins.
HAUPTMANN, ingénieur aux Chemins de fer russes.
LIUVILLE, répétiteur à l'École Polytechnique.
LYON, étudiant en Mathématiques, à Kharkof.
MAXIMOVITCH, professeur à l'Université de Kasan.
STIELTJES, professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.
THEWISS, docteur de l'Université de Liège.

DÉCÈS.

LACUERRE, membre de l'Institut.
MALMSTÉN, conseiller d'État, à Upsal.
TRASBOT, ancien élève de l'École Polytechnique.
SYLVA (DA), à Lisbonne.
MUGONJOT, répétiteur à l'École Polytechnique.

**Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.**

Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.
 Académie des Sciences de Berlin.
 Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.
 Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, à Bruxelles.
 Académie des Arts et des Sciences du Connecticut (Etats-Unis d'Amérique).
 Académie des Sciences de Munich.
 Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.
 Académie des Sciences de Paris.
 Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg.
 Académie des Sciences de Prague.
 Académie Royale des *Lincei*, à Rome.
 Académie Impériale des Sciences de Vienne.
Acta Mathematica (rédacteur M. Mittag-Leffler, à Stockholm).
American Journal of Mathematics, publié par l'Université de John Hopkins, à Baltimore (rédacteur M. Thomas Craig, à Baltimore).
Annales de l'École Normale supérieure.
Annali di Matematica (rédacteur M. Brioschi, à Milan).
Archiv for Matematik og Naturvidenskab (rédacteurs MM. S. Lie et W. Muller, à Christiania).
Archiv für Mathematik und Physik (rédacteur Dr Hoppe, Prinzenstrasse, 69, à Berlin, S. W.).
 Association française pour l'avancement des Sciences, à Paris.
 Bulletin des Sciences mathématiques (rédacteur M. Darboux).
Casopis pro pěstování matematiky a fysiky (rédacteur M. Eduard Weyr, à Prague).
Circolo Matematico, à Palerme.
 École Royale Normale supérieure de Pise.
Giornale di Matematiche (rédacteur M. Battaglini, à Rome).
 Institut Royal de Luxembourg.
 Institut Royal lombard des Sciences et Lettres, à Milan.
 Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts, à Venise.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (rédacteur M. Carl Ohrtmann, à Berlin).
Jornal de Sciencias matematicas e astronomicas (rédacteur M. Gomes Teixeira, à Coïmbre).
Journal de l'École Polytechnique.
Journal für die reine und angewandte Mathematik, à Berlin.
Mathematische Annalen (rédacteur M. Felix Klein, à Leipzig).
Mathesis (rédacteurs MM. Mansion, à Gand, et Neuberg, à Liège).
Meteorologische Zeitschrift.
 Société mathématique d'Amsterdam.
 Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.
 Société philosophique de Cambridge.
 Société Royale d'Édimbourg.
 Société des Sciences de Finlande, à Helsingfors.
 Société Royale des Sciences de Goettingue.
 Société mathématique de Hambourg.
 Société hollandaise des Sciences, à Harlem (Hollande).
 Société mathématique de Kharkoff (Russie).
 Société astronomique de Londres.
 Société mathématique de Londres.
 Société Royale de Londres.
 Société mathématique de Moscou.

Société mathématique d'Odessa (Russie).

Société philomathique de Paris.

Société mathématique de Prague.

Société Royale des Sciences de Saxe, à Leipzig.

Société Royale des Sciences d'Upsal (Suède).

Société des Sciences naturelles de Zurich.

Société scientifique de Bruxelles.

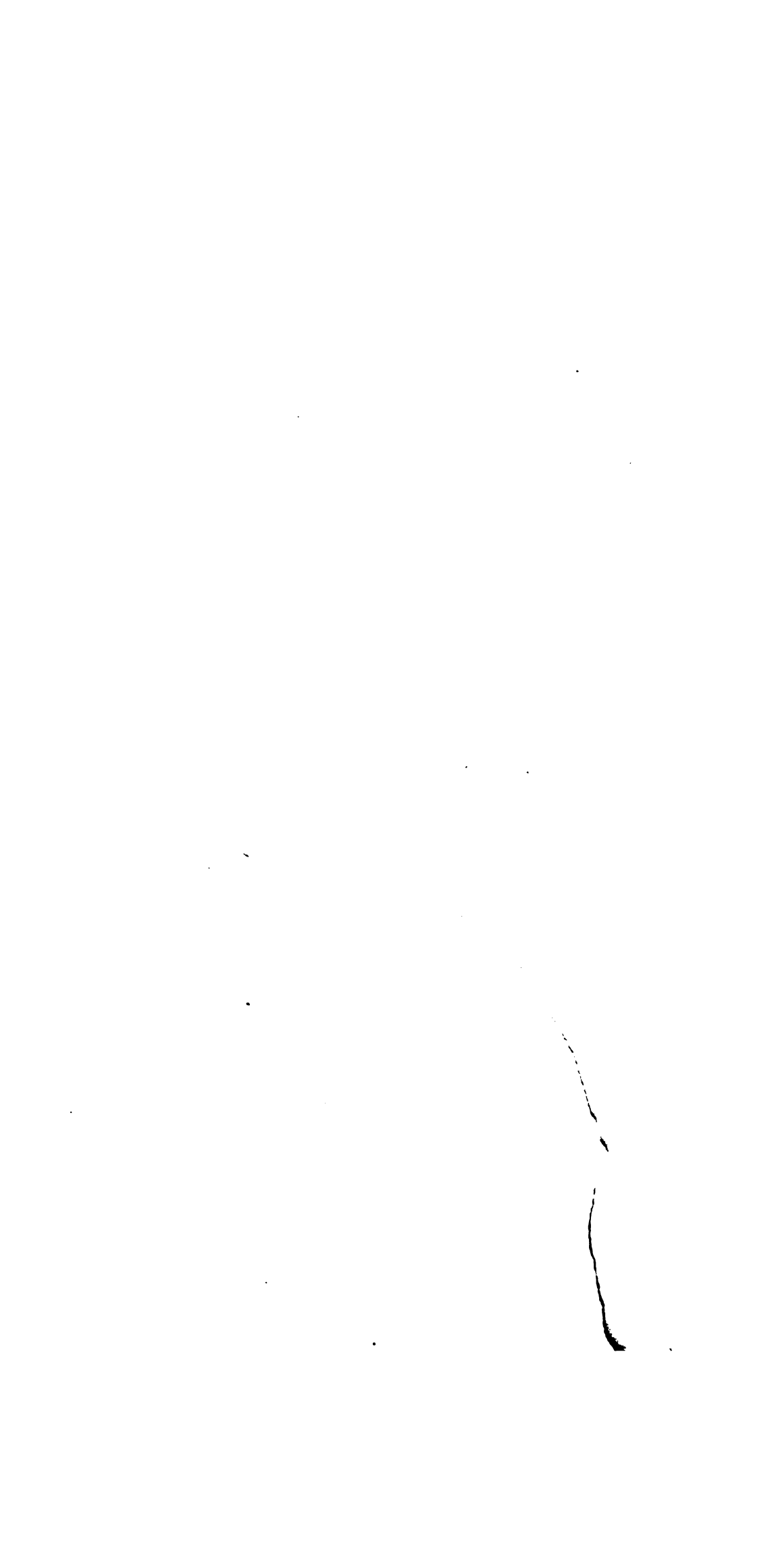
Université Royale de Pise.

Tidskrift for Mathematik (rédacteur M. Zeuthen, à Copenhague).

Tijdschrift voor Wiskunde, rekenkunde en de beginselen der Natuurkunde (rédacteur M. Versluys, à Amsterdam).

Zeitschrift für Mathematik und Physik (rédacteur Dr Oscar Schlömilch, à Dresde).





STATUTS DE LA SOCIÉTÉ.

ARTICLE PREMIER. — La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et par la publication des mémoires de ses membres. Son siège est à Paris.

ART. 2. — Aucune communication ou discussion ne peut avoir lieu sur des objets étrangers aux Mathématiques.

ART. 3. — La Société se compose de membres résidents et de membres non résidents.

Les Français et les Étrangers peuvent également en faire partie.

ART. 4. — Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont les suivantes : 1° être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée ; 2° obtenir à l'une des séances suivantes les suffrages de la majorité des membres présents.

ART. 5. — Le nombre des membres résidents et non résidents est illimité.

ART. 6. — L'administration de la Société est confiée à un conseil composé :

1° Des membres du bureau ;

2° De douze autres membres résidents de la Société désignés par l'élection ;

3° De quatre membres non résidents désignés par l'élection ; ils auront voix délibérative dans le conseil lors de leur présence à Paris.

ART. 7. — Le conseil est présidé par le président de la Société.

ART. 8. — Le bureau est composé de :

- 1 président ;
- 4 vice-présidents ;
- 2 secrétaires ;
- 2 vice-secrétaires ;
- 1 trésorier ;
- 1 archiviste.

ART. 9. — Le président est élu pour un an.

Les vice-présidents sont nommés pour deux ans.

Deux d'entre eux sont remplacés chaque année.

Les secrétaires et les vice-secrétaires sont élus pour deux ans.

Le trésorier et l'archiviste pour trois ans.

ART. 10. — Le président n'est pas rééligible immédiatement dans les mêmes fonctions.

ART. 11. — Parmi les douze membres du conseil qui résident à Paris et qui ne font pas partie du bureau, quatre sont remplacés chaque année à tour de rôle.

ART. 12. — Tous les membres de la Société sont appelés à participer à l'élection du président, soit directement, soit par correspondance.

ART. 13. — Les autres membres du bureau et les membres du conseil sont élus à la majorité absolue des membres présents.

ART. 14. — Les ressources de la Société se composent : 1° de la cotisation annuelle des membres résidents et non résidents, et dont le montant est fixé par le règlement administratif de la Société; 2° du revenu du capital formé par les droits d'admission, les souscriptions perpétuelles, le produit de la vente des ouvrages édités par la Société et les dons qu'elle pourra recevoir.

ART. 15. — La Société règle annuellement le budget de ses dépenses.

Dans la première séance de chaque année, le compte détaillé des recettes et dépenses de l'année révolue sera soumis à l'approbation de la Société; ce compte rendu sera publié dans le *Bulletin*.

RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.

CHAPITRE PREMIER.

CONDITIONS D'ADMISSION.

1. Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont :

1° D'être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée;

2° D'obtenir, à l'une des séances suivantes, les suffrages de la majorité des membres présents (art. 4 des statuts).

2. Le diplôme délivré est signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et porte le sceau de la Société.

Le trésorier remet le diplôme après l'acquittement du droit d'admission, montant à 10 francs, et de la cotisation annuelle.

CHAPITRE II.

TRAVAUX ET PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ.

Tenue des séances.

3. La Société tient ses séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances : août, septembre et octobre.

4. La première séance de janvier est consacrée spécialement aux élections pour le remplacement des membres sortants du bureau et du conseil.

5. Le tableau des jours de réunion est imprimé sur une carte adressée aux membres résidant à Paris.

Elle sera également envoyée aux membres non résidents sur leur demande personnelle.

Les membres sont convoqués à domicile pour les séances extraordinaires.

6. Pour assister à la séance, les personnes étrangères à la Société doivent être introduites, chaque fois, par un de ses membres.

7. La présence du président ou d'un vice-président, assisté d'un des secrétaires ou vice-secrétaires, suffit pour constituer le bureau à chaque séance.

8. En cas d'absence du président ou des vice-présidents, le trésorier, ou à son défaut l'archiviste, occupe le fauteuil.

En cas d'absence de tous les membres du bureau, les fonctions du président sont remplies par le plus âgé des membres du conseil présents à la séance.

En cas d'absence des secrétaires et vice-secrétaires, le président du jour désigne un des membres du conseil pour en remplir les fonctions.

9. Les procès-verbaux des séances sont rédigés dans l'intervalle d'une séance à l'autre.

Chaque séance commence par la lecture du procès-verbal de la séance précédente et de l'ordre du jour.

10. Les communications faites par les membres de la Société ont lieu dans l'ordre de leur inscription; les communications des personnes étran-

gères à la Société ont lieu après celles des membres, sauf les cas d'urgence qui seront appréciés par le bureau.

Les membres qui auront fait des communications verbales ou pris part aux discussions devront remettre des notes au secrétaire pour la rédaction du procès-verbal.

11. Dans les séances ordinaires, on ne peut traiter aucune question relative à l'administration, à moins d'une demande du conseil.

12. Toutes les observations relatives à l'administration sont adressées par écrit au président, qui en réfère au conseil, à sa plus prochaine réunion.

Bulletin.

13. La Société, préoccupée des avantages qu'elle peut offrir à tous ses membres, a décidé que le recueil intitulé : *Bulletin de la Société mathématique*, qui rend compte des mémoires présentés à la Société, sera distribué gratuitement à tous les membres résidents ou non résidents.

14. Les conventions stipulées entre le conseil de la Société et les éditeurs chargés de la publication du *Bulletin* devront être soumises à l'approbation de la Société.

Réimpression des ouvrages anciens et publication des mémoires originaux.

15. La Société, voulant concourir aux progrès des Mathématiques par tous les moyens compatibles avec son mode d'organisation, avisera aux moyens de publier successivement, et d'une manière aussi complète qu'il sera possible ou utile de le faire, les œuvres des anciens mathématiciens français ou étrangers.

La Société se réserve la faculté de publier les mémoires originaux trop étendus pour paraître dans le *Bulletin*.

16. Les publications émanant de la Société, autres que le *Bulletin*, sont délivrées à prix réduit à tous les membres de la Société résidents ou non résidents

CHAPITRE III.

ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ.

17. Chaque élection a lieu au scrutin secret, sur un seul bulletin, et, s'il est nécessaire, au moyen de deux tours, dont le second est de ballottage. Dans le cas d'égalité de voix, le plus âgé l'emporte.

18. L'élection du président seule donne lieu au vote de tous les membres résidents ou non résidents. Tout membre qui ne peut assister à la réunion

électorale est invité à envoyer au secrétaire, avant la première séance de janvier, son suffrage individuel dans un bulletin cacheté et enfermé dans une lettre signée de lui.

Ce bulletin ne peut être ouvert qu'au moment du dépouillement du scrutin.

19. Les secrétaires ou, à leur défaut, les vice-secrétaires rédigent les procès-verbaux des séances de la Société et des séances du conseil.

20. Une commission d'impression, composée des secrétaires et de quatre membres nommés par le conseil, dirige la publication du *Bulletin* et l'impression des mémoires et communications.

21. Sous la direction du président, les secrétaires sont chargés de la correspondance pour ce qui concerne les travaux et les affaires de la Société autres que les affaires de finances : ils convoquent la Société, le conseil et les commissions quand il y a lieu, et préparent les ordres du jour.

22. La Société forme une bibliothèque et échange ses publications contre les journaux et les recueils consacrés aux Mathématiques pures et appliquées, publiés en France et à l'étranger.

23. L'archiviste est chargé de la garde des archives de la Société; il en dresse un inventaire.

Il a sous sa direction la bibliothèque; il dresse le catalogue des livres et brochures imprimés, et tient un registre des manuscrits envoyés.

Enfin, il a sous sa garde tous les documents appartenant à la Société.

24. Le trésorier est chargé du recouvrement des sommes dues à la Société.

25. Il tient un registre des recettes et des dépenses, que tous les membres ont le droit de consulter.

26. Le trésorier ne peut faire aucun emploi extraordinaire des fonds de la Société sans une délibération spéciale du conseil.

Conseil et commissions.

27. Le président convoque le conseil toutes les fois que les affaires de la Société le réclament.

28. Il suffit d'une demande motivée, signée par cinq membres du conseil et adressée au président, pour qu'une convocation du conseil soit obligatoire.

29. A chaque séance du conseil, les noms des membres présents sont consignés au procès-verbal.

30. Il faut au moins sept membres présents pour prendre des décisions en conseil.

31. Sur la proposition de cinq membres, le vote peut avoir lieu au scrutin secret.

32. Sur la demande de cinq membres, il peut être fait appel à la Société des décisions qui n'auraient pas été prises aux deux tiers des voix au sein du conseil.

33. Les procès-verbaux des séances du conseil doivent être transcrits sur un registre coté et parafé par le secrétaire; ils doivent être signés par le président et le secrétaire qui a tenu la plume; les renvois doivent être parafés et les mots rayés approuvés.

34. Le conseil se réunit dans la dernière quinzaine de décembre pour examiner l'état des affaires de la Société, nommer la commission de comptabilité chargée de vérifier la gestion du trésorier, et la commission des archives chargée de vérifier celle de l'archiviste.

35. Ces deux commissions ne peuvent être composées de moins de trois membres; elles font leur rapport dans la première séance de janvier.

36. Le conseil désigne annuellement, à la même époque, les membres qui, adjoints aux deux secrétaires, composent la commission permanente d'impression pour la publication du *Bulletin* et l'insertion des notes et mémoires des membres de la Société.

Cette commission veille à ce qu'il ne s'introduise dans les publications rien d'étranger à la Science.

37. Les membres élus de la commission d'impression sont nommés pour trois ans.

Les membres de la commission d'impression peuvent être pris indistinctement dans la Société ou dans le conseil.

CHAPITRE IV.

PROPRIÉTÉS, REVENUS ET DÉPENSES DE LA SOCIÉTÉ.

38. Les versements des membres résidents et non résidents se composent :

- 1° Du droit d'admission, montant à 10 francs;
- 2° De la cotisation annuelle.

39. Pour les membres résidents, cette cotisation annuelle s'élève à 20 francs, payables d'avance, et, pour les membres non résidents, à 15 francs, également payables d'avance.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leurs occupations habituelles, ou y exercent habituellement leurs fonctions.

40. Les nouveaux membres devront payer la totalité de la cotisation, quelle que soit l'époque de leur admission.

41. Les publications ne seront adressées qu'après le versement de la cotisation annuelle.

42. Tout membre qui n'aura pas acquitté la cotisation d'une année sera, après avertissement préalable du trésorier, considéré comme démissionnaire.

43. La cotisation annuelle peut, au choix de chaque membre, être remplacée par une somme de 300 francs une fois payée.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

44. Les dons faits à la Société sont inscrits au *Bulletin des séances* avec le nom des donateurs.

45. Les dépenses sont divisées en ordinaires et extraordinaires.

Les dépenses ordinaires se composent de frais de bureau et d'imprimés, ports de lettres, frais d'entretien, loyer du local, appointements des employés et frais d'impression du *Bulletin*. Le chiffre des dépenses ordinaires ne peut excéder les $\frac{2}{17}$ des ressources annuelles.

Les dépenses extraordinaires sont votées par la Société sur la proposition du conseil.

46. La Société ne s'engage jamais dans aucune dépense excédant son avoir:

CHAPITRE V.

REVISION DES STATUTS CONSTITUTIFS OU DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.

47. Toute proposition de revision des statuts constitutifs ou du règlement administratif ne pourra être prise en considération que si elle est signée collectivement par vingt membres.

48. Le président fera, dans ce cas, procéder à un scrutin pour la nomination d'une commission de revision, qui sera composée de quatre membres du conseil et de trois membres pris en dehors.

49. La discussion du projet exigera la présence de la moitié plus un des membres résidant à Paris.

Tous les membres sont convoqués par lettres spéciales.

50. Si le nombre ci-dessus n'est pas atteint, la discussion aura lieu dans la séance suivante, quel que soit le nombre des membres présents.



AVIS.

La Rédaction a l'honneur de prévenir MM. les Auteurs que le Conseil de la Société mathématique, dans sa séance du 16 décembre 1881, a pris les décisions suivantes :

1° *La Société prendra à sa charge la moitié de la dépense des tirages à part d'auteur, pour cinquante exemplaires et au-dessous.*

2° *Pour plus de cinquante exemplaires, la Société payera la moitié du prix de cinquante exemplaires, au tarif fixé pour le tirage à cinquante exemplaires.*

Il résulte de là que les auteurs auront à déboursier les sommes suivantes :

NOMBRE DES EXEMPLAIRES.	25.	50.	100.	200.	300.	400.	500.	1000.
Pour $\frac{1}{4}$ feuille	3,65	4,25	6,75	13,25	19,75	26,25	32,75	65,25
» $\frac{1}{2}$ »	4,15	5,00	8,50	16,00	23,50	31,00	38,50	76,00
» $\frac{3}{4}$ »	6,15	7,25	11,25	20,75	30,25	39,75	49,25	96,75
» 1 »	6,90	8,25	12,75	23,75	34,75	45,75	56,75	111,75

dont ils seront facturés directement par l'imprimerie Gauthier-Villars.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur le développement des fonctions en séries par la formule de Maclaurin, dans le cas d'une variable réelle; par M. O. CALLANDREAU.

(Séance du 4 janvier 1887.)

Quand on se propose de développer, dans le cas de fonctions et de variables réelles, une fonction $f(x)$ en série procédant suivant les puissances entières de x , le théorème de Cauchy réduit, comme on sait, la question à l'étude des points critiques de la fonction $f(z)$, z désignant une variable imaginaire.

Il peut arriver, d'autre part, que la légitimité du développement de $f(x)$ en série soit facile à établir quand x ne dépasse pas une certaine valeur $x = a$. La série obtenue étant supposée convergente pour les valeurs de x plus grandes que a , il est naturel de penser que la représentation de $f(x)$ par la série s'étend au delà de la limite $x = a$. Je me propose de montrer que la représentation de la fonction par la série pourra être continuée tant qu'on ne sera pas arrêté par une discontinuité des dérivées $f^n(x)$ ou par la limite de convergence de la série.

Quand on se place au point de vue des applications, pour lesquelles il est également important d'obtenir l'expression analy-

tique des coefficients de la série et de démontrer la possibilité du développement, la seconde manière d'aborder le problème de développement de $f(x)$ en série peut avoir ses avantages; en effet, de l'expression analytique supposée connue des coefficients, on pourra souvent déduire la condition de convergence de la série.

Dans ce qui suit, il est entendu que la fonction $f(x)$, pour les valeurs de x qu'on envisage, est définie par une *même* expression bien déterminée, et qu'il en est ainsi des dérivées $f^n(x)$.

1. Supposons d'abord que les coefficients de la série

$$(1) \quad f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{1.2.3\dots n} f^n(0) + \dots$$

soient tous positifs, qu'ils ne croissent pas à partir d'un certain rang, qu'on ait établi la légitimité de la représentation de la fonction $f(x)$ par la série ci-dessus pour les valeurs positives de x inférieures ou égales à un nombre donné a plus petit que l'unité. J'vais montrer qu'on peut prolonger la représentation de la fonction par la série jusqu'à ce qu'on soit arrêté par une discontinuité des dérivées $f^n(x)$ ou par la limite de convergence de la série (1).

Quand on prend la somme des n premiers termes de la série (1), le reste R_n est donné par la formule

$$(2) \quad R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1} x^n}{1.2.3\dots(n-1)} f^n(\theta x);$$

θ est un nombre positif compris entre zéro et l'unité, et l'on doit avoir

$$(3) \quad (1-\theta)^{n-1} f^n(\theta x) = \int_0^1 (1-t)^{n-1} f^n(tx) dt.$$

Soit $0 \leq x \leq a$.

D'après les nos 112 et 127 de l'*Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, de M. J. Tannery, on est en droit, pour les valeurs indiquées de x , de remplacer les symboles $f^n(\theta x)$ et $f^n(tx)$ par les séries déduites de (1). Divise-t-on les deux membres de (3) par le terme indépendant de x dans $f^n(\theta x)$ et $f^n(tx)$, a-t-on égard à la décroissance des coefficients de (1), on voit que

l'inégalité

$$\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(1-\theta x)^{n+1}} > \frac{1}{n} + \text{termes positifs}$$

doit avoir lieu, et de là résulte que θ est nécessairement plus petit que toute quantité donnée à partir d'une valeur de n suffisamment grande.

En effet, multiplions les deux membres par $\frac{1-\theta x}{1-\theta}$, quantité plus grande que l'unité, il vient

$$\left(\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right)^n > \frac{1}{n}.$$

Déterminons une quantité θ_0 , comprise entre zéro et l'unité, par l'équation

$$\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_0 x}\right)^n = \frac{1}{n};$$

on aura évidemment

$$\frac{1-\theta}{1-\theta x} > \frac{1-\theta_0}{1-\theta_0 x},$$

d'où

$$\theta_0 > \theta;$$

θ_0 est donc une limite supérieure de θ .

Ensuite

$$\log \frac{1-\theta_0}{1-\theta_0 x} = -\frac{\log n}{n} = -\nu,$$

ν étant une quantité positive tendant vers zéro quand n augmente indéfiniment;

$$\frac{1-\theta_0}{1-\theta_0 x} = 1-\nu', \quad \theta_0 = \frac{\nu'}{1-x+\nu'x},$$

ν' ayant la même signification que ν . Donc θ_0 varie dans le même sens que ν' et s'approche de plus en plus de zéro à mesure que n augmente.

Il importe de remarquer que la limite supérieure θ_0 de θ sera la même pour toutes les fonctions $f(x)$ remplissant les conditions indiquées ci-dessus.

2. On aura à raisonner dans un moment sur l'équation obtenue en différentiant par rapport à x les deux membres de l'équation (3);

j'écris par avance l'équation dérivée

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} -[(n-1)f^n(0x) - (1-0)f^{n+1}(0x)x](1-0)^{n-2} \frac{d0}{dx} \\ + (1-0)^{n-1} f^{n+1}(0x)0 \\ = \int_0^1 (1-t)^{n-1} t f^{n+1}(tx) dt, \end{array} \right.$$

et je fais quelques remarques préliminaires.

a. Soit $0x \leq a$.

La quantité entre crochets dans l'équation (4) devient, quand on remplace les symboles $f^n(0x)$, $f^{n+1}(0x)$ par les séries correspondantes déduites de (1),

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (n-1)f^n(0) - f^{n+1}(0)x \\ + \frac{0x}{1} [nf^{n+1}(0) - f^{n+2}(0)x] \\ + \frac{0^2 x^2}{1.2} [(n+1)f^{n+2}(0) - f^{n+3}(0)x] + \dots \end{array} \right.$$

Pour éviter des distinctions qui n'ont pas d'effet essentiel (on le verra par la suite), je considère spécialement les cas de décroissance des coefficients de la série (1), pour lesquels, à partir d'une valeur de n , on ait toujours

$$(6) \quad \frac{f^{n+1}(0)}{(n-1)f^n(0)} < 1.$$

La valeur de x est supposée donnée, comprise entre zéro et l'unité, la dernière limite exclue, c'est-à-dire que $0 \leq x \leq 1 - \varepsilon$, ε étant une quantité donnée très petite.

La somme de la série (5) sera évidemment plus grande que celle de la série

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} (n-1)f^n(0)(1-x) + \frac{0x}{1} nf^{n+1}(0)(1-x) \\ + \frac{0^2 x^2}{1.2} (n+1)f^{n+2}(0)(1-x) + \dots, \end{array} \right.$$

et, *a fortiori*, plus grande que

$$(8) \quad (n-1)(1-x)f^n(0x).$$

Donc

$$(9) \quad (n-1)f^n(\theta x) - (1-\theta)f^{n+1}(\theta x)x > (n-1)(1-x)f^n(\theta x);$$

il en résulte aussi

$$(10) \quad (x - \theta x)f^{n+1}(\theta x) < (n-1)f^n(\theta x)x.$$

b. Soit, pour abréger l'écriture, $\theta x = u$, quantité essentiellement positive; pour une valeur voisine $x + x'$ de x , u deviendra $u + u'$, quantité aussi positive; si l'on a

$$u + |u'| \leq a,$$

les $f^n(u + u')$, d'après l'hypothèse admise, seront développables par la formule de Taylor, suivant les puissances de u' :

$$f^n(u + u') = f^n(u) + \frac{f^{n+1}(u)}{1} u' + \frac{f^{n+2}(u)}{1.2} u'^2 + \dots$$

(TANNERY, Ouvrage cité, n° 112).

c. n ayant une valeur *fixée*, assez grande pour que la valeur b de θx pour $x = x_0 = a$ soit plus petite qu'une quantité donnée très petite (elle sera certainement plus petite que x_0), étudions la fonction θ de x définie par l'équation (3); à cet effet, remplaçons-y x par $x_0 + x'$, θx par $b + u'$. Le premier membre de (3) pourra être développé en série absolument convergente suivant les puissances de u' et x' , si l'on a

$$b + |u'| < a, \quad x_0 > |x'|, \quad x_0 - b > |x'| + |u'|;$$

ce qui a toujours lieu quand x' et u' sont assez petits. Considérons spécialement le développement suivant les puissances de u' , le coefficient de u' sera

$$\frac{(x_0 - b + x')^{n-2}}{(x_0 + x')^{n-1}} [(x_0 - b + x')f^{n+1}(b) - (n-1)f^n(b)].$$

Soit C la quantité entre crochets,

$$C(x_0 - b) = (x_0 - b + x')(x_0 - b)f^{n+1}(b) - (n-1)(x_0 - b)f^n(b);$$

l'inégalité (10) donne, en remplaçant x par x_0 et θx par b ,

$$(x_0 - b)f^{n+1}(b) < (n-1)x_0 f^n(b);$$

de là, parce que $x_0 - b + x'$ est positif,

$$C(x_0 - b) < (n - 1) f^n(b) [(x_0 - b + x') x_0 - (x_0 - b)];$$

tant que

$$|x'| < (1 - x_0) \left(1 - \frac{b}{x_0}\right),$$

C sera certainement négatif.

Cela posé, la continuité de u s'établit par un raisonnement analogue à celui qu'on emploie pour démontrer la continuité des racines d'une équation algébrique (BRIOT et BOUQUET, *Fonctions elliptiques*, n° 28), lequel subsiste, d'après les conditions trouvées ci-dessus, tant qu'on n'a pas $u = a$, $x = 1$.

3. Prenons les dérivées par rapport à x des deux membres de l'équation (3); x étant compris dans l'intervalle pour lequel la continuité est établie, les dérivées $f^n(x)$ étant supposées continues, on a le droit d'écrire

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} -[(n-1)f^n(\theta x) - (1-\theta)f^{n+1}(\theta x)x](1-\theta)^{n-2} \frac{d\theta}{dx} \\ + (1-\theta)^{n-1} f^{n+1}(\theta x)\theta \\ = \int_0^1 (1-t)^{n-1} t f^{n+1}(tx) dt. \end{array} \right.$$

La dérivée $\frac{d\theta}{dx}$ est finie et déterminée dans tout l'intervalle et même quand θx atteint la valeur a [condition (9)].

L'intégrale du second membre est évidemment positive si $x \leq a$; elle ne peut changer de signe que pour une valeur de x , telle que $x' > a$.

Soit.

$$a \leq x \leq 1 - \varepsilon,$$

ε étant une quantité très petite, mais donnée.

Considérons d'abord le cas où toutes les dérivées $f^n(x)$ demeurent positives dans l'intervalle désigné des valeurs de x . Je dis qu'à partir d'une valeur de n assez grande θx ne peut atteindre la valeur a dans le même intervalle. En effet, si l'on avait

$$\theta x = a, \quad \text{pour} \quad x = 1,$$

dans l'intervalle (a, x) , on aurait, l'intégrale du second membre

de (11) étant positive,

$$-[(n-1)f^n(\theta x) - (1-\theta)f^{n+1}(\theta x)x](1-\theta)^{n-1}\frac{d\theta}{dx} \\ + (1-\theta)^{n-1}f^{n+1}(\theta x)\theta > 0;$$

d'où, successivement, en vertu des conditions (9) et (10),

$$\frac{d\theta}{dx} < \frac{(1-\theta)f^{n+1}(\theta x)\theta}{(n-1)(1-x)f^n(\theta x)} < \frac{\theta}{1-x}, \\ \frac{d(\theta x)}{dx} < \frac{\theta}{1-x}, \\ (12) \quad \frac{1}{\theta x} \frac{d(\theta x)}{dx} < \frac{1}{x(1-x)};$$

puis, en intégrant dans l'intervalle (a, x) , remplaçant la valeur finale de θx par a ,

$$(13) \quad \frac{a}{b} < \frac{x}{a} \frac{1-a}{1-x}.$$

Or, b tendant constamment vers zéro quand n augmente indéfiniment (n° 1), on peut prendre le nombre n fini, mais assez grand, pour que l'inégalité (6) et la suivante

$$(14) \quad \frac{a}{b} > \frac{1-\varepsilon}{a} \frac{1-a}{\varepsilon},$$

aient lieu pour cette valeur de n et les valeurs plus grandes; $\frac{x}{1-x}$ augmentant avec x , il viendra, *a fortiori*,

$$(15) \quad \frac{a}{b} > \frac{x}{a} \frac{1-a}{1-x},$$

inégalité contradictoire avec (13). Donc, à partir d'une valeur assez grande de n , θx ne peut atteindre la valeur a dans l'intervalle $(a, 1-\varepsilon)$; dans l'expression (2) du reste R_n , $f^n(\theta x)$ peut être remplacé par la série correspondante déduite de (1); une limite supérieure de la valeur du reste est donnée par

$$R_n < \frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{1.2.3\dots(n-1)} \frac{f^n(0)}{(1-\theta x)^{n+1}} = \frac{x^n f^n(0)}{1.2.3\dots n} n \frac{(1-\theta)^{n-1}}{(1-\theta x)^{n+1}},$$

ce qui tend vers zéro quand n augmente indéfiniment, x étant inférieur à l'unité.

Dans le cas général, on commence par choisir une valeur de n

finie, mais assez grande, pour que les inégalités (6) et (14) soient satisfaites; cela est toujours possible d'après le n° 1, si la fonction $f(x)$ remplit les conditions énoncées au commencement, et il est évident que, $S(x)$ désignant la somme de la série (1), p et q des nombres positifs tous deux ou, au moins, l'un d'eux, la combinaison $pS(x) + qf(x)$, supposée positive pour $0 \leq x \leq a$, remplira les mêmes conditions.

Je dis que la différence des dérivées $S^{n+1}(x) - f^{n+1}(x)$, nulle pour $x \leq a$, ne peut cesser d'être nulle pour $x > a$.

Soit, en effet, pour fixer les idées,

$$S^{n+1}(x) - f^{n+1}(x) > 0 \quad \text{pour} \quad a \leq x \leq a';$$

on aura aussi, k étant un nombre positif indéterminé,

$$(1+k)S^{n+1}(x) - f^{n+1}(x) > 0 \quad \text{pour} \quad a \leq x \leq a'.$$

Raisonnons sur la combinaison $(1+k)S(x) - f(x)$, comme plus haut sur $f(x)$; on démontrera que, dans l'intervalle (a, a') , on a

$$\frac{d^k}{dx} < \frac{\theta}{1-x}, \quad \theta x < a,$$

et les symboles $f^n(\theta x)$, $f^{n+1}(\theta x)$ pourront être remplacés par les séries correspondantes.

Quand k tendra vers zéro, le premier membre de l'équation (11) sera nul identiquement; il devra en être ainsi du second, ce qu'exige que l'on ait

$$S^{n+1}(x) - f^{n+1}(x) = 0 \quad \text{pour} \quad a \leq x < a'.$$

On en conclut aussitôt

$$S(x) - f(x) = 0 \quad \text{pour} \quad a \leq x \leq a'.$$

Si l'on avait

$$S^{n+1}(x) - f^{n+1}(x) < 0,$$

on raisonnerait sur

$$(1+k)f(x) - S(x).$$

On doit remarquer que l'inégalité analogue à (14), où a et a' seraient remplacés par a' et b' (b' , valeur de θx pour $x = a'$), satisfait en même temps que (14).

En effet, de

$$\frac{b'}{b} < \frac{a'}{a} \frac{1-a}{1-a'} \quad \text{ou, en renversant,} \quad \frac{b}{b'} > \frac{a}{a'} \frac{1-a'}{1-a}$$

et de

$$\frac{a}{b} > \frac{1-\varepsilon}{a} \frac{1-a}{\varepsilon},$$

on déduit, par la multiplication membre à membre,

$$\frac{a}{b'} > \frac{1-\varepsilon}{a'} \frac{1-a'}{\varepsilon} \quad \text{et, a fortiori,} \quad \frac{a'}{b'} > \frac{1-\varepsilon}{a'} \frac{1-a'}{\varepsilon}.$$

Cette remarque permet de continuer le raisonnement sur les intervalles successifs (a, a') , ..., en gardant la même valeur finie de n .

4. Pour ramener au cas déjà étudié, d'une série à termes positifs avec une loi de décroissance des coefficients correspondant à la condition (6), le cas général où les coefficients de la série (1) ont des signes quelconques, la série étant convergente si $x < 1$, divergente si $x > 1$, nous formons l'expression

$$\varphi(x) = \frac{A}{1-x} + f(\omega x), \quad \omega < 1;$$

on peut déterminer le nombre positif A , de manière que tous les coefficients de l'expression développée en série

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{x}{1} \varphi'(0) + \frac{x^2}{1.2} \varphi''(0) + \dots$$

soient positifs.

Quand n augmente indéfiniment, la quantité

$$\frac{\varphi^{n+1}(0)}{(n-1)\varphi^n(0)} - 1$$

tend vers zéro en valeur absolue; on peut choisir n fini, mais assez grand pour que, en valeur absolue et pour toutes les valeurs plus grandes de n ,

$$\frac{\varphi^{n+1}(0)}{(n-1)\varphi^n(0)} - 1 < \varepsilon,$$

ε étant un nombre donné très petit.

Considérons alors la fonction

$$F(x) = \varphi\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right);$$

à partir d'une valeur déterminée de n , la condition (6) sera évidemment satisfaite; si on limite la variation de x par la condition

$$0 \leq x \leq 1 - \varepsilon,$$

on peut reproduire sur $F(x)$ les mêmes raisonnements que sur $f(x)$. Pour l'argument $\frac{x}{1+\varepsilon}$ de φ , il viendra

$$0 \leq \frac{x}{1+\varepsilon} \leq \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

La série $\varphi\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)$ est absolument convergente; on peut la regarder comme formée de deux séries aussi absolument convergentes provenant de deux parties $\frac{A}{1-x}$ et $f(\omega x)$; la première de ces séries représentant la première partie $\frac{A}{1-x}$ dans l'intervalle désigné, il faut que la seconde série représente $f(\omega x)$ dans le même intervalle, c'est-à-dire tant que l'argument de la fonction f ne dépasse pas $\omega \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$; on peut faire que cette limite diffère de l'unité d'une quantité désignée aussi petite qu'on le voudra.

Quand la série qui représente le développement de $f(x)$ sera convergente pour $x=1$, la fonction $f(x)$, d'après le théorème d'Abel, sera encore représentée par la série.

On peut donc énoncer le théorème général qui suit :

THÉORÈME. — *Si, dans un intervalle fini, pour $0 \leq x \leq a$, la fonction $f(x)$ est représentée par la série de Maclaurin, elle continuera à être représentée par la même série tant que les dérivées successives $f^n(x)$ seront continues et que la série de Maclaurin sera convergente.*

Remarque. — Si l'on définissait une fonction $F(x)$ de cette manière :

$$F(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq a; \quad F(x) = f(x) + f_1(x-a), \quad a \leq x \leq 1;$$

$f(x)$ étant une fonction développable par la série de Maclaurin

dans l'intervalle $(0, 1)$, et $f_1(x)$ une fonction telle que $Ae^{-\frac{1}{(x-a)^2}}$, le théorème serait en défaut. Ce cas, qui m'a été signalé par M. Stieltjes, est écarté à la vérité par les hypothèses du commencement. *A posteriori*, on voit que la représentation de la fonction $F(x)$ par la série, pour $x > a$, ne peut être affirmée, parce qu'on ne peut rien dire en général sur la possibilité de développer en série la différence $F(x+a) - f(x+a) = f_1(x)$. Toutefois, une étude plus approfondie serait utile.

RECTIFICATIONS.

1° *Bulletin de la Société mathématique*, t. XIV, p. 96 (*Sur certaines suites de fractions irréductibles*; par M. d'Ocagne).

La formule (b) n'est exacte que dans le cas de $\alpha = 2$; la formule applicable dans le cas général se trouve dans le Mémoire de M. d'Ocagne, dont la Note insérée au *Bulletin* n'était qu'un résumé (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. X, 1886, p. 109).

2° *Bulletin de la Société mathématique*, t. XIV, p. 103 (*Sur une nouvelle construction de la courbe d'ombre propre d'une surface de révolution, et de la tangente en un point quelconque de cette courbe*; par M. L. Neu).

Les foyers d'une ellipse auxiliaire sont déterminés, dans cette Note, en prenant $OF = OF' = de$; il y a lieu de rectifier cette construction, en prenant $OF = OF' = eR'_2$.

Sur la courbure totale des surfaces; par M. DEMARTRES.

(Séance du 19 janvier 1887.)

Considérons sur une surface un point M, et prenons un plan de référence fixe P. Si l'on se déplace infiniment peu sur la surface, suivant une direction MM', on s'éloignera du plan P d'une quantité dh ; en même temps la trace, sur P, du plan tangent en M, tournera d'un angle $d\varphi$; θ étant l'angle de P avec le plan tangent en M, je désignerai, pour abrégé, par *flexion* de l'élément MM' le rapport $\frac{dh}{d\varphi} \frac{1}{\sin^2 \theta}$.

THÉORÈME. — *Si l'on considère sur une surface deux déplacements infiniment petits, effectués à partir d'un même point M, suivant deux directions conjuguées (¹), le produit ff_1 des deux flexions correspondantes par rapport à un même plan de référence est égal au produit des rayons de courbure principaux au point M et de signe contraire; on a, en d'autres termes, $ff_1 + RR_1 = 0$.*

Ce théorème paraît important en ce qu'il donne une expression très générale de la courbure totale; on peut, en effet, choisir arbitrairement, et indépendamment l'une de l'autre, la direction du plan P et l'orientation de l'élément MM'.

Démonstration. — Prenons le plan de yz pour plan de référence; en adoptant les notations ordinaires, on a

$$dh = dx, \quad d\varphi = \frac{dq}{1+q^2}, \quad \sin^2 \theta = \frac{1+q^2}{1+p^2+q^2},$$

$$t = \frac{dx}{s \frac{dx}{ds} + t \frac{dy}{ds}} (1+p^2+q^2);$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+p^2+q^2-sf}{tf},$$

(¹) Par *conjugués* nous entendons deux déplacements effectués suivant des diamètres conjugués de l'indicatrice au point M.

et de même, pour le déplacement conjugué,

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1 + p^2 + q^2 - sf_1}{tf_1}.$$

La condition, pour que les deux déplacements soient conjugués, est d'ailleurs

$$r + s \left(\frac{dy}{dx} + \frac{dy_1}{dx_1} \right) + t \frac{dy}{dx} \frac{dy_1}{dx_1} = 0.$$

Si l'on y substitue à $\frac{dy}{dx}, \frac{dy_1}{dx_1}$ les deux expressions ci-dessus, on a immédiatement

$$ff_1 + \frac{(1 + p^2 + q^2)^2}{rt - s^2} = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

En particulier, si le déplacement MM' a lieu suivant une ligne asymptotique, on aura

$$f = \sqrt{-R_1 R_2},$$

formule qui conduit à un grand nombre de résultats connus, en particulier pour les surfaces réglées.

On voit aisément dans quel genre de questions le théorème précédent peut intervenir avec avantage; nous reviendrons sur ce sujet.

Sur le rapport anharmonique d'une courbe du troisième ordre ;
par M. JAMET.

(Séance du 19 janvier 1887.)

1. On connaît le beau théorème de M. Salmon, relatif aux courbes du troisième ordre : *Le rapport anharmonique des quatre tangentes que l'on peut mener à une courbe du troisième ordre, par un de ses points, est constant pour tous les points de la courbe.* Je me propose d'en indiquer une démonstration, fondée sur le théorème suivant : *L'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} + Ay^2 + By + C = 0,$$

où A, B, C désignent des fonctions données de x , est telle que le rapport anharmonique de quatre de ses solutions est constant, et réciproquement. (EM. PICARD, *Annales de l'École Normale supérieure*, 2^e série, t. VI, p. 341-343.)

2. Notre démonstration consiste en ceci : On sait que l'équation d'une courbe du troisième degré peut toujours être transformée, par voie d'homographie, en une équation de la forme

$$\alpha y^2 = x^3 + px^2 + qx + r = f(x),$$

et il suffit de démontrer le théorème pour une courbe représentée par cette équation. Soit donc

$$y = ux + v$$

l'équation d'une tangente à cette courbe : l'abscisse du point de contact devra vérifier les deux équations

$$(1) \quad \alpha(ux + v)^2 = f(x),$$

$$(2) \quad 2\alpha u(ux + v) = f'(x).$$

Soit, en outre, ξ l'abscisse du point, différent du point de contact, où cette droite rencontre la courbe; la variable ξ doit elle-même vérifier l'équation

$$(3) \quad \alpha(u\xi + v)^2 = f(\xi).$$

Considérons u , v , x comme des fonctions de ξ définies par les relations (1), (2), (3); ces fonctions devront aussi vérifier l'équation

$$(4) \quad x \frac{du}{d\xi} + \frac{dv}{d\xi} = 0$$

qu'on déduit, par différentiation, de l'équation (1), en tenant compte de l'équation (2). Elles doivent encore vérifier l'équation

$$(5) \quad 2\alpha(u\xi + v) \left(u + \xi \frac{du}{d\xi} + \frac{dv}{d\xi} \right) = f'(\xi)$$

déduite, par différentiation, de l'équation (4).

Si l'on retranche membre à membre les équations (2) et (5), que l'on remplace, dans l'équation résultante, $\frac{dv}{d\xi}$ par $-x \frac{du}{d\xi}$ [expression déduite de l'équation (4)], et qu'enfin on supprime le facteur

commun $\xi - x$, on trouve

$$2au^2 + 2a(u\xi + v) \frac{du}{d\xi} = f''(x) + \frac{(\xi - x)}{2} f'''(x)$$

ou bien

$$(6) \quad 2au^2 + 2a(u\xi + v) \frac{du}{d\xi} = 3(\xi + x) + 2p.$$

D'autre part, si l'on retranche les équations (3) et (1) membre à membre et qu'on supprime encore le facteur $\xi - x$, on trouve

$$au[u(\xi + x) + 2v] = f'(x) + \frac{\xi - x}{2} f''(x) + \frac{(\xi - x)^2}{6} f'''(x).$$

Puis, si l'on retranche membre à membre cette dernière équation et l'équation (2), on trouve, après avoir supprimé encore le facteur $\xi - x$,

$$(7) \quad au^2 = \frac{1}{2} f''(x) + \frac{1}{6} (\xi - x) f'''(x) = 2x + \xi + p.$$

Éliminant x entre (6) et (7), on trouve

$$a(u\xi + v) \frac{du}{d\xi} = \frac{3\xi + p}{4} - \frac{au^2}{4}.$$

Enfin, à cause de l'équation (3),

$$(8) \quad \sqrt{a} \frac{du}{d\xi} = \frac{3\xi + p}{4\sqrt{f(\xi)}} - \frac{au^2}{4\sqrt{f(\xi)}}.$$

Posons

$$(9) \quad \sqrt{a} u = \theta,$$

L'équation précédente devient

$$(10) \quad \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{3\xi + p}{4\sqrt{f(\xi)}} - \frac{\theta^2}{4\sqrt{f(\xi)}}.$$

3. Je dis maintenant qu'il existe, entre θ et ξ , une relation algébrique, du quatrième degré par rapport à θ . En effet, cherchons la condition pour qu'une droite, issue du point ξ, η , situé sur la courbe, lui soit tangente en un autre point. Soient

$$\begin{aligned} x &= \xi + \lambda\rho, \\ y &= \eta + \mu\rho \end{aligned}$$

les équations qui définissent cette droite. Si l'on substitue ces expressions de x et de y dans l'équation de la courbe, et qu'on

tienne compte de la condition

$$(11) \quad a\tau^2 = f(\xi),$$

on trouve une équation qui, par rapport à ρ , est du troisième degré. Elle admet, comme on devait s'y attendre, la solution $\rho = 0$: supprimant cette solution et cherchant la condition pour que les deux autres racines soient égales, puis faisant $\mu = \lambda u$ dans l'équation de condition, on trouve

$$(3\xi + p - au^2)^2 - 4(3\xi^2 + 2p\xi + q - 2au\eta) = 0$$

et, à cause des formules (9) et (11),

$$(3\xi + p - 0^2)^2 - 4[3\xi^2 + 2p\xi + q - 20\sqrt{f(\xi)}] = 0.$$

Toute racine de cette équation est une fonction de ξ qui doit vérifier l'équation différentielle (10). Donc, en vertu du théorème de M. Picard, le rapport anharmonique de ces quatre racines est constant; mais, à cause de la formule (9), ce rapport anharmonique est égal à celui des quatre valeurs correspondantes de u .

Le théorème est donc démontré.

4. Si maintenant on veut calculer l'un des rapports anharmoniques constants des quatre tangentes mobiles considérées, on calculera celui des quatre tangentes parallèles à l'axe Oy : l'une d'elles est rejetée à l'infini et coïncide avec la tangente d'inflexion; les trois autres touchent la courbe aux points où celle-ci touche l'axe Ox . Si donc on désigne par α, β, γ les racines de l'équation

$$f(x) = 0,$$

l'un de ces rapports sera égal à

$$\frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta},$$

et l'on vérifiera sans difficulté que ce rapport est égal au carré du module des intégrales elliptiques appartenant à la courbe donnée.

Des rayons de courbure dans les transformations isogonales⁽¹⁾,
par M. A.-C. LAISANT.

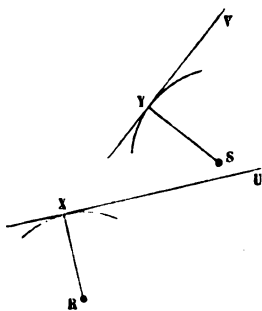
(Séance du 19 janvier 1887.)

Si une variable $OY = y$ est liée à une variable $OX = x$ par une relation de la forme $y = \varphi(x)$ ou, plus généralement,

$$y = f(x) + if_1(x),$$

les fonctions f, f_1 étant des fonctions analytiques dans le sens ordinaire du mot, c'est-à-dire ayant pour chaque valeur de x une dérivée bien déterminée, la transformation qu'exprime cette relation est *isogonale*, c'est-à-dire que, dans toute transformation de ce genre, les angles se conservent.

En effet, si l'on donne à X un déplacement dx quelconque, il vient $dy = \varphi'(x) dx$, $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$, en sorte que le rapport des déplacements dy, dx est constant pour un même point, et que



l'angle formé par ces déplacements, c'est-à-dire par les tangentes XU, YV de deux courbes transformées, est constant lui aussi, et égal à l'inclinaison de $\varphi'(x)$.

(¹) Il est fait usage, dans cette Note, de la méthode des équipollences. Le signe $=$ veut dire *équipollent à*. La lettre i tient lieu du signe $\sqrt{-1}$ (ramun), c'est-à-dire du symbole $\sqrt{-1}$. La lettre x désigne la quantité géométrique représentée par la droite OX . Les notations $\odot x, \odot^2 x$ représentent respectivement les dérivées géométriques, du premier et du second ordre, de la variable x .

L'objet de cette Note est la recherche des relations entre les rayons de courbure XR, YS des deux courbes en question.

Si l'on pose

$$\frac{(\partial^2 \mathbf{x})}{(\partial \mathbf{x})} = l + i\lambda, \quad \frac{(\partial^2 \mathbf{y})}{(\partial \mathbf{y})} = l' + i\lambda',$$

on sait que les rayons de courbure XR, YS sont respectivement donnés par les équipollences

$$(1) \quad \text{XR} = \frac{l}{\lambda} \partial \mathbf{x}, \quad \text{YS} = \frac{l'}{\lambda'} \partial \mathbf{y}.$$

Or nous avons

$$(2) \quad \partial \mathbf{y} = \varphi'(\mathbf{x}) \partial \mathbf{x};$$

d'où

$$(3) \quad \begin{aligned} (\partial^2 \mathbf{y}) &= \varphi'(\mathbf{x}) (\partial^2 \mathbf{x}) + \varphi''(\mathbf{x}) (\partial \mathbf{x})^2, \\ \frac{(\partial^2 \mathbf{y})}{(\partial \mathbf{y})} &= \frac{(\partial^2 \mathbf{x})}{(\partial \mathbf{x})} + \frac{\varphi''(\mathbf{x})}{\varphi'(\mathbf{x})} \partial \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Posons

$$(4) \quad \varphi'(\mathbf{x}) = a\varepsilon^\alpha, \quad \frac{\varphi''(\mathbf{x})}{\varphi'(\mathbf{x})} = b\varepsilon^\beta,$$

valeurs constantes pour la position considérée du point X.

La relation précédente pourra s'écrire

$$(5) \quad l' + i\lambda' = l + i\lambda + b\varepsilon^\beta \partial \mathbf{x}.$$

Prenons pour variable indépendante l'arc même de la courbe (X)

et désignons par θ l'inclinaison de la tangente à cette courbe. Alors $\partial \mathbf{x} = \varepsilon^\theta$, $\partial \mathbf{y} = a\varepsilon^{\alpha+\theta}$, et, en égalant les parties imaginaires des deux membres de l'équipollence (5),

$$(6) \quad \lambda' = \lambda + b \sin(\beta + \theta),$$

c'est-à-dire, en vertu des relations (1), et si l'on appelle ϱ , ϱ' les longueurs des deux rayons de courbure,

$$(7) \quad \frac{a}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho} + b \sin(\beta + \theta),$$

relation remarquable entre les deux rayons de courbure. Ceux-ci ont d'ailleurs pour inclinaisons θ et $\theta + \alpha$ si l'on prend pour origine des inclinaisons une droite perpendiculaire à l'origine primitive.

Parmi les conséquences de la formule (7), il y a lieu de signaler

un théorème qui semble nouveau. L'équation générale d'une conique en coordonnées polaires est

$$\frac{1}{\rho} = p \cos \theta + q \sin \theta \pm \sqrt{f \cos^2 \theta + g \cos \theta \sin \theta + h \sin^2 \theta}.$$

Si dans cette équation on opère la substitution résultant de la formule (7), l'angle θ étant toujours l'angle polaire par rapport à un certain axe polaire convenablement choisi, on voit que l'équation en ρ' et θ représentera aussi une conique. Nous avons donc la proposition suivante, applicable à toute transformation isogonale :

Si les centres de courbure R d'une série de courbes passant par un point X sont distribués sur une conique, les centres de courbure S des courbes transformées, passant par le point Y, seront aussi distribués sur une conique.

En particulier, nous avons les conséquences ci-après, pour ainsi dire évidentes en vertu de ce qui précède :

- 1° *Toutes les transformées de droites passant par un même point ont leurs centres de courbure situés sur une même droite;*
- 2° *Si les rayons de courbure des courbes passant par X sont tous égaux, les centres de courbure des transformées seront distribués sur une conique de foyer Y;*
- 3° *Si les centres de courbure des courbes (X) sont distribués sur une conique de foyer X, les centres de courbure des courbes transformées (Y) seront distribués sur une conique de foyer Y.*

Trançon (*Nouvelles Annales*, 1869, p. 114) a établi les propriétés 1° et 2° dans un article fort remarquable sur l'algèbre directive. Mais il ne paraît pas avoir rencontré la proposition 3°, ni surtout le théorème général que nous venons de signaler.

Démonstration nouvelle du théorème fondamental de la théorie des équations; par M. C.-A. LAISANT.

(Séance du 2 février 1887.)

Le théorème fondamental de la théorie des équations : *Toute équation algébrique à coefficients réels ou imaginaires a une racine* a été démontré par Cauchy. Toutefois, sa démonstration prête à certaines objections, un peu spécieuses peut-être, mais qui ont cependant provoqué l'attention des géomètres.

M. Walecki en a donné une démonstration irréprochable, laquelle est purement analytique, mais assez compliquée. Peut-être faut-il voir, dans cette complication, l'explication de ce fait que la démonstration, après avoir figuré pendant un certain temps dans les programmes des Cours de Mathématiques spéciales, en est actuellement exclue, comme elle l'était jadis.

Au point de vue de la doctrine, il est assurément regrettable que l'on soit contraint d'admettre comme postulatum, dans l'enseignement, une vérité qui est loin d'être évidente par elle-même.

Il semble cependant possible d'établir la démonstration dont il s'agit, d'une façon simple, pour ainsi dire intuitive, et qui repose essentiellement sur la notion de continuité. Tel est l'objet de la présente Note.

Soit

$$(1) \quad y = f(x) = x^m - A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

une équation algébrique, dans laquelle nous pouvons toujours supposer que le coefficient du premier terme est égal à l'unité. Représentons, à la manière habituelle, les valeurs de x et de la fonction y par des droites issues d'une origine fixe, droites ayant pour longueurs les modules et pour inclinaisons sur une direction fixe les arguments.

LEMME. — *Lorsque l'extrémité de x décrit, autour de l'origine comme centre, une circonférence de rayon suffisamment grand, l'extrémité de y décrit, autour de l'origine, une courbe fermée, aussi éloignée de l'origine qu'on le voudra, dans toutes ses parties.*

Nous pouvons écrire

$$y = x^m \left(1 + \frac{A_1}{x} + \dots + \frac{A_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{A_m}{x^m} \right).$$

Si nous remplaçons x par $r\varepsilon^\theta$,

$$(2) \quad y = r^m \varepsilon^{m\theta} \left(1 + \frac{A_1}{r} \varepsilon^{-\theta} + \dots + \frac{A_{m-1}}{r^{m-1}} \varepsilon^{-(m-1)\theta} + \frac{A_m}{r^m} \varepsilon^{-m\theta} \right).$$

Lorsque r augmente sans limite, le module de y croît de même indéfiniment. De plus, pour une valeur donnée de θ , il est clair que l'argument de y tend vers $m\theta$ lorsque r augmente sans limite, puisque le facteur entre parenthèses tend vers l'unité, dans le second membre de la relation (2).

Donc, à toute direction d'inclinaison θ pour x , correspondra pour y une direction d'inclinaison aussi rapprochée qu'on le voudra de $m\theta$, pourvu que r soit suffisamment grand. Il y aura ainsi une valeur de y ayant pour direction celle d'une droite quelconque issue de l'origine.

Le lemme en démonstration est donc établi.

Il est d'ailleurs utile de faire remarquer que la courbe fermée décrite par l'extrémité de y présentera, autour de l'origine, m circonvolutions et non pas une seule.

THÉORÈME. — *L'équation $y = 0$ a une racine.*

Posons $z = y - A_m$. Lorsque le module de x tend vers zéro, le module de z tend vers zéro. Donc, lorsque l'extrémité de x décrit autour de l'origine une circonférence de rayon très petit, l'extrémité de y décrira une très petite courbe fermée, voisine du point A_m , représentatif du terme A_m .

Lorsque l'extrémité de x décrit autour de l'origine une circonférence de rayon suffisamment grand, l'extrémité de y , en vertu du lemme ci-dessus démontré, décrira une courbe fermée, aussi éloignée qu'on voudra, autour de l'origine et, partant, autour de A_m .

Donc, la circonférence décrite par l'extrémité de x autour de l'origine augmentant d'une façon continue, la courbe fermée autour de A_m augmentera aussi indéfiniment, et par suite arrivera à passer par l'origine O. On aura donc, pour cette position spéciale,

$$z = A_m O = -A_m,$$

et par conséquent $y = 0$, pour une certaine valeur de x .

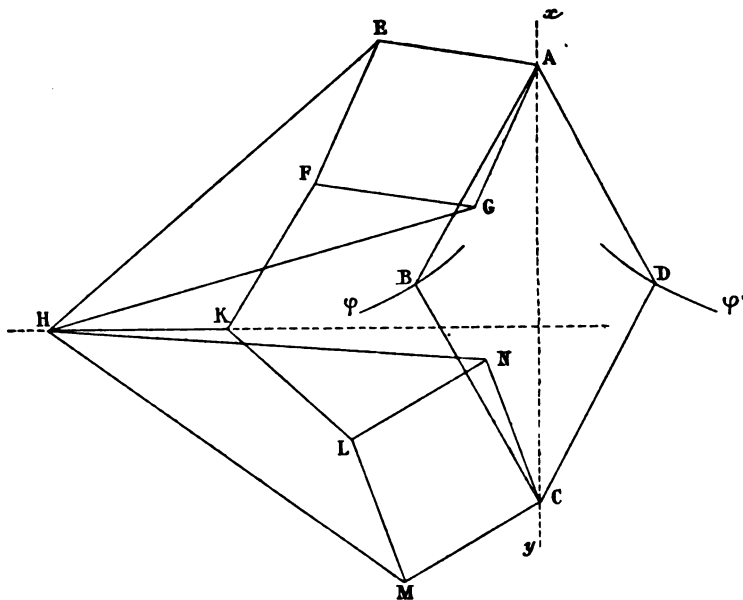
Donc l'équation $y = 0$ a une racine.

REMARQUE. — Cette démonstration repose sur la continuité de la fonction y ; nous n'avons pas cru nécessaire de démontrer cette continuité, parce qu'elle s'établit par les moyens les plus élémentaires et s'applique tout aussi bien aux quantités imaginaires qu'aux quantités réelles. La formule de Taylor est en effet applicable à cette fonction, et se présente sous forme d'une suite limitée au lieu d'une série indéfinie, ce qui simplifie encore les choses.

Système articulé pour tracer la courbe symétrique par rapport à un axe d'une courbe donnée; par M. L. NEU.

(Séance du 2 février 1887.)

Considérons un losange articulé ABCD, si nous faisons décrire



au point B la courbe φ en assujettissant les points A et C à décrire

l'axe de symétrie xy , le point D décrira la courbe φ' symétrique de φ par rapport à xy .

Pour assujettir le point A à décrire la droite xy , il suffit de prendre ce point comme sommet d'un système à sept tiges de Peauceliet AEFGHK, la droite HK étant perpendiculaire à xy ; de même pour le point C.

Ce système pourrait servir aux graveurs qui ont à tracer le négatif d'une figure, c'est-à-dire la symétrie de cette figure par rapport à un axe.

*Sur le système de quatre formes binaires simultanées
(deux linéaires et deux quadratiques);* par M. R. PERRIN.

(Séance du 2 février 1887.)

1. L'objet du présent travail est d'établir d'une manière complète, en vue surtout d'une application ultérieure à la théorie des formes ternaires ⁽¹⁾, les relations, ou syzygies, qui existent entre les invariants du système de quatre formes binaires simultanées, savoir deux formes linéaires et deux formes quadratiques. Bien que relativement simple, ce système possède déjà, comme on le verra, treize invariants distincts, reliés par vingt syzygies indépendantes, dont chacune peut être transportée dans le domaine ternaire.

J'emploierai exclusivement pour cette étude les procédés indiqués dans une Note insérée aux *Comptes rendus*, t. XCVI, p. 426; 1883), procédés qui reposent sur les principes suivants :

1° Étant donné un système composé d'autant de formes binaires indépendantes et de tel ordre qu'on voudra, de tous leurs invariants et covariants, si l'une quelconque des formes de ce système est

$$w = w_0 x^n + n w_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} w_2 x^{n-2} y^2 + \dots,$$

(1) Le principe de cette application a été donné dans une série de Notes insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, janvier 1887.

et qu'on effectue la substitution

$$x = X - w_1 Y, \quad y = w_0 Y.$$

tous les coefficients, dans toutes les formes du système, deviendront des péninvariants.

2° Cette transformation des coefficients étant ainsi opérée, tout procédé de formation d'un péninvariant du système donne, par le fait même qu'on l'écrit, une syzygie entre le covariant correspondant, multiplié par une certaine puissance de w (celle précisément qui convient pour rétablir l'homogénéité), et les covariants dont les péninvariants figurent dans la composition des coefficients employés.

3° Étant donnée une syzygie entre des formes du système, on peut toujours la considérer comme exprimant qu'un certain covariant composé, d'ordre m par exemple, est identiquement nul ; dès lors, le second, le troisième, ..., le $m^{\text{ème}}$ coefficient de ce covariant composé, sont aussi identiquement nuls, ce qui permet d'écrire immédiatement m nouvelles syzygies, en général distinctes de la première.

Je m'appuierai enfin sur ce théorème :

Si l'on ajoute à un système quelconque de formes binaires indépendantes une forme linéaire, les seules formes nouvelles qui s'ajoutent aux formes covariantes et invariantes du système primitif sont celles qu'on obtient en opérant avec la forme linéaire ajoutée sur chacune des formes, tant indépendantes que covariantes, de ce système primitif, savoir une fois sur les formes linéaires ; une fois, et deux fois sur les formes quadratiques ; une, deux et trois fois sur les formes cubiques, et ainsi de suite. En particulier, il s'introduit précisément autant d'invariants nouveaux qu'il existait de formes distinctes dans le système primitif, savoir les résultants de chacune de ces formes et de la forme linéaire ajoutée.

La démonstration de ce théorème, sous un énoncé un peu différent, se trouve dans la *Théorie des formes binaires* de Clebsch (§ 53) ; on peut d'ailleurs l'établir très simplement, sans l'intervention du calcul symbolique, de la manière suivante :

Soit

$$u = a_0 x + a_1 y$$

la forme linéaire indépendante ajoutée, et

$$v = v_0 x^p + p v_1 x^{p-1} y + \dots$$

un quelconque des covariants (ou invariants) qui s'introduisent ainsi. Le péninvariant (ou invariant) v_0 contiendra les coefficients de u à un degré q différent de zéro; on pourra donc l'écrire

$$v_0 = a_0^q s_0 + q a_0^{q-1} a_1 s_1 + \frac{q(q-1)}{1.2} a_0^{q-2} a_1^2 s_2 + \dots + a_1^q s_q,$$

$s_0, s_1, \dots, s_q$ ne contenant plus que les coefficients des formes indépendantes composant le système primitif. On sait que v_0 doit, pour être un péninvariant, satisfaire à l'équation différentielle

$$a_0 \frac{dv_0}{da_1} + \frac{dv_0}{dz} = 0,$$

où $\frac{dv_0}{dz}$ désigne un ensemble d'opérations de dérivation qui ne portent que sur les coefficients autres que a_0 et a_1 . Cette équation différentielle peut donc s'écrire

$$a_0 \left[q a_0^{q-1} s_1 + \frac{q(q-1)}{1} a_0^{q-2} a_1 s_2 + \dots + q a_1^{q-1} s_q \right] + a_0^q \frac{ds_0}{dz} + q a_0^{q-1} a_1 \frac{ds_1}{dz} + \frac{q(q-1)}{1.2} a_0^{q-2} a_1^2 \frac{ds_2}{dz} + \dots + a_1^q \frac{ds_q}{dz} = 0.$$

Mais, pour que cette équation ait lieu identiquement, il faut que les coefficients de $a_0^q, a_0^{q-1} a_1, \dots, a_1^q$ s'évanouissent identiquement; ce qui donne le système de conditions

$$\begin{aligned} \frac{ds_0}{dz} &= -q s_1, \\ \frac{ds_1}{dz} &= -(q-1) s_2, \\ \frac{ds_2}{dz} &= -(q-2) s_3, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{ds_{q-1}}{dz} &= -s_q, \\ \frac{ds_q}{dz} &= 0. \end{aligned}$$

Or ces relations sont précisément celles qui sont nécessaires et suffisantes pour définir les q premiers coefficients d'un covariant s

qui ne dépend plus que des formes du système primitif, savoir

$$s = s_q x^{p+q} - (p+q) s_{q-1} x^{p+q-1} y + \dots \\ \pm \frac{(p+q)(p+q-1)\dots(p+1)}{1.2\dots q} s_0 x^p y^q \mp \dots$$

(l'ordre $p+q$ de ce covariant se trouve déterminé par la condition que sa source s_q ait le poids convenable, étant connu le poids de v_0).

Si l'on opère q fois avec u sur ce covariant s qui faisait donc partie du système primitif, c'est-à-dire si on lui applique l'opérateur

$$\alpha_0^q \frac{d^q}{dy^q} - q \alpha_0^{q-1} \alpha_1 \frac{d^q}{dy^{q-1} dx} + \dots \pm \alpha_1^q \frac{d^q}{dx^q},$$

le covariant obtenu aura pour coefficient de x^p

$$\pm (p+q)(p+q-1)\dots(p+1) (\alpha_0^q s_0 + q_1 \alpha_0^{q-1} \alpha_1 s_1 + \dots \mp \alpha_1^q s_q),$$

c'est-à-dire précisément v_0 , à un coefficient numérique près; il ne diffère donc de v que par ce coefficient numérique.

Il est ainsi démontré que tout covariant v du système complété par l'adjonction d'une forme linéaire indépendante peut s'obtenir en opérant un certain nombre de fois avec cette forme sur un des covariants du système primitif; ce qui équivaut à l'énoncé donné plus haut.

2. Cela posé, soient données les quatre formes indépendantes

$$(1) \quad \begin{cases} u = a_0 X + a_1 Y, \\ u' = a'_0 X + a'_1 Y, \\ v = b_0 X^2 + 2b_1 XY + b_2 Y^2, \\ v' = b'_0 X^2 + 2b'_1 XY + b'_2 Y^2. \end{cases}$$

Effectuons la substitution $X = x - a_1 y$, $Y = a_0 y$, dont le déterminant est a_0 , source de la forme u . Il vient

$$(2) \quad \begin{cases} u = u_0 x, & u' = u'_0 x + \Lambda y, \\ v = v_0 x^2 + 2\pi_0 xy + \Lambda y^2, \\ v' = v'_0 x^2 + 2\pi'_0 xy + \Lambda' y^2, \end{cases}$$

en posant

$$(3) \quad \begin{cases} \Lambda = a_0 a'_1 - a_1 a'_0, \\ \pi_0 = a_0 b_1 - a_1 b_0, \\ \pi'_0 = a_0 b'_1 - a_1 b'_0, \\ \Lambda = a_1^2 b_0 - 2a_0 a_1 b_1 + a_0^2 b_2, \\ \Lambda' = a_1^2 b'_0 - 2a_0 a_1 b'_1 + a_0^2 b'_2. \end{cases}$$

et, en écrivant u_0, u'_0, v_0, v'_0 au lieu de a_0, a'_0, b_0, b'_0 , pour rappeler les formes dont ces coefficients sont les sources, $\Lambda, \Lambda, \Lambda'$ sont évidemment trois invariants, savoir les résultants de u et de chacune des trois formes fondamentales u', v, v' ; π_0 et π'_0 sont des péninvariants, sources des deux covariants π et π' , qui sont évidemment le jacobien de u et v , et celui de u et v' . Ces jacobiens sont en effet définis par les opérations

$$\frac{du}{dx} \frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy} \frac{dv}{dx}, \quad \frac{du}{dx} \frac{dv'}{dy} - \frac{du}{dy} \frac{dv'}{dx},$$

lesquelles donnent respectivement

$$2u_0(\pi_0 x + \Lambda y), \quad 2u_0(\pi'_0 x + \Lambda' y).$$

Nous pouvons donc les écrire ainsi

$$(4) \quad \begin{cases} \pi = \pi_0 x + \Lambda y, \\ \pi' = \pi'_0 x + \Lambda' y. \end{cases}$$

Construisons d'abord les formes du système partiel composé seulement de v et de v' . Ces formes consistent, comme on sait, en trois invariants, savoir les discriminants D et D' des deux formes, et un invariant commun

$$I = b_0 b'_2 + b_1 b'_0 - 2b_1 b'_1;$$

plus un seul covariant, le jacobien de u et u' , que je désignerai par σ . En prenant u et u' sous les formes données par les équations (2), on a immédiatement les trois syzygies

$$(5) \quad u^2 D = \Lambda v - \pi^2,$$

$$(6) \quad u^2 D' = \Lambda' v' - \pi'^2,$$

$$(7) \quad u^2 I = \Lambda v' + \Lambda' v - 2\pi\pi'.$$

Si l'on forme les syzygies dérivées, en écrivant que les second et troisième termes des covariants identiquement nuls

$$u^2 D - \Lambda v + \pi^2, \quad u^2 D' - \Lambda' v' + \pi'^2, \quad u^2 I - \Lambda v' - \Lambda' v + 2\pi\pi'$$

sont également nuls, on n'obtient aucune syzygie nouvelle, mais de pures identités.

Le jacobien σ de v et v' est défini par l'opération

$$\frac{dv}{dx} \frac{dv'}{dy} - \frac{dv}{dy} \frac{dv'}{dx},$$

qui donne

$$4[(v_0\pi'_0 - v'_0\pi_0)x^2 + (A'v_0 - Av'_0)xy + (A'\pi_0 - A\pi'_0)y^2].$$

Le coefficient de x^2 fournit immédiatement la syzygie

$$(8) \quad u\sigma = v\pi' - v'\pi,$$

qui relie σ aux formes déjà trouvées. Le second et le troisième coefficient de σ devant être aussi des péninvariants, il faut que $A'v_0 - Av'_0$, $A'\pi_0 - A\pi'_0$ soient divisibles par u ; désignons par p , Γ le covariant linéaire et l'invariant correspondants; nous avons immédiatement, pour définir ces deux nouvelles formes, les deux syzygies

$$(9) \quad up = A'v - Av',$$

$$(10) \quad u\Gamma = A'\pi - A\pi'.$$

En effectuant les calculs, on trouve pour le péninvariant p , source de p , et pour l'invariant Γ , les valeurs suivantes

$$p_0 = a_0(b_0b'_1 - b_1b'_0) + 2a_1(b_1b'_0 - b_0b'_1),$$

$$\Gamma = a_0^2(b_1b'_1 - b_2b'_0) + a_0a_1(b_2b'_0 - b_0b'_1) + a_1^2(b_0b'_1 - b_1b'_0).$$

Les expressions complètes des covariants σ et p sont d'ailleurs, en vertu de (8), (9), (10) et (2),

$$(11) \quad \begin{cases} \sigma = \sigma_0 x^2 + p_0 xy + \Gamma y^2, \\ p = p_0 x + 2\Gamma y. \end{cases}$$

Γ est évidemment le résultant de u et σ , et p le jacobien de u et σ .

Multiplions les deux membres de (10) par 2π , remplaçons π^2 et $2\pi\pi'$ au moyen de (5) et (7), puis $A'v - Av'$ au moyen de (9); nous pourrons diviser par u , et nous obtiendrons la syzygie

$$(12) \quad 2\Gamma\pi = Ap + u(AI - 2A'D).$$

En multipliant (10) par $2\pi'$ et utilisant de même les relations (6), (7) et (9), on obtient la syzygie analogue

$$(13) \quad 2\Gamma\pi' = A'p - u(A'I - 2AD').$$

Enfin, multipliant (10) par 2Γ , remplaçant $2\Gamma\pi$ et $2\Gamma\pi'$ au moyen de (12) et (13) et divisant par $2u$, il vient

$$(14) \quad \Gamma^2 = AA'I - A^2D - A^2D'.$$

C'est la première des relations entre invariants que nous nous proposons d'obtenir.

3. D'après le théorème démontré plus haut, nous connaissons déjà toutes les formes du système qui ne comprend pour formes fondamentales que u , v et v' . En effet, le système de v et v' n'admet, en dehors des invariants D , D' et I , que le seul covariant σ . En ajoutant la forme fondamentale u , on n'introduit que les formes obtenues en opérant avec u une et deux fois sur v , sur v' et sur σ , soit en tout six formes nouvelles; l'opération en question se réduit d'ailleurs ici à une différentiation par rapport à y ; et elle donne les trois covariants linéaires π , π' et p , puis les trois invariants A , A' , Γ .

Toutefois, avant d'introduire la quatrième forme fondamentale u' , je vais tirer des syzygies trouvées plus haut quelques autres syzygies, qui nous seront utiles dans la suite.

Si l'on multiplie (8) successivement par 2π et $2\pi'$, qu'on remplace π^2 , $\pi\pi'$, π'^2 au moyen de (5), (6), (7), et qu'on tienne compte de (9), on obtient, en divisant par u , les deux syzygies

$$(15) \quad 2\pi\sigma = vp + u(2Dv' - Iv'),$$

$$(16) \quad 2\pi'\sigma = v'p + u(Iv' - 2D'v).$$

Si l'on multiplie (8) par 2σ , qu'on remplace $2\pi\sigma$ et $2\pi'\sigma$ au moyen de (15) et (16) et qu'on divise par $2u$, on obtient

$$(17) \quad \sigma^2 = Iv'v' - Dv'^2 - D'v^2,$$

syzygie d'ailleurs bien connue dans la théorie de deux formes quadratiques binaires simultanées.

Multiplions (10) par 2σ , remplaçons $2\pi\sigma$ et $2\pi'\sigma$ au moyen de (15) et (16), $A'v - Av'$ au moyen de (9), et divisons par u ; il viendra

$$(18) \quad 2\Gamma\sigma = p^2 + (2AD' - A'I)v + (2A'D - AI)v'.$$

Les syzygies (5), (6), (7), (12), (13), (14), (15), (16), (17) et (18) permettent d'exprimer en fonction des formes droites

$$(u, v, v', p, A, A', D, D', I).$$

du système restreint que nous avons considéré jusqu'ici, tous les carrés et produits deux à deux des formes gauches (σ , π , π' , I) de

ce système. Pour plus de commodité, j'ai désigné les formes gauches par des lettres grecques, et les invariants par des majuscules, notation que je continuerai à appliquer dans la suite de cette étude.

En éliminant deux des formes gauches entre les trois syzygies qui donnent leurs carrés et leur double produit, on peut obtenir six syzygies entre formes droites, mais qui se réduisent à deux distinctes, savoir : la syzygie (9) et la suivante :

$$(19) \quad p^2 + u^2(I^2 - 4DD') + 2(2AD' - A'I)\nu + 2(2A'D - AI)\nu' = 0.$$

Formons maintenant les syzygies dérivées de (15), (16), (17), (18). Les seconds termes de (15) et (16) donnent respectivement

$$(20) \quad A\sigma - \Gamma\nu = u(2D\pi' - I\pi),$$

$$(21) \quad A'\sigma - \Gamma\nu' = u(I\pi' - 2D'\pi),$$

Les troisièmes termes donneraient (12) et (13). Le second terme de (17) donne

$$(22) \quad p\sigma + (2D'\nu - I\nu')\pi + (2D\nu' - I\nu)\pi' = 0.$$

Le troisième terme donne une relation qui se ramène à (18) et (19). Le second terme de (18) donne

$$(23) \quad \Gamma p + (2AD' - A'I)\pi + (2A'D - AI)\pi' = 0$$

et le troisième terme ramène à (14). Enfin le second et le troisième terme de (19) conduisent encore à (23) et (14).

De (18) et de (19) on tire

$$(23 \text{ bis}) \quad 4\Gamma\sigma = p^2 - u^2(I^2 - 4DD'),$$

syzygie qui montre en passant que les deux facteurs linéaires du covariant σ sont

$$p \pm u\sqrt{I^2 - 4DD'}.$$

4. Introduisons maintenant la seconde forme linéaire

$$u' = u'_0 x + \Lambda y.$$

Nous avons à opérer avec elle sur chacune des formes trouvées jusqu'ici, savoir u , ν , ν' , π , π' , σ et p .

En opérant sur u , nous obtenons l'invariant Λ , résultant de u' et u .

En opérant une fois sur ν , il vient

$$2(u'_0 \pi_0 - \Lambda \nu_0) + 2(\Lambda u'_0 - \Lambda \pi_0) \gamma,$$

ce qui nous apprend l'existence d'un covariant linéaire π'' et d'un invariant B, définis par les syzygies

$$(24) \quad u\pi'' = u'\pi - \Lambda \nu,$$

$$(25) \quad uB = \Lambda u' - \Lambda \pi,$$

l'expression complète de π'' étant d'ailleurs

$$(26) \quad \pi'' = \pi'_0 x + B\gamma.$$

En opérant une seconde fois avec u' sur ν ou, ce qui revient au même, une fois avec u' sur π'' , nous obtenons un nouvel invariant C, défini par la syzygie

$$(27) \quad uC = u'B - \Lambda \pi''.$$

En opérant de même avec u' sur ν' , nous obtiendrons évidemment un covariant linéaire π''' et deux invariants B', C', définis respectivement par les syzygies

$$(28) \quad u\pi''' = u'\pi' - \Lambda \nu',$$

$$(29) \quad uB' = \Lambda' u' - \Lambda \pi',$$

$$(30) \quad uC' = u'B' - \Lambda \pi''',$$

et le covariant π''' aura pour expression complète

$$(31) \quad \pi''' = \pi'''_0 x + B'\gamma.$$

En opérant avec u' sur π et π' , on retrouve les invariants B et B'.
Opérons maintenant sur σ ; il vient

$$(u'_0 p_0 - 2\Lambda \sigma_0)x + (2\Gamma u'_0 - \Lambda p_0)\gamma,$$

ce qui démontre l'existence d'un covariant linéaire p' et d'un invariant Λ' , définis par les syzygies

$$(32) \quad up' = u'p - 2\Lambda \sigma,$$

$$(33) \quad u\Lambda' = 2\Gamma u' - \Lambda p,$$

le covariant p' ayant pour expression complète

$$(34) \quad p' = p'_0 x + \Lambda'\gamma.$$

En opérant une seconde fois sur σ , ou une première fois sur p' ,

nous obtenons l'invariant Γ' , défini par

$$(35) \quad 2u\Gamma' = u'\Lambda' - \Lambda p'.$$

(La présence du coefficient 2 se justifie par ce fait qu'en effectuant les calculs on trouverait bien, pour Γ' , une fonction entière des coefficients primitifs.)

Enfin, en opérant avec u' sur p , on retombe sur l'invariant Λ' .

Le système de formes est donc maintenant complet; il ne reste qu'à établir les syzygies reliant les dernières formes introduites entre elles et avec les précédentes.

5. Il est tout d'abord aisé de voir que π'' , π''' , p' , C , C' et Γ' jouent respectivement le même rôle, dans le système partiel (u', v, v') , que π , π' , p , Λ , Λ' et Γ , dans le système partiel (u, v, v') . En effet, si l'on multiplie (8) par u' , qu'on remplace $u'\pi'$ et $u'\pi$ au moyen de (28) et (24), il vient, en divisant par u ,

$$(36) \quad u'\sigma = v\pi''' - v'\pi'',$$

qui est l'analogue de (8) : π'' et π''' sont donc les analogues de π et π' . D'autre part, en multipliant (9) par u' , remplaçant $A'u'$ et Au' au moyen de (29) et (25), tenant compte de (8) et divisant par u , il vient

$$(37) \quad u'p = \Lambda\sigma + B'v - Bv',$$

d'où, comparant avec (32),

$$(38) \quad up' = B'v - Bv' - \Lambda\sigma.$$

Si alors on multiplie (38) par u' , qu'on remplace $u'B'$ et $u'B$ au moyen de (30) et de (27), qu'on tienne compte de (36) et qu'on divise par u , il viendra

$$(39) \quad u'p' = C'v - Cv',$$

qui est l'analogue de (9); et ainsi de suite.

Le second terme de (38) donne

$$(40) \quad u\Lambda' = 2B'\pi - 2B\pi' - \Lambda p;$$

d'où, comparant avec (33),

$$(41) \quad B\pi' - B'\pi - \Gamma u' = 0.$$

Le second terme de (41) donne

$$(42) \quad \dot{B}A' - AB' + \Gamma\Lambda = 0,$$

syzygie qui exprime le produit des deux invariants gauches Γ , Λ , en fonction des invariants droits.

D'autre part, multiplions (24) par B' , (28) par $-B$, et ajoutons; il vient

$$u(B'\pi'' - B\pi''') = u'(B'\pi - B\pi') + \Lambda(B\nu' - B'\nu).$$

Mais, en vertu de (40) et de (32), combiné avec (38), on a

$$\begin{aligned} B'\pi - B\pi' &= \frac{1}{2}(u\Lambda' + \Lambda p), \\ B\nu' - B'\nu &= -\frac{1}{2}(up' + u'p). \end{aligned}$$

La syzygie ci-dessus devient donc, en divisant par u ,

$$(43) \quad B'\pi'' - B\pi''' = \frac{1}{2}(u'\Lambda' - \Lambda p') = u\Gamma',$$

en vertu de (35). Cette syzygie (43) est l'analogue de (41), et fait ressortir l'analogie de Γ' avec Γ . Les invariants B , B' ne changent pas, et Λ change seulement de signe quand on permute les coefficients de u et de u' .

Nous pourrions donc écrire immédiatement toute une série de syzygies, analogues de celles qui ont été données précédemment; je me bornerai à celle-ci, qui a lieu entre invariants,

$$(44) \quad CB' - BC' + \Lambda\Gamma' = 0,$$

analogue de (42).

6. On peut remarquer, en passant, que toutes les formes du système complet peuvent s'exprimer en fonction rationnelle des invariants et des deux formes linéaires indépendantes u , u' , avec une puissance de leur résultant Λ comme dénominateur. En effet, les syzygies (25), (29), (27), (30), (33), (35) donnent déjà les covariants linéaires π , π' , π'' , π''' , p , p' , exprimés de cette manière, savoir

$$(45) \quad \begin{cases} \Lambda\pi = \Lambda u' - Bu, \\ \Lambda\pi' = \Lambda' u' - B'u, \\ \Lambda\pi'' = Bu' - Cu, \\ \Lambda\pi''' = B'u' - C'u, \\ \Lambda p = 2\Gamma u' - \Lambda' u, \\ \Lambda p' = \Lambda' u' - 2\Gamma' u. \end{cases}$$

Alors (28), (29) et (32) donnent, par un calcul facile,

$$(46) \quad \Lambda^2 v = A u'^2 - 2 B u u' + C u^2,$$

$$(47) \quad \Lambda^2 v' = A' u'^2 - 2 B' u u' + C' u^2.$$

$$(48) \quad \Lambda^2 \sigma = \Gamma u'^2 - \Lambda' u u' + \Gamma' u^2.$$

A l'inspection de ces syzygies, on voit immédiatement que $AC - B^2$, $A'C' - B'^2$, $AC' + CA' - 2BB'$ doivent être respectivement égaux à D , D' , I , multipliés par une puissance de Λ choisie de manière à rétablir l'homogénéité, ce qui donne les trois syzygies entre invariants

$$(49) \quad AC - B^2 = D \Lambda^2,$$

$$(50) \quad A'C' - B'^2 = D' \Lambda'^2,$$

$$(51) \quad AC' + CA' - 2BB' = I \Lambda^2.$$

Le discriminant de σ , formé au moyen de (11), est

$$\Gamma \sigma - \frac{1}{4} p^2,$$

c'est-à-dire, d'après la syzygie (23 bis),

$$DD' - \frac{1}{4} I^2.$$

En le formant au moyen de l'expression (48), on obtient la syzygie

$$(52) \quad 4 \Gamma \Gamma' - \Lambda'^2 = (4 DD' - I^2) \Lambda^2.$$

L'invariant commun de σ et de v , formé au moyen de (2) et de (11), est donné par

$$\Gamma v + \Lambda \sigma - p \pi.$$

Mais, en ajoutant les syzygies (10), (8) et (9) respectivement multipliés par v , A , $-\pi$, on trouve

$$(53) \quad \Gamma v + \Lambda \sigma - p \pi = 0.$$

L'invariant commun dont il s'agit est donc identiquement nul; en le formant au moyen des expressions (46) et (48), on obtient la syzygie

$$(54) \quad \Lambda \Gamma' + C \Gamma - B \Lambda' = 0.$$

De même l'invariant commun de σ et v' , égalé à zéro, donne

$$(55) \quad A' \Gamma' + C' \Gamma - B' \Lambda' = 0.$$

Si l'on retranche (55) multiplié par A de (54) multiplié par A' , et qu'on tienne compte de (42), il vient, en divisant par Γ ,

$$(56) \quad CA' - AC' + \Lambda A' = 0.$$

7. Pour former rapidement d'autres syzygies entre les invariants, imaginons que, par une substitution convenable, on ait pris pour nouvel y la forme linéaire u' , de telle sorte que u'_0 devienne nul. Les nouvelles valeurs des autres péninvariants seront données en fonction de u_0 et des invariants par les syzygies (45), (46), (47), (48), en y faisant $u = 0$, $u' = 0$; savoir :

$$\left\{ \begin{array}{llllll} \pi_0 = -\frac{B u_0}{\Lambda}, & \pi'_0 = -\frac{B' u_0}{\Lambda}, & \pi''_0 = -\frac{C u_0}{\Lambda}, & \pi'''_0 = -\frac{C' u_0}{\Lambda}; \\ p_0 = -\frac{\Lambda' u_0}{\Lambda}, & p'_0 = -\frac{2 \Gamma' u_0}{\Lambda}, & v_0 = \frac{C u_0^2}{\Lambda^2}, & v'_0 = \frac{C' u_0^2}{\Lambda^2}, & \sigma_0 = \frac{\Gamma' u_0^2}{\Lambda^2}. \end{array} \right.$$

Mais toutes les syzygies trouvées ne doivent pas cesser d'être satisfaites quand on y remplace les covariants par les péninvariants correspondants, quelles que soient les valeurs particulières que prennent ces péninvariants suivant la substitution employée. En reportant les valeurs (57) dans chacune des syzygies obtenues entre covariants, on aura donc des syzygies entre invariants.

En opérant de cette manière sur les syzygies (5), (6), (7), (8), (9), (10), on retrouve des syzygies connues (49), (50), (51), (44), (56) et (42). Les syzygies (12), (13), (15) et (16) donnent quatre relations nouvelles, savoir :

$$(58) \quad A \Lambda' - 2 B \Gamma + (2 A' D - A I) \Lambda = 0,$$

$$(59) \quad \Lambda' \Lambda' - 2 B' \Gamma + (A' I - 2 A D') \Lambda = 0,$$

$$(60) \quad C \Lambda' - 2 B \Gamma' + (C I - 2 C' D) \Lambda = 0,$$

$$(61) \quad C' \Lambda' - 2 B' \Gamma' + (2 C D' - C' I) \Lambda = 0,$$

qui, d'ailleurs, se correspondent entre elles par la permutation des coefficients de u et de u' ou de ceux de v et de v' .

La syzygie (17) donne la suivante, analogue de (14),

$$(62) \quad \Gamma^2 = I C C' - C^2 D' - C'^2 D.$$

La syzygie (18) donne, en tenant compte de (52), la relation nouvelle

$$(63) \quad \Gamma \Gamma' = I B B' - B^2 D' - B'^2 D.$$

Les syzygies (20) et (21) donnent également deux relations

nouvelles, savoir :

$$(64) \quad A\Gamma' - C\Gamma + (2B'D - IB')\Lambda = 0,$$

$$(65) \quad A'\Gamma' - C'\Gamma + (IB' - 2BD')\Lambda = 0.$$

Les syzygies (22) et (23) donnent encore les deux relations nouvelles

$$(66) \quad \Gamma\Lambda' = I(BC' + CB') - 2(BCD' + B'C'D),$$

$$(67) \quad \Gamma\Lambda' = I(BA' + AB') - 2(ABD' + A'B'D),$$

qui se déduisent l'une de l'autre, en permutant les coefficients de u et de u' .

La syzygie (23 bis) ramène à (52); de même les suivantes conduisent à des identités ou à des relations déjà connues.

8. En résumé, le système que nous venons d'étudier comprend en tout vingt-quatre formes, dont les degrés, par rapport aux coefficients des quatre formes fondamentales u, v, v', u' , sont indiqués dans le Tableau ci-dessous :

3 covariants quadratiques...	2 droits.....	v	0	1	0	0
		v'	0	0	1	0
	1 gauche....	σ	0	1	1	0
8 covariants linéaires.....	4 droits.....	u	1	0	0	0
		u'	0	0	0	1
		p	1	1	1	0
	4 gauches....	p'	0	1	1	1
		π	1	1	0	0
		π'	1	0	1	0
		π''	0	1	0	1
		π'''	0	0	1	1
		A	2	1	0	0
		A'	2	0	1	0
		B	1	1	0	1
13 invariants.....	9 droits.....	B'	1	0	1	1
		C	0	1	0	2
		C'	0	0	1	2
	4 gauches....	D	0	2	0	0
		D'	0	0	2	0
		I	0	1	1	0
		Γ	2	1	1	0
		Γ'	0	1	1	2
		Λ	1	0	0	1
		Λ'	1	1	1	1

Les expressions de ces 13 invariants en fonction des coefficients

des formes indépendantes sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 \Lambda &= a_1^2 b_0 - 2a_0 a_1 b_1 + a_0^2 b_2, & C &= a_1'^2 b_0 - 2a_0' a_1' b_1 + a_0'^2 b_2, \\
 \Lambda' &= a_1^2 b_0' - 2a_0 a_1 b_1' + a_0^2 b_2', & C' &= a_1'^2 b_0' - 2a_0' a_1' b_1' + a_0'^2 b_2', \\
 B &= a_1 a_1' b_0 - (a_0 a_1' + a_1 a_0') b_1 + a_0 a_0' b_2, \\
 B' &= a_1 a_1' b_0' - (a_0 a_1' + a_1 a_0') b_1' + a_0 a_0' b_2', \\
 D &= b_0 b_2 - b_1^2, & I &= b_0 b_2' - 2b_1 b_1' + b_2 b_0', & D' &= b_0' b_2' - b_1'^2, \\
 \Gamma &= a_0^2 (b_1 b_2' - b_2 b_1') + a_0 a_1 (b_2 b_0' - b_0 b_2') + a_1^2 (b_0 b_1' - b_1 b_0'), \\
 \Gamma' &= a_0'^2 (b_1 b_2' - b_2 b_1') + a_0' a_1' (b_2 b_0' - b_0 b_2') + a_1'^2 (b_0 b_1' - b_1 b_0'), \\
 \Lambda &= a_0 a_1' - a_1 a_0', \\
 \Lambda' &= 2a_0 a_0' (b_1 b_2' - b_2 b_1') + (a_0 a_1' + a_1 a_0') (b_2 b_0' - b_0 b_2') \\
 &\quad + 2a_1 a_1' (b_0 b_1' - b_1 b_0'),
 \end{aligned}
 \tag{68}$$

Enfin les vingt syzygies qui relient ces 13 invariants se partagent en 3 groupes, savoir :

9 peuvent être considérées comme exprimant les carrés et les produits deux à deux des invariants gauches (à l'exception du seul carré Λ^2) en fonction des invariants droits; savoir :

$$\begin{aligned}
 \Gamma^2 &= \Lambda \Lambda' I - \Lambda^2 D' - \Lambda'^2 D, \\
 \Gamma'^2 &= C C' I - C^2 D' - C'^2 D, \\
 \Lambda'^2 &= I (A C' + C A' + 2 B B') - 4 (A' C' D + B^2 D'), \\
 \Gamma \Gamma' &= B B' I - B^2 D' - B'^2 D, \\
 \Gamma \Lambda &= \Lambda B' - \Lambda' B, \\
 \Gamma' \Lambda &= B C' - B' C, \\
 \Gamma \Lambda' &= I (B A' + \Lambda B') - 2 (A B D' + A' B' D), \\
 \Gamma' \Lambda' &= I (B C' + C B') - 2 (B C D' + B' C' D), \\
 \Lambda \Lambda' &= A C' - C A'.
 \end{aligned}$$

Trois autres syzygies expriment en fonction des invariants droits les produits de Λ^2 par D, D', I :

$$\begin{aligned}
 D \Lambda^2 &= A C - B^2, & D' \Lambda^2 &= A' C' - B'^2, \\
 I \Lambda^2 &= A C' + C A' - 2 B B'.
 \end{aligned}$$

Les huit dernières sont des syzygies gauches, c'est-à-dire dans chaque terme desquelles entre un invariant gauche et un seul :

$$\begin{aligned}
 \Lambda \Gamma' + C \Gamma - B \Lambda' &= 0, & \Lambda' \Gamma' + C' \Gamma - B' \Lambda' &= 0, \\
 \Lambda \Gamma' - C \Gamma + (2 B' D - B I) \Lambda &= 0, & \Lambda' \Gamma' - C' \Gamma + (B' I - 2 B D') \Lambda &= 0, \\
 \Lambda \Lambda' - 2 B \Gamma + (2 \Lambda' D - \Lambda I) \Lambda &= 0, \\
 \Lambda' \Lambda' - 2 B' \Gamma + (\Lambda' I - 2 \Lambda D') \Lambda &= 0, \\
 C \Lambda' - 2 B \Gamma' + (C I - 2 C' D) \Lambda &= 0, \\
 C' \Lambda' - 2 B' \Gamma' + (2 C D' - C' I) \Lambda &= 0.
 \end{aligned}$$

9. Pour terminer, je vais appliquer les résultats obtenus ci-dessus à la solution de la question suivante, solution qui sera immédiatement utilisable dans le domaine ternaire :

Étant données les mêmes quatre formes u, u', v, v' que ci-dessus, exprimer en fonction de leurs 13 invariants les 6 invariants que possède le système des trois formes composées

$$(69) \quad \begin{cases} (u) = ku' - k'u, \\ (v) = kv - u^2, \\ (v') = k^2 v' - 2kuu' + k'u^2, \end{cases}$$

considérées comme formes fondamentales; k, k' étant deux arbitraires.

Les 6 invariants à calculer sont : les discriminants de (v) et (v') ; et leur invariant commun; je les désignerai par $(D), (D'), (I)$; puis le résultant de (u) et (v) , celui de (u) et (v') , celui de (u) et du jacobien de (u) et (v) ; je les désignerai par $(A), (A'), (\Gamma)$, par analogie avec les notations employées ci-dessus.

Exprimons d'abord $(u), (v)$ et (v') en fonction de x, y et des péninvariants du système des formes u, u', v, v' , au moyen des équations (2). Il vient

$$(70) \quad \begin{cases} (u) = (ku'_0 - k'u_0)x + k\Lambda y, \\ (v) = (kv_0 - u_0^2)x^2 + 2k\pi_0 xy + k\Lambda y^2, \\ (v') = (k^2 v'_0 - 2ku_0 u'_0 + k'u_0^2)x^2 + 2k(k\pi'_0 - \Lambda u_0)xy + k^2 \Lambda' y^2. \end{cases}$$

Nous n'avons, pour obtenir $(A), (A'), (D), (D'), (I), (\Gamma)$, qu'à faire dans celles des expressions (68) qui donnent A, A', D, D', I, Γ ,

$$\begin{aligned} a_0 &= ku'_0 - k'u_0, & a_1 &= k\Lambda, \\ b_0 &= kv_0 - u_0^2, & b_1 &= k\pi_0, & b_2 &= k\Lambda, \\ b'_0 &= k^2 v'_0 - 2ku_0 u'_0 + k'u_0^2, & b'_1 &= k(k\pi'_0 - \Lambda u_0), & b'_2 &= k^2 \Lambda'. \end{aligned}$$

Mais de plus, puisqu'il s'agit de calculer des invariants, rien n'empêche de supposer qu'on ait préalablement pris u' pour nouvel y , ce qui donne aux péninvariants $u'_0, v_0, v'_0, \pi_0, \pi'_0$ les valeurs (57); et en remplaçant u_0 , qui figurerait en facteur commun, par l'unité, on en conclut qu'il suffit de faire dans les expres-

sions (68)

$$(71) \quad \begin{cases} a_0 = -k', & a_1 = k\Lambda, \\ b_0 = \frac{kC - \Lambda^2}{\Lambda^2}, & b_1 = -\frac{kB}{\Lambda}, & b_2 = kA, \\ b'_0 = \frac{k^2 C' + k' \Lambda^2}{\Lambda^2}, & b'_1 = -k' \frac{kB' + \Lambda^2}{\Lambda}, & b'_2 = k^2 A'. \end{cases}$$

On trouve ainsi successivement, en utilisant les syzygies entre invariants données plus haut,

$$(72) \quad \begin{cases} (A) = k [k^2 C - 2kk'B + k'^2 A - k\Lambda^2], \\ (A') = k^2 [k^2 C' - 2kk'B' + k'^2 A' - k'\Lambda^2], \\ (D) = k[kD - A], \\ (I) = k[k^2 I - k(A' + 2B) + k'A], \\ (D') = k^2 [k^2 D' - 2kB' + k'A' - \Lambda^2], \\ (\Gamma) = k^2 [k^2 \Gamma' - k k' \Lambda' + k'^2 \Gamma + k(B' - C)\Lambda + k'(B - A')\Lambda + \Lambda^3]. \end{cases}$$

Telles sont les expressions demandées.

Mémoire sur la théorie algébrique des équations;
par M. A.-E. PELLET.

(Séance du 16 février 1887.)

Je me propose, dans ce Mémoire, d'établir les théorèmes généraux de la théorie algébrique des équations indépendamment de la théorie des substitutions. J'applique ensuite la méthode générale aux équations dont dépend la division du cercle en un nombre premier de parties égales et aux équations qui se ramènent aux équations binômes par une transformation linéaire. L'idée première de ce travail a été exposée dans une thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris, en 1878.

I.

Généralités.

1. On peut définir la notion de quantité en partant de l'idée de nombre et s'appuyant sur les principes du Calcul infinitésimal;

alors la conception de Descartes pour les quantités réelles et celle d'Argant pour les quantités imaginaires ne servent que de support à la notion et viennent en aide au raisonnement en donnant prise à l'imagination, surtout dans les théories de l'Analyse infinitésimale. Mais on peut partir de ces conceptions de Descartes et d'Argant pour définir les quantités; alors les quatre opérations fondamentales, addition et soustraction, multiplication et division, se définissent par la Géométrie; dans le cas où les quantités sont commensurables, les résultats de ces opérations coïncident avec ceux de l'Arithmétique. Un avantage de cette façon d'envisager les choses est de délimiter avec précision le domaine de l'Algèbre de celui de l'Analyse infinitésimale. L'Algèbre est l'étude générale des quantités, réelles ou imaginaires, en se bornant toutefois à un nombre fini d'opérations, tandis que l'Analyse infinitésimale est l'ensemble des théories où l'on envisage un nombre infini d'opérations.

2. Une fonction *entière* de plusieurs quantités est une fonction de ces quantités qui peut s'exprimer par les trois premières opérations, addition, soustraction et multiplication; une fonction *rationnelle* est une fonction qui peut s'exprimer par les quatre opérations fondamentales, addition, soustraction, multiplication et division.

Nous considérerons surtout dans ce Mémoire les fonctions rationnelles. Soient

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_k.$$

k quantités non commensurables regardées comme connues : toute quantité, fonction rationnelle de ces quantités, est dite *rationnelle actuellement* ou simplement *rationnelle*; toute quantité ne pouvant pas s'exprimer rationnellement, au moyen des k quantités $a_1, a_2, \dots, a_k$, est actuellement irrationnelle. Nous supposons que, parmi les k quantités $a_1, a_2, \dots, a_k$, aucune ne puisse s'exprimer rationnellement en fonction des autres, sans quoi on pourrait diminuer leur nombre.

Dans le cas où aucune quantité n'est donnée spécialement, les seules quantités rationnelles sont les nombres entiers et fractionnaires, fonctions entières et rationnelles de l'unité. Les irrationnelles qui se présentent tout d'abord sont les racines des équa-

tions du second degré à coefficients entiers. Soit

$$Dx^2 + Ex + F = 0$$

une telle équation, D, E, F étant des entiers n'ayant pas de diviseur commun. Posons $E^2 - 4DF = g^2A$, g et A étant des entiers, la dernier A non divisible par le carré d'un nombre premier et positif ou négatif selon le signe de $E^2 - 4DF$; et $y^2 - A = 0$, si A est pair ou congru à $-1 \pmod{4}$; $y^2 + y + A_1 = 0$, A_1 représentant $\frac{1-A}{4}$, si A est congru à $1 \pmod{4}$.

Il est clair que toute fonction rationnelle de x peut s'exprimer rationnellement en fonction de y , et inversement. Mais une fonction rationnelle de x n'est un *nombre entier algébrique* que dans le cas où elle se ramène à une fonction entière de y . On dit qu'une quantité est un nombre entier algébrique lorsqu'elle est racine d'une équation à coefficients entiers, le coefficient de la plus haute puissance de l'inconnue étant l'unité; une fonction entière de telles quantités jouit de la même propriété, et, en particulier, est un nombre entier si elle est commensurable. Un nombre entier algébrique est dit *unité complexe*, lorsque son inverse est encore un nombre entier algébrique. Parmi les fonctions entières de y , il y a des unités complexes qui sont toutes des puissances entières de l'une d'elles, lorsque A est un nombre positif; dans le cas où A est négatif, il n'y a d'unité complexe que pour les valeurs -1 et -3 de A . (Kronecker, *Comptes rendus*, année 1883, 1^{er} semestre; et 1884, 2^e semestre). Lorsque A est égal à l'un des nombres

$$(a) \quad -1, \pm 2, \pm 3, 5, -7, -11, 13,$$

les fonctions entières de y jouissent de la propriété fondamentale des nombres entiers ordinaires; elles ne sont décomposables que d'une seule manière en un produit de facteurs premiers (DEDEKIND, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1877). Pour ces valeurs de A , les fonctions entières de y sont dites *nombres entiers complexes*. Ces propriétés n'ont plus lieu lorsque A n'est pas un nombre de la suite a .

3. Il y a la plus grande analogie entre la *divisibilité* des nombres entiers, ordinaires ou complexes, et la divisibilité des fonc-

tions entières d'une variable. Lorsque deux fonctions entières $f(x)$ et $f_1(x)$ n'ont pas de diviseur commun, on peut trouver deux autres fonctions P et Q, telles que

$$Pf(x) + Qf_1(x) = 1.$$

De là résulte qu'une fonction irréductible, qui divise le produit de deux fonctions, divise au moins l'une d'elles; et qu'une fonction entière ne peut se décomposer que d'une seule manière en un produit de facteurs irréductibles.

Nous rappelons qu'on dit qu'une fonction entière est irréductible lorsqu'elle n'est divisible par aucune fonction entière à coefficients rationnellement connus, de degré inférieur. Gauss a le premier démontré que, si une fonction entière à coefficients entiers est le produit de deux fonctions entières à coefficients rationnels, elle est aussi le produit de deux fonctions entières à coefficients entiers; le théorème s'applique encore lorsque les coefficients sont des entiers complexes et permet dans ces cas de décomposer un polynôme en ses facteurs quelquefois avec facilité.

D'après ce qui précède, une fonction ne peut s'annuler pour un nombre de valeurs de la variable, supérieur au degré de la fonction, quelles que soient les quantités considérées comme connues. Lorsque l'équation obtenue, en égalant la fonction à 0, est une équation binôme ou se ramène aux équations binômes, on voit facilement qu'elle a autant de racines qu'il y a d'unités dans son degré, en tenant compte de leurs degrés de multiplicité. Mais les méthodes du Calcul infinitésimal sont nécessaires pour montrer que le théorème s'étend à tous les cas. Les irrationnelles, racines d'équations algébriques à coefficients entiers, se désignent sous le nom de *nombres algébriques*. Cette classe de quantités est très étendue, mais elle est loin de comprendre toutes les quantités incommensurables. Liouville a donné un caractère (*Journal de Mathématiques*, t. V) permettant d'affirmer dans certains cas qu'une quantité donnée n'est racine d'aucune équation à coefficients rationnels d'un degré inférieur à un nombre donné, quelconque d'ailleurs. M. Hermite a plus tard montré que le nombre e , base des logarithmes népériens, ne satisfait à aucune équation algébrique à coefficients entiers, démonstration étendue au nombre π ; rapport de la circonférence au diamètre, par M. Lindemann.

Enfin, M. Cantor, dans sa théorie des ensembles, a rattaché la proposition à son véritable principe (*Acta mathematica*, année 1883). Son raisonnement montre que, en figurant les quantités d'après le mode d'Argant, on peut relier deux points quelconques du plan par un trait continu ne passant par aucun des points pour lesquels la quantité correspondante est racine d'une équation à coefficients entiers. Un nombre algébrique est dit *nombre entier algébrique* lorsque le coefficient de la plus haute puissance de l'inconnue est 1, dans l'équation qui le définit, les autres étant entiers.

4. Lorsque nous conviendrons de regarder comme connue une certaine irrationnelle, nous dirons, suivant l'usage, que nous adjoignons cette quantité aux quantités connues. L'adjonction aux quantités connues d'une quantité qui n'est racine d'aucune équation à coefficients rationnellement connus revient à adjoindre une quantité indéterminée. Dans l'étude algébrique des équations, on n'adjoint aux quantités connues que des irrationnelles algébriques, c'est-à-dire que l'on peut définir à l'aide des quantités primitives par des équations à coefficients rationnellement connus, et le problème principal est la recherche des irrationnelles dont la connaissance permet de former rationnellement les diverses racines d'une ou de plusieurs équations données.

Lagrange a démontré que, étant données tant d'irrationnelles algébriques qu'on voudra, on peut toujours les exprimer toutes en fonction rationnelle d'une même irrationnelle.

En effet, on pourra former une équation, à coefficients rationnellement connus, admettant pour racines ces irrationnelles, et qui n'aura pas de racines égales. La proposition se présente alors comme corollaire du théorème suivant, qui est fondamental :

Soit $V_0 = \varphi(x_0, x_1, \dots, x_{m-1})$ une fonction rationnelle des m racines de l'équation $f(x) = 0$, n'ayant pas de racines égales, cette fonction pouvant acquérir par les permutations des racines 1, 2, 3, ..., m valeurs distinctes; ces 1, 2, 3, ..., m valeurs de V sont racines d'une équation à coefficients rationnels, $\pi(V) = 0$, qui peut être réductible. Chacune des m racines $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$, peut s'exprimer rationnellement en fonction de l'une des valeurs de V ; par suite, les diverses valeurs de V peuvent s'exprimer rationnellement en fonction l'une de l'autre; $\pi(V) = 0$ se décom-

pose en facteurs irréductibles d'égal degré, et ce degré est indépendant de la fonction prise pour V , pourvu qu'elle satisfasse aux conditions posées. Soit $F(V)$ un des diviseurs irréductibles de $\pi(V)$; V est appelée la *fonction résolvante* et $F(V) = 0$ l'équation résolvante de l'équation $f(x) = 0$ (SERRET, *Algèbre supérieure*; CAMILLE JORDAN, *Traité des substitutions et des équations algébriques*.)

5. Soient $\varphi(z) = 0$ une équation irréductible, et $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}$ ses m racines; soit en outre $f(z, z_0)$ une fonction entière de z , à coefficients fonctions rationnelles de z_0 , irréductible, $f(z, z_1), \dots, f(z, z_{m-1})$ sont également irréductibles, et, si la fonction entière $F(z, z_0)$ est divisible par $f(z, z_0)$, $F(z, z_1)$ le sera par $f(z, z_1)$, $F(z, z_2)$ par $f(z, z_2)$, et ainsi des autres.

Si $f(z, z_i)$ n'est pas irréductible, soit $\beta(z, z_i)$ un de ses diviseurs; ζ étant une indéterminée, effectuons la division des polynômes $f(z, \zeta)$, $\beta(z, \zeta)$ et désignons par $\lambda(z, \zeta)$, $\theta(z, \zeta)$ le quotient et le reste de cette division; on aura

$$f(z, \zeta) = \beta(z, \zeta) \lambda(z, \zeta) + \theta(z, \zeta).$$

D'après notre hypothèse, on a identiquement $\theta(z, z_i) = 0$; ainsi, dans le polynôme $\theta(z, \zeta)$, les coefficients des diverses puissances de z s'annulent pour $\zeta = z_i$; par conséquent, ces coefficients s'annuleront aussi si l'on remplace ζ par une quelconque des racines de l'équation $\varphi(z) = 0$, puisqu'elle est supposée irréductible, et en particulier pour $\zeta = z_0$; $f(z, z_0)$ admettrait donc le diviseur $\beta(z, z_0)$ et ne serait pas irréductible.

La première partie du théorème est donc démontrée; pour démontrer la seconde partie, on remplacerait dans $F(z, z_0)$ et $f(z, z_0)$, z_0 par ζ et l'on effectuerait la division comme précédemment; on verrait que le reste est identiquement nul pour $\zeta = z_0$ et que par suite il est nul aussi lorsqu'on y remplace ζ par une autre racine de $\varphi(z) = 0$.

6. $\theta(x)$ étant une fonction rationnelle de x , soit μ le nombre de valeurs distinctes qu'elle prend lorsqu'on remplace x successivement par les m racines de l'équation $f(x) = 0$ irréductible

et de degré m ; μ est un diviseur de m et ces μ valeurs sont racines d'une équation irréductible.

Désignons par $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$ les m racines de $f(x) = 0$. Celles de ces racines qui donnent pour $\theta(x)$ la valeur $\theta(x_0)$, satisfaisant à la fois aux deux équations $f(x) = 0$ et $\theta(x) - \theta(x_0) = 0$, appartiennent au plus grand commun diviseur des premiers membres de ces équations, et, réciproquement, les racines de ce plus grand commun diviseur égalé à 0 satisfont à la fois aux deux équations précédentes. Soit $\chi[x, \theta(x_0)]$ ce plus grand commun diviseur : je dis que $\chi[x, \theta(x_i)]$ sera le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et $\theta(x) - \theta(x_i)$. En effet, $\chi[x, \theta(x_i)]$ divise $f(x)$ et $\theta(x) - \theta(x_i)$ d'après le n° 5. De plus, il n'y a pas de polynôme de degré supérieur à $\chi[x, \theta(x_i)]$ divisant à la fois $f(x)$ et $\theta(x) - \theta(x_i)$; car on en déduirait, d'après le théorème qui fait l'objet de ce n° 5, un polynôme de degré supérieur à $\chi[x, \theta(x_0)]$, divisant $f(x)$ et $\theta(x) - \theta(x_0)$. Maintenant, si $\chi[x, \theta(x_0)] = 0$ et $\chi[x, \theta(x_i)] = 0$ ont une racine commune, elles ont toutes leurs racines communes. En effet, la racine commune appartient à la fois à $f(x) = 0$ et $\theta(x) - \theta(x_0) = 0$ d'une part, à $f(x)$ et $\theta(x) - \theta(x_i) = 0$ d'autre part; or les deux équations $\theta(x) - \theta(x_0) = 0$ et $\theta(x) - \theta(x_i) = 0$ ne peuvent avoir de racine commune que dans le cas où $\theta(x_0) = \theta(x_i)$, et alors $\chi[x, \theta(x_0)] = \chi[x, \theta(x_i)]$.

Il résulte de ce qui précède que les m racines de $f(x) = 0$ se partagent en $\frac{m}{v}$ groupes de v racines, v étant le degré de $\chi[x, \theta(x_0)]$; les racines de chaque groupe donnent la même valeur pour $\theta(x)$, et cette valeur varie d'un groupe à l'autre.

Si l'on adjoint $\theta(x_0)$ aux quantités connues, $\chi[x, \theta(x_0)]$ devient un polynôme rationnel; ce polynôme est irréductible. En effet, s'il admettait un diviseur $\chi_1[x, \theta(x_0)]$ à coefficients, fonctions rationnelles de $\theta(x_0)$, $\chi[x, \theta(x_i)]$ admettrait le diviseur $\chi_1[x, \theta(x_i)]$. Or, soient $y_0, y_1, \dots, y_{\mu-1}$ les μ valeurs de $\theta(x)$, μ désignant le rapport $\frac{m}{v}$. Ces μ valeurs sont racines d'une équation à coefficients rationnels; car on a

$$y_0^n + y_1^n + \dots + y_{\mu-1}^n = \frac{1}{v} [\theta(x_0)^n + \theta(x_1)^n + \dots + \theta(x_{m-1})^n],$$

et le second membre, fonction symétrique des racines de l'équa-

tion $f(x) = 0$, est rationnel; les coefficients de l'équation en y sont des fonctions entières des μ valeurs qu'il acquiert lorsqu'on donne à n successivement les valeurs $1, 2, \dots, \mu$. D'après cela, le produit $\chi_1(x, y_0) \chi_1(x, y_1) \chi_1(x, y_2) \dots \chi_1(x, y_{\mu-1})$ serait rationnel et diviserait le polynôme $f(x)$, tout en étant de degré inférieur, ce qui est impossible, puisque $f(x)$ est supposé irréductible.

Enfin l'équation qui a pour racines les μ valeurs $y_0, y_1, \dots, y_{\mu-1}$ est irréductible. En effet, si elle ne l'était pas, soient μ' le degré de l'un de ses diviseurs, et $y_0, y_1, \dots, y_{\mu'-1}$ ses μ' racines. Le produit

$$\chi(x, y_0) \chi(x, y_1) \dots \chi(x, y_{\mu'-1})$$

aurait ses coefficients rationnels et diviserait $f(x)$, tout en étant de degré inférieur.

7. Ce théorème conduit à des conséquences importantes relativement aux équations résolvantes. Soient $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$ les m racines d'une équation $f(x) = 0$, irréductible ou non, mais n'ayant pas de racines égales; désignons par V_0 une fonction résolvante de cette équation, et par $F(V) = 0$ son équation résolvante de degré N . Les racines de l'équation $f(x) = 0$ sont des fonctions rationnelles de V_0 ; soient

$$x_0 = \psi_0(V_0), \quad x_1 = \psi_1(V_0), \quad x_2 = \psi_2(V_0), \quad \dots, \quad x_{m-1} = \psi_{m-1}(V_0).$$

On a

$$f[\psi_0(V_0)] = 0;$$

par suite, $f[\psi_0(V)] = 0$ admet toutes les racines de l'équation $F(V) = 0$, puisque celle-ci est irréductible. Ainsi les diverses valeurs qu'acquiert la fonction $\psi_0(V)$, lorsqu'on substitue à V les diverses racines de $F(V) = 0$, sont racines de $f(x) = 0$. Si donc $f(x) = 0$ est irréductible, les valeurs distinctes comprises dans la suite $\psi_0(V_0), \psi_0(V_1), \dots, \psi_0(V_{N-1})$ sont au nombre de m , degré de $f(x) = 0$, et N est un multiple de m . Si $f(x)$ n'est pas irréductible, soit $f(x) = f_1(x) f_2(x) \dots f_i(x) f_{i+1}(x) \dots f_r(x)$ étant des polynômes entiers irréductibles. Si x_0 est racine de $f_i(x) = 0$, par exemple, $\psi_0(V)$ prend, par la substitution à V des diverses racines de l'équation $F(V) = 0$, des valeurs égales aux diverses

racines de $f_1(x) = 0$; et le degré N de $F(V)$ est un multiple des degrés des divers polynômes $f_1(x), f_2(x), \dots, f_i(x)$. Bien plus, le degré de $F(V)$ est un multiple des degrés des équations résolventes des diverses équations $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \dots, f_i(x) = 0$. Soient, en effet, V' une fonction résolvante de l'équation

$$f_1(x) = 0$$

et $F_1(V') = 0$ son équation résolvante. V'_0 est une fonction rationnelle de V_0 . Soit $V'_0 = \Pi_0(V_0)$; on a

$$F[\Pi_0(V_0)] = 0 :$$

donc $F_1[\Pi_0(V)] = 0$ admet toutes les racines de l'équation

$$F(V) = 0.$$

Donc $\Pi_0(V)$ acquiert, par la substitution à V des diverses racines de l'équation $F(V) = 0$, des valeurs égales aux racines de $F_1(V') = 0$, et, puisque celle-ci est irréductible, le nombre de valeurs distinctes de $\Pi(V)$ est égal au degré de $F_1(V') = 0$.

Soit

$$z_0 = \Pi(x_0, x_1, \dots, x_{m-1})$$

une fonction rationnelle des racines de l'équation $f(x) = 0$; substituons dans z_0 , à la place des quantités x , leurs valeurs en fonction de V_0 ; on en déduira $z_0 = \Pi_1(V_0)$. $\Pi_1(V)$ acquiert, par la substitution à V des diverses racines de l'équation $F(V) = 0$, un nombre ν de valeurs distinctes (ν est un diviseur de N), parmi lesquelles se trouve z_0 , et ces valeurs sont racines d'une équation irréductible. De plus, $F(V)$ admet un diviseur à coefficients fonctions rationnelles de z_0 , irréductible si l'on n'adjoint que cette quantité aux quantités connues de degré $\frac{N}{\nu}$; ce diviseur égalé à 0 est la nouvelle équation résolvante après l'adjonction de z_0 .

II.

Des équations holodromes.

8. Nous appellerons *équations holodromes* les équations irréductibles dont toutes les racines peuvent s'exprimer rationnellement en fonction de l'une d'elles; les équations résolventes ren-

trent dans cette classe d'équations. Soient $F(x) = 0$ une équation holodrome de degré m , et $x_0, x_1 = \theta_1(x_0), x_2 = \theta_2(x_0), \dots, x_{m-1} = \theta_{m-1}(x_0)$ ses m racines, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{m-1}$ désignant des fonctions rationnelles. La suite $x_i, \theta_1(x_i), \dots, \theta_{m-1}(x_i)$ est, dans un ordre différent, la même que la suite $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$. On peut supposer que les fonctions θ soient entières; remplaçons x_0 par une variable x , et considérons la suite des fonctions

$$(1) \quad x_1, \theta_1(x), \theta_2(x), \dots, \theta_{m-1}(x).$$

$\theta_i[\theta_j(x)]$ est une fonction entière de x , qui, divisée par $F(x)$, donne pour reste une des m fonctions (1), $\theta_i(x), \theta_j(x)$ étant deux quelconques des fonctions de cette suite, de sorte que l'on peut dire que les fonctions (1) forment un groupe relativement à l'équation $F(x) = 0$. De plus, au lieu de $\theta_i[\theta_j(x)]$, on écrit $\theta_i^j(x)$, et généralement $\theta_i[\theta_i^{n-1}(x)] = \theta_i^n(x)$.

Adjoignons une racine Z_0 de l'équation irréductible $\Phi(Z) = 0$, qui permet de décomposer $F(x) = 0$, et soient $f(x, Z_0)$ un facteur irréductible de $F(x)$ de degré μ , et

$$(2) \quad x_0, \psi_1(x_0), \dots, \psi_{\mu-1}(x_0)$$

ses μ racines. $\theta_i(x_0)$ étant une racine de $F(x) = 0$ non comprise dans la suite précédente,

$$(3) \quad \theta_i(x_0), \theta_i\psi_1(x_0), \dots, \theta_i\psi_{\mu-1}(x_0)$$

sont μ racines de $F(x) = 0$, dont toute fonction symétrique est aussi symétrique par rapport aux racines de l'équation

$$f(x, Z_0) = 0$$

et, par conséquent, peut s'exprimer rationnellement en fonction de Z_0 . L'équation qui admet pour racines les μ quantités (3) est irréductible, car autrement on en déduirait un diviseur pour $f(x, Z_0)$. Les suites (2) et (3) sont distinctes; si elles ne contiennent pas toutes les racines de l'équation $F(x) = 0$, on formera une nouvelle suite de μ quantités, racines de $F(x) = 0$, et d'une équation à coefficients fonctions rationnelles de Z_0 , irréductible, et ainsi de suite. Donc, après l'adjonction de Z_0 , $F(x)$ se décompose en facteurs irréductibles d'égal degré, et ce degré, que nous avons désigné par μ , est un diviseur de m . Remarquons que les

μ fonctions

$$x, \psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_{\mu-1}(x)$$

forment un groupe non seulement relativement à l'équation

$$f(x, Z_0) = 0,$$

mais aussi relativement à l'équation $F(x) = 0$; de même la suite (3) donne le groupe

$$x, \theta_i \psi_1 \theta_i^{-1}(x), \dots, \theta_i \psi_{\mu-1} \theta_i^{-1}(x);$$

en effet, $\psi_i \psi_j(x_0)$ est une racine de $f(x, Z_0) = 0$ et, par suite, est égale à l'une des quantités (2), etc. Quant à la suite (3), si l'on pose $x_i = \theta_i(x_0)$, on a

$$x_0 = \theta_i^{-1}(x_i)$$

et elle coïncide avec la suite

$$x_i, \theta_i \psi_1 \theta_i^{-1}(x_i), \dots, \theta_i \psi_{\mu-1} \theta_i^{-1}(x_i).$$

On aura ainsi un groupe pour chaque facteur de $F(x)$, après l'adjonction de Z_0 ; seulement il peut arriver que ces différents groupes de fonctions coïncident, comme nous le verrons plus loin, ou qu'elles aient toutes un certain nombre de fonctions communes.

9. Z_1 étant une autre racine de $\Phi(Z) = 0$, $f(x, Z_1)$ est irréductible comme $f(x, Z_0)$, et, si l'on désigne par x une racine de l'équation $f(x, Z_1) = 0$, les μ racines de cette équation seront

$$x_1, \psi_1(x_1), \psi_2(x_1), \dots, \psi_{\mu-1}(x_1).$$

Si donc les équations $f(x, Z_1) = 0$ et $f(x, Z_0) = 0$ ont une racine commune, elles ont toutes leurs racines communes, et l'adjonction de Z_1 produit le même effet que l'adjonction de Z_0 . Dans tous les cas, l'adjonction de Z_1 conduit aux mêmes groupes de fonctions relativement à l'équation $F(x) = 0$. Soient $Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_{N-1}$ les N racines de l'équation $\Phi(Z) = 0$; le produit

$$f(x, Z_0) f(x, Z_1) \dots f(x, Z_{N-1})$$

est égal à une puissance de $F(x)$. Si l'on désigne par q l'exposant de cette puissance, on peut partager les N fonctions $f(x, Z)$ en $\frac{N}{q}$ groupes de q fonctions égales entre elles. Soit a une quantité rationnelle ou, si l'on veut, un nombre rationnel, tel que $f(a, Z)$

prenne seulement q valeurs égales à $f(a, Z_0)$ lorsqu'on remplace Z successivement par N racines de $\Phi(z) = 0$; posons

$$f(a, Z_0) = z_0.$$

D'après le n° 6, z_0 est racine d'une équation irréductible de degré $\frac{N}{q}$ à coefficients rationnellement connus. L'adjonction de z_0 permet de décomposer $\Phi(Z)$; l'un de ses facteurs de degré q admet pour racines, en l'égalant à 0, les q valeurs de Z qui donnent à $f(a, Z)$ la valeur $f(a, Z_0)$, et les coefficients de $f(x, Z_0)$ s'expriment rationnellement en fonction de z_0 . Si l'on remplace z_0 par les autres racines de l'équation en z , $\varphi(z) = 0$, on obtient les autres fonctions $f(x, Z_i)$. Posons $\frac{N}{q} = n$, on a $\mu n = m$.

Les racines de $\varphi(z) = 0$ sont fonctions rationnelles des racines de $F(x) = 0$ comme de celles de $\Phi(Z) = 0$. Désignons en effet par $f'(x, z_0)$ ce que devient $f(x, Z_0)$ lorsqu'on a exprimé ses coefficients en fonction de z_0 . Les équations $f'(x_0, z) = 0$ et $\varphi(z) = 0$, x_0 désignant une racine de l'équation $f'(x, z_0) = 0$, ont une seule racine commune z_0 , qu'on pourra obtenir pour les opérations qui donnent le plus grand commun diviseur de $f'(x_0, z)$ et de $\varphi(z)$.

10. Réciproquement, soient

$$x, \psi_1(x), \psi_2(x) \dots \psi_{\mu-1}(x)$$

μ fonctions de la suite (1) formant un groupe relativement à l'équation $F(x) = 0$; x_0 étant une racine de $F(x) = 0$,

$$(x) \quad x_0, \psi_1(x_0), \psi_2(x_0), \dots, \psi_{\mu-1}(x_0),$$

sont μ racines de cette équation; soit x_1 une racine de $F(x) = 0$ ne faisant pas partie de cette suite;

$$x_1, \psi_1(x_1), \psi_2(x_1), \dots, \psi_{\mu-1}(x_1)$$

sont également μ racines de $F(x) = 0$: elles sont différentes des μ racines (x). En effet, si l'on avait $\psi_i(x_1) = \psi_j(x_0)$, on en déduirait $\psi_i^{-1} \psi_i(x_1) = x_1 = \psi_i^{-1} \psi_j(x_0)$, et par suite x_1 serait une des racines (x) contre l'hypothèse. Ainsi μ est un diviseur de m , degré de l'équation $F(x) = 0$. La fonction

$$(a - x)[a - \psi_1(x)][a - \psi_2(x)] \dots [a - \psi_{\mu-1}(x)].$$

où a est une indéterminée rationnelle, acquiert $\frac{m}{\mu}$ valeurs distinctes lorsqu'on substitue successivement à x les diverses racines de l'équation $F(x) = 0$. Ces valeurs sont racines d'une équation irréductible à coefficients rationnels, et l'adjonction d'une racine de cette dernière équation décompose $F(x)$ en $\frac{m}{\mu}$ facteurs irréductibles de degré μ .

11. Supposons que l'équation $\Phi(Z) = 0$ soit elle-même holodrome; et soit, comme précédemment, $f(x, Z_0)$ un des facteurs irréductibles de $F(x)$, après l'adjonction de Z_0 , racine de $\Phi(Z) = 0$. Si l'on désigne par $\theta(x_0)$ une racine de $F(x) = 0$ n'appartenant pas à $f(x, Z_0) = 0$, les μ quantités

$$\theta(x_0), \psi_1\theta(x_0), \psi_2\theta(x_0), \dots, \psi_{\mu-1}\theta(x_0),$$

qui sont racines d'une équation de la forme $f(x, Z_1) = 0$, Z_1 étant une racine de $\Phi(Z) = 0$, et d'autre part les μ quantités

$$\theta(x_0), \theta\psi_1(x_0), \theta\psi_2(x_0) \dots, \theta\psi_{\mu-1}(x_0)$$

sont racines d'équations à coefficients fonctions rationnelles de Z_0 , puisque Z_1 est une fonction rationnelle de Z_0 . Or, dans ces deux suites, il y a une quantité commune $\theta(x_0)$; elles sont donc les mêmes à l'ordre près; de sorte que les deux groupes de fonctions

$$\begin{aligned} x, \psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_{\mu-1}(x), \\ x, \theta\psi_1\theta^{-1}(x), \theta\psi_2\theta^{-1}(x), \dots, \theta\psi_{\mu-1}\theta^{-1}(x), \end{aligned}$$

ne diffèrent que par l'ordre. Nous exprimerons cette propriété en disant que le premier groupe de fonctions est échangeable à la fonction θ , relativement à l'équation $F(x) = 0$. Ainsi :

Lorsqu'on adjoint à une équation holodrome $F(x) = 0$ une racine d'une équation $\Phi(Z) = 0$, également holodrome, les groupes de fonctions correspondant aux divers facteurs irréductibles sont les mêmes; et ce groupe est permutable à toutes les fonctions θ , telles que $F[\theta(x)] = 0$ en même temps que $F(x) = 0$.

Réciproquement, soient $x, \psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_{\mu-1}(x)$, μ fonctions de la suite (1) formant un groupe relativement à l'équation $F(x) = 0$, échangeable à toutes les fonctions de cette suite (1),

a étant une indéterminée rationnelle, la fonction

$$(a - x)[a - \psi_1(x)][a - \psi_2(x)] \dots [a - \psi_{\mu-1}(x)]$$

acquiert $\frac{m}{\mu}$ valeurs distinctes lorsqu'on substitue à x les diverses racines de l'équation $F(x) = 0$; l'équation qui admet ces $\frac{m}{\mu}$ valeurs pour racines est holodrome. En effet, soient

$$\begin{aligned} (a - x_0)[a - \psi_1(x_0)] \dots [a - \psi_{\mu-1}(x_0)] &= z_0, \\ [a - \theta(x_0)][a - \psi_1\theta(x_0)] \dots [a - \psi_{\mu-1}\theta(x_0)] &= z_1 \end{aligned}$$

deux des valeurs considérées, θ étant une des fonctions (1) autre que ψ . On a, puisque le groupe des fonctions ψ est permutable à toutes les fonctions de la suite (1),

$$z_1 = [a - \theta(x_0)][a - \theta\psi_1(x_0)] \dots [a - \theta\psi_{\mu-1}(x_0)];$$

or toute fonction symétrique des μ quantités $x_0, \psi_1(x_0), \dots, \psi_{\mu-1}(x_0)$ est exprimable rationnellement en fonction de z_0 ; donc z_1 , qui est aussi une fonction symétrique de ces μ quantités, d'après sa seconde forme, s'exprime rationnellement en fonction de z_0 . On voit de plus que, lorsque l'équation $\Phi(Z) = 0$ est holodrome, l'équation $\varphi(z) = 0$, qui produit le même effet que $\Phi(Z) = 0$ et qu'on formera comme il a été dit au n° 9, est aussi holodrome.

12. L'équation $\Phi(Z) = 0$ n'étant pas holodrome, il peut se faire que l'équation $\varphi(z) = 0$, qui produit le même effet, soit holodrome, et alors on retombe dans le cas précédent. Considérons le cas où l'équation $\varphi(z) = 0$ n'est pas holodrome : z_0 et z_1 étant deux racines de $\varphi(z) = 0$, l'adjonction de l'une ou de l'autre permet de décomposer $F(x)$ en facteurs d'égal degré μ ; soient $f(x, z_0)$ et $f_1(x, z_1)$, deux facteurs s'annulant pour une même valeur de x , x_0 . Les racines de $f(x, z_0) = 0$ étant

$$x_0, \psi_1(x_0), \psi_2(x_0), \dots, \psi_{\mu-1}(x_0),$$

celles de $f_1(x, z_1) = 0$ pourront être représentées par

$$x_0, \theta_1\psi_1\theta_1^{-1}(x_0), \dots, \theta_1\psi_{\mu-1}\theta_1^{-1}(x_0);$$

ces deux suites sont forcément distinctes, et il en est de même des groupes de fonctions qu'on obtient en remplaçant x_0 par une

variable x , en supposant que z_0 et z_i ne puissent s'exprimer rationnellement en fonction l'une de l'autre.

Soit $f_i(x, z_i)$ le facteur de $F(x)$ qui s'annule pour x_0 lorsqu'on adjoint z_i et

$$x_0, \quad \theta_i \psi_i \theta_i^{-1}(x_0), \quad \dots, \quad \theta_i \psi_{\mu-1} \theta_i^{-1}(x_0)$$

les μ racines de l'équation $f_i(x, z_i) = 0$. Remplaçant x_0 par une variable x , on a un groupe de fonctions correspondant à z_i ; et par suite n groupes pour les n racines de $\varphi(z) = 0$. Le groupe correspondant à l'adjonction d'une racine de l'équation résolvante de $\varphi(z) = 0$ se compose des fonctions communes à tous ces groupes, lesquelles forment évidemment un groupe permutable à toutes les fonctions θ du n° 8. En effet, le plus grand commun diviseur des premiers membres des équations

$$f_0(x, z_0) = 0, \quad f_1(x, z_1) = 0, \quad \dots, \quad f_{n-1}(x, z_{n-1}) = 0,$$

est rationnel après l'adjonction d'une racine de l'équation résolvante de $\varphi(z) = 0$; soit $\chi(x)$ ce plus grand commun diviseur; z_i est une fonction rationnelle de x_0 , invariable lorsqu'on remplace x_0 par les autres racines de $f(x, z_i) = 0$; il en résulte que la fonction résolvante de l'équation $\varphi(z) = 0$ est une fonction rationnelle de x_0 , invariable lorsqu'on remplace x_0 par les diverses racines de $\chi(x) = 0$; $\chi(x)$ est donc irréductible (6).

13. Nous dirons que deux équations sont *équivalentes* lorsque les racines de l'une pourront s'exprimer rationnellement en fonction des racines de l'autre, qu'une équation holodrome est *simple* lorsqu'elle ne pourra se réduire qu'à l'aide d'une équation holodrome équivalente (CAMILLE JORDAN, *Théorie des substitutions et des équations algébriques*).

Il est clair que deux équations holodromes équivalentes sont de même degré. Étant données deux équations simples non équivalentes, l'adjonction des racines de l'une aux quantités connues laisse l'autre simple. Étant données trois équations simples non équivalentes deux à deux, il peut se faire que l'adjonction des racines de deux de ces équations réduise la troisième, mais les trois équations sont alors de même degré. En effet, adjoignons seulement les racines de l'une des équations, les deux autres restent simples; maintenant ces deux équations sont équivalentes, puisque

l'adjonction de l'une réduit l'autre; donc elles sont de même degré. Ainsi les trois équations sont de même degré deux à deux. Ce que nous venons de dire de trois équations simples peut se dire d'un nombre quelconque autre que deux d'équations simples.

14. Soit $F(x) = 0$ une équation holodrome de degré m et $\varphi(z) = 0$ une équation simple de degré ν , permettant de la réduire. Après l'adjonction d'une racine de $\varphi(z) = 0$, $F(x)$ se décomposera en ν équations holodromes et équivalentes de degré $\frac{m}{\nu}$. Il peut se faire que $F(x) = 0$ se réduise à l'aide d'autres équations simples, non équivalentes à $\varphi(z) = 0$; et que parmi elles il s'en trouve de degré ν ; soit $\varphi_1(z) = 0$ l'une d'elles, et ainsi de suite. On arrivera à un certain nombre d'équations simples

$$(\alpha) \quad \varphi(z) = 0, \quad \varphi_1(z) = 0, \quad \varphi_{\alpha-1}(z) = 0,$$

toutes de degré ν , permettant chacune de réduire $F(x) = 0$ et telles que l'une quelconque d'entre elles reste simple lorsqu'on adjoint aux quantités connues les racines de toutes les précédentes et que toute autre équation simple de degré ν permettant de réduire $F(x) = 0$ se réduise après l'adjonction des racines de ces α équations.

Au lieu de partir de $\varphi(z) = 0$, on pourrait partir de toute autre équation simple de degré ν , permettant de réduire $F(x) = 0$, et alors, en opérant comme plus haut, on arriverait à une autre suite

$$(\beta) \quad \varphi'(z) = 0, \quad \varphi'_1(z) = 0, \quad \varphi'_2(z) = 0, \quad \varphi'_{\beta-1}(z) = 0,$$

jouissant des mêmes propriétés que la précédente. Les équations résolvantes des deux équations

$$(1) \quad \varphi(z) \varphi_1(z) \varphi_2(z) \dots \varphi_{\alpha-1}(z) = 0,$$

$$(2) \quad \varphi'(z) \varphi'_1(z) \dots \varphi'_{\beta-1}(z) = 0$$

sont équivalentes. En effet, les racines de $\varphi'(z) = 0$ peuvent s'exprimer rationnellement en fonction des racines de l'équation (1); de même, celles de $\varphi'_1(z) = 0$, $\varphi'_2(z) = 0$, ..., $\varphi'_{\beta-1}(z) = 0$; réciproquement, les racines des équations $\varphi_1(z) = 0$, $\varphi_2(z) = 0$, ..., $\varphi_{\alpha-1}(z) = 0$ s'expriment rationnellement en fonction des racines de l'équation (2). La résolvante de l'équation (1) est de degré ν^α . En effet, si l'on adjoint une racine de l'équation $\varphi_1(z) = 0$, ce

degré est divisé par ν , et il en est de même chaque fois que l'on adjoint une racine des équations (α) . La résolvante de l'équation (2) est, pour la même raison, de degré $\nu\beta$. Ces deux résolvantes sont de même degré, puisqu'elles sont équivalentes; donc $\beta = \alpha$.

Il est clair que ce que nous venons de dire des équations simples à coefficients rationnels, réduisant $F(x) = 0$, de degré ν , peut se répéter, pour l'ensemble des équations, d'un autre degré quelconque.

15. Soit $\psi(z) = 0$ l'équation holodrome équivalente à l'ensemble des équations simples à coefficients rationnels, permettant de réduire $F(x) = 0$, telles qu'aucune d'elles ne puisse se réduire par l'adjonction des racines des autres, et que, de plus, toute autre équation simple, réduisant $F(x) = 0$, se réduise par l'adjonction d'une racine de $\varphi(z) = 0$. Le degré de $\psi(z)$ est égal au produit des degrés de ces équations simples. Nous appellerons ces équations, simples et à coefficients rationnels avant l'adjonction de toute irrationnelle, *équations simples du premier ordre*; et toute fonction rationnelle des racines de ces équations, *fonction algébrique du premier ordre*. De même nous appellerons *équations simples du second ordre et fonctions algébriques du second ordre* les équations simples dont les coefficients sont des fonctions algébriques du premier ordre, et les fonctions rationnelles des racines de ces équations; et, en général, *équations simples du $\mu^{\text{ième}}$ ordre et fonctions algébriques du $\mu^{\text{ième}}$ ordre* les équations simples dont les coefficients sont des fonctions algébriques du $(\mu - 1)^{\text{ième}}$ ordre, ou du moins ne sont holodromes qu'après l'adjonction de fonctions algébriques du $(\mu - 1)^{\text{ième}}$ ordre, et les fonctions rationnelles des racines de ces équations (voir *Algèbre supérieure* de M. Serret, t. II, n° 513).

m étant le degré de $F(x) = 0$, n celui de $\psi(z) = 0$, z_0 une racine de $\psi(z) = 0$, après l'adjonction de z_0 , $F(x) = 0$ se décompose en n équations holodromes équivalentes de degré $\frac{m}{n}$; soit $f(x, z_0) = 0$ l'une d'elles; le groupe de fonctions de $f(x, z_0) = 0$ est permutable au groupe de fonctions de $F(x) = 0$. Soit

$$\pi(\zeta, z_0) = 0$$

une équation holodrome et simple après l'adjonction de z_0 , de

degré ν_1 , et permettant de réduire $f(x, z_0) = 0$. Après l'adjonction d'une racine de l'équation $\pi(\zeta, z_0) = 0$, $f(x, z_0) = 0$ se décompose en ν_1 équations holodromes de degré $\frac{m}{n\nu_1}$ équivalentes, et le groupe de fonctions, qui est le même pour toutes ces équations, sera permutable à toutes les fonctions du groupe de

$$f(x, z_0) = 0,$$

mais en général il ne le sera pas à toutes les fonctions de groupe de $F(x) = 0$; z_1 étant une autre racine de $\psi(z) = 0$, $\pi(\zeta, z_1) = 0$ permettra de décomposer $f(x, z_1) = 0$ (§); mais $f(x, z_1) = 0$ est équivalente à $f(x, z_0) = 0$; donc $\pi(\zeta, z_1) = 0$ est une autre équation simple après l'adjonction de z_0 , permettant de décomposer $f(x, z_0)$, de sorte qu'il y aura un certain nombre de racines de

$$\psi(z) = 0 : z_0, z_1, z_2, \dots, z_{\alpha'-1},$$

qui, substituées à z_0 dans $\pi(\zeta, z_0)$, donneront des équations simples permettant de réduire $f(x, z_0) = 0$, telles que l'une quelconque d'entre elles reste simple après l'adjonction des racines de toutes les autres, et que l'équation simple obtenue en substituant à z_0 , dans $\pi(\zeta, z_0) = 0$, une autre racine de $\psi(z) = 0$ se réduise après l'adjonction de ces α' équations. Remarquons que α' peut être égal à 1; les coefficients de $\pi(\zeta, z_0)$ peuvent même être rationnels avant l'adjonction de z_0 , mais l'équation $\pi(\zeta) = 0$ n'est holodrome qu'après l'adjonction de z_0 .

Au lieu de partir de $\pi(\zeta, z_0) = 0$, on pourrait partir de toute autre équation simple obtenue en substituant à z_0 une autre racine de $\psi(z) = 0$; on arriverait à une autre suite $z'_0, z'_1, \dots, z'_{\beta'-1}$. Mais, en raisonnant comme au numéro précédent, on voit que $\beta' = \alpha'$, et que l'ensemble des nouvelles équations est équivalent à l'ensemble des premières.

16. La résolvante de l'équation

$$\pi(\zeta, z_0), \pi(\zeta, z_1), \dots, \pi(\zeta, z_{\alpha'-1}) = 0$$

est de degré $\nu_1^{\alpha'}$, et l'adjonction d'une racine de cette équation résolvante permet de décomposer $f(x, z_0) = 0$ en $\nu_1^{\alpha'}$ équations équivalentes de degré $\frac{m}{n\nu_1^{\alpha'}}$. Soit $\Pi(\zeta, z_0) = 0$ cette équation résol-

vante. Si l'on remplace, dans les coefficients de cette équation, z_0 par une autre racine de $\psi(z) = 0$, l'équation nouvelle obtenue est holodrome et équivalente à la première. En substituant ainsi à z_0 les diverses racines de $\psi(z) = 0$, on obtient un certain nombre d'équations distinctes, c'est-à-dire n'ayant pas les mêmes racines, nombre qui est un diviseur de n , et peut d'ailleurs se réduire à l'unité; cette équation, dans le dernier cas, a pour coefficients des quantités rationnelles avant l'adjonction de z_0 , mais n'est holodrome qu'après l'adjonction de z_0 . Le produit des premiers membres de ces équations, qui est indépendant de l'irrationnelle z_0 , donne, égalé à 0, une équation dont la résolvante, en ne considérant pas z_0 comme connue, mais seulement les irrationnelles primitives, est de degré $\nu_1^{\alpha'} n'$, n' étant un diviseur de n autre que 1. En effet, cette équation résolvante ne peut être décomposée qu'à l'aide des équations simples du premier ordre, qui décomposent $\psi(z) = 0$, et ses équations du second ordre sont $\pi(\zeta, z_0) = 0$, $\pi(\zeta, z_1) = 0, \dots, \pi(\zeta, z_{\alpha'-1}) = 0$; $n' > 1$, car autrement $\Pi(\zeta, z_0) = 0$ serait à coefficients rationnels, et holodrome avant l'adjonction de z_0 . Cette équation résolvante décompose $F(x) = 0$ en $\nu_1^{\alpha'} n'$ équations holodromes, équivalentes, qui ont même groupe de fonctions, et ce groupe est permutable à toutes les fonctions du groupe de $F(x) = 0$. Il en résulte qu'après l'adjonction d'une racine de $\Pi(\zeta, z_0) = 0$, $f(x, z_0) = 0$ se décompose en $\nu_1^{\alpha'}$ équations holodromes équivalentes, dont le groupe unique est permutable aux fonctions du groupe de $f(x, z_0) = 0$, mais encore à toutes les fonctions du groupe $F(x) = 0$. Ce que nous avons dit des équations simples du second ordre peut se répéter pour les équations des divers ordres.

Ainsi une équation holodrome $F(x) = 0$ se réduit à l'aide d'une suite d'équations simples; cette suite n'est pas entièrement déterminée, mais la suite des degrés de ces équations simples l'est, abstraction faite de l'ordre, et le produit de ces degrés est égal à celui de $F(x)$. Si l'on considère les groupes de fonctions des équations en lesquelles se décompose successivement $F(x) = 0$, chacun de ces groupes est contenu dans le précédent et échangeable à toutes ses fonctions (CAMILLE JORDAN, *Traité des substitutions*, p. 266 et suivantes).

III.

De la décomposition des équations.

17. Soit $f(x) = 0$ une équation irréductible non holodrome de degré m , et $F(V) = 0$ son équation résolvante. Cette équation résolvante se décompose en équations simples, comme il vient d'être dit. Parmi ces équations simples, quelques-unes réduiront $f(x) = 0$. Supposons que les premières, qui permettent de réduire $f(x) = 0$, appartiennent au $\mu^{\text{ième}}$ ordre, de sorte que l'ensemble des équations simples d'ordre inférieur laissent $f(x) = 0$ irréductible; soit $F_1(v) = 0$ l'équation holodrome équivalente à l'ensemble de ces équations simples, v_0 une de ses racines et $\pi(z, v_0) = 0$ une équation simple de degré v , permettant de réduire $f(x) = 0$. Après l'adjonction d'une racine z_0 de cette équation, $f(x)$ se décompose en facteurs d'égal degré. En effet, soit $\varphi(x, z_0)$ un facteur irréductible de $f(x)$; $\varphi(x, z_1)$, $\varphi(x, z_2)$, ..., $\varphi(x, z_{v-1})$ sont également irréductibles et diviseurs de $f(x)$ (§); leur produit est donc une puissance de $f(x)$. D'ailleurs, z_i étant une fonction rationnelle de z_0 , les équations

$$\varphi(x, z_0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x, z_i) = 0$$

n'ont pas de racine commune ou ont toutes leurs racines communes. Ainsi, après l'adjonction de z_0 , les facteurs en lesquels se décompose $f(x)$ sont compris dans la suite $\varphi(x, z_0)$, $\varphi(x, z_1)$, ..., $\varphi(x, z_{v-1})$. Le nombre de ces facteurs est un diviseur de m , degré de $f(x)$ et de v ; soit n ce nombre; le degré de $\varphi(x, z_0)$ est $\frac{m}{n}$. Les autres équations simples, obtenues en substituant à v_0 , dans les coefficients de l'équation $\pi(z, v_0) = 0$, une autre racine de $F_1(v) = 0$, décomposent $f(x) = 0$ d'une manière analogue. Soient $v_0, v_1, \dots, v_{\alpha-1}$ les racines de $F_1(v) = 0$, donnant, comme au n° 15, une suite d'équations simples

$$\pi(z, v_0) = 0, \quad \pi(z, v_1) = 0, \quad \pi(z, v_2) = 0, \quad \dots, \quad \pi(z, v_{\alpha-1}) = 0,$$

telles que l'une quelconque reste simple après l'adjonction des racines de toutes les autres, et que toutes les équations simples $\pi(z, v_i) = 0$, v_i étant une racine de $F_1(v) = 0$, se réduisent après l'adjonction des racines de ces α équations simples. Chacune de ces

équations simples divisera par n le degré de $f(x)$, et leur ensemble par n^α .

Deux cas peuvent se présenter; n^α est égal à m ou bien lui est inférieur. Dans le premier cas, l'équation $f(x) = 0$ est dite *primitive*; $F(V) = 0$ est alors équivalente à l'ensemble des équations

$$F_1(v) = 0, \quad \pi(z, v_0) \pi(z, v_1) \pi(z, v_2) \dots \pi(z, v_{\alpha-1}) = 0.$$

Si n^α n'est pas égal à m , soit $F_2(v') = 0$ l'équation holodrome à coefficients rationnels avant l'adjonction de toute irrationnelle, autre que celles qui entrent dans les coefficients de $f(x) = 0$, équivalente à $F_1(v) = 0$ et $\pi(z, v_0) \pi(z, v_1) \dots \pi(z, v_{\alpha-1}) = 0$. Après l'adjonction d'une racine v'_0 de $F_2(v') = 0$, $f(x) = 0$ se décompose en n^α équations d'égal degré, et l'on pourra former une équation à coefficients rationnels

$$y^{n^\alpha} + A_1 y^{n^\alpha-1} \dots = 0,$$

telle que

$$f(x) = [M(y_1)x^{m'} + \dots][M(y_2)x^{m'} + \dots][\dots] \dots,$$

$m' = \frac{m}{n^\alpha}$, et $y_1, y_2, \dots, y_{n^\alpha}$ étant les racines de l'équation en y .

Ainsi une équation qui n'est pas primitive peut se ramener à un certain nombre d'équations primitives, et le produit des degrés de ces équations est égal au degré de l'équation proposée.

18. Lorsque le degré d'une équation holodrome est un nombre premier p , cette équation est évidemment simple, et l'on peut représenter ses racines par

$$x, \theta(x), \theta^2(x), \dots, \theta^{p-1}(x),$$

x étant l'une d'elles et θ une fonction rationnelle. Abel a montré que, dans ce cas, on peut exprimer les racines de l'équation à l'aide de radicaux (SERRET, *Algèbre supérieure*, Sect. V, Chap. III). Réciproquement, lorsqu'une équation est soluble par radicaux, ses équations simples sont toutes de degré premier; en effet, l'équation $y^p - A = 0$ devient abélienne après l'adjonction des racines de l'équation $\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$, qui est abélienne.

D'après ce qui précède, lorsqu'une équation de degré premier est soluble par radicaux, elle est susceptible de devenir abélienne.

Cette condition est suffisante. Soit $f(x) = 0$ une équation de degré m , premier ou non, irréductible et non abélienne actuellement, et qui devienne abélienne après l'adjonction de certaines irrationnelles qui la laissent irréductible. Quel que soit le nombre des irrationnelles adjointes, on peut les exprimer toutes en fonctions rationnelles d'une racine d'une équation holodrome; soient $F(z) = 0$ cette équation holodrome et z_0 une de ses racines. x_0 étant une racine de $f(x) = 0$, les autres, par hypothèse, peuvent être représentées par

$$\psi(z_0, x_0), \quad \psi^2(z_0, x_0), \quad \dots, \quad \psi^{m-1}(z_0, x_0),$$

ψ étant une fonction rationnelle de x_0 et de z_0 , et $\psi^2(z_0, x_0)$ représentant $\psi[z_0, \psi(z_0, x_0)]$, et ainsi des autres. Soit $\chi_i(z_0)$, χ_i étant une fonction rationnelle, une autre racine de $F(z_0) = 0$; $\psi[\chi_i(z_0), x_0]$ est aussi racine de $f(x) = 0$; par conséquent, cette quantité est égale à l'un des termes de la suite précédente $\psi^i(z_0, x_0)$. On a

$$\psi[\chi_i(z_0), x_0] = \psi^i(z_0, x_0),$$

d'où

$$\psi[\chi_i^2(z_0), x_0] = \psi^i[\chi_i(z_0), x_0] = \psi^{i^2}(z_0, x_0)$$

et, d'une manière générale,

$$\psi[\chi_i^k(z_0), x_0] = \psi^{i^k}(z_0, x_0).$$

Soit e le nombre de termes distincts compris dans la suite

$$z_0, \quad \chi_i(z_0), \quad \chi_i^2(z_0), \quad \dots,$$

d'après ce qui précède

$$\psi^{i^e}(z_0, x_0) = \psi(z_0, x_0).$$

d'où $i^e \equiv 1 \pmod{m}$; ce qui exige que i soit un nombre premier avec m . Ainsi, lorsqu'on remplace, dans $\psi(z_0, x_0)$, z_0 par les diverses racines de $F(z) = 0$, on obtient un nombre ν de valeurs distinctes au plus égal à $\varphi(m)$, nombre des entiers inférieurs à m et premiers avec m . Il en sera de même lorsqu'on remplacera x_0 par une indéterminée rationnelle α ; les ν valeurs qu'on obtient alors sont racines d'une équation irréductible, et les coefficients des diverses puissances de x_0 , dans $\psi(z_0, x_0)$, peuvent s'exprimer

rationnellement en fonction de $\psi(z_0, a)$. D'ailleurs, comme on a

$$\psi[\chi_i(z_0), x_0] = \psi^i(z_0, x_0),$$

on voit que $\psi[\chi_i(z_0), a]$ pourra s'exprimer rationnellement en fonction de $\psi(z_0, a)$.

Ainsi l'équation qui a pour racines ces ν valeurs distinctes est holodrome, et l'on peut prendre, pour $F(z) = 0$, une équation de degré ν .

Soient $\chi_j(z_0)$ une racine autre que $\chi_i(z_0)$ de l'équation

$$F(z) = 0 \quad \text{et} \quad \psi[\chi_j(z_0), x_0] = \psi^j(z_0, x_0);$$

il viendra

$$\psi[\chi_j \chi_i(z_0), x_0] = \psi^j[\chi_i(z_0), x_0] = \psi^{ji}(z_0, x_0);$$

de même

$$\psi[\chi_i \chi_j(z_0), x_0] = \psi^i[\chi_j(z_0), x_0] = \psi^{ij}(z_0, x_0);$$

d'où

$$\chi_i \chi_j(z_0) = \chi_j \chi_i(z_0).$$

Les fonctions χ_i, χ_j sont donc échangeables entre elles, et l'équation $F(z) = 0$ est résoluble algébriquement d'après un théorème d'Abel. De plus les ν nombres, tels que i, j , forment un groupe relativement au module m , c'est-à-dire que le produit de deux quelconques d'entre eux est congru à l'un des termes de cette suite, suivant le module m , et ν est par suite un diviseur de $\varphi(m)$. Le degré de l'équation résolvante de $f(x) = 0$ est égal à $m\nu$. Lorsque m est premier, $\varphi(m)$ est égal à $m - 1$, et l'équation $F(z) = 0$ est abélienne, puisque les nombres i, j sont les diverses puissances de l'un d'entre eux convenablement choisi; on en déduit que, deux racines d'une telle équation étant données, les autres s'en déduisent rationnellement. Ces théorèmes ont été établis, pour la première fois, par Gallois, dans son célèbre Mémoire, paru en 1846 dans le tome XI du *Journal de Liouville*.

19. Nous sommes ainsi arrivés aux théorèmes généraux de la théorie algébrique des équations, indépendamment de la théorie des substitutions. Comme l'a démontré Galois, cette dernière est corrélatrice de la théorie des équations; mais la méthode que nous avons suivie peut, dans certains cas, être plus simple ou pré-

senter, sous un jour nouveau, les propositions de la théorie des substitutions.

Reprenons les notations du n° 7. Soit $f(x) = 0$ une équation de degré m , n'ayant pas de racines égales; désignons par V_0 une fonction résolvante de cette équation, et par $F(V) = 0$ son équation résolvante de degré N . Les racines de l'équation $f(x) = 0$ sont des fonctions rationnelles de V_0 ; soient

$$x_0 = \psi_0(V_0), \quad x_1 = \psi_1(V_0), \quad x_2 = \psi_2(V_0), \quad \dots, \quad x_{n-1} = \psi_{n-1}(V_0).$$

$V_0, V_1, V_2, \dots, V_{N-1}$ étant les diverses racines de $F(V) = 0$,

$$\psi_0(V_i), \psi_1(V_i), \dots, \psi_{n-1}(V_i)$$

représentent, dans un certain ordre, les m racines de l'équation $f(x) = 0$; en donnant à i successivement les valeurs $0, 1, 2, \dots, N-1$, on obtient donc N permutations entre les racines; les substitutions, pour passer de l'une d'elles à toutes les autres, forment un groupe de substitutions conjuguées.

Soit maintenant $z_0 = \Pi(x_0, x_1, \dots, x_{m-1})$ une fonction rationnelle des m racines de l'équation $f(x) = 0$; remplaçant les x par leurs valeurs en fonction de V_0 , on aura

$$z_0 = \Pi_1(V_0).$$

La substitution à V , dans $\Pi_1(V)$, des diverses racines de $F(V) = 0$, revient à effectuer, dans la fonction

$$\Pi(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}),$$

les diverses substitutions de ce groupe. Ainsi, en appelant ce groupe le *groupe conjugué propre à l'équation $f(x) = 0$* , comme c'est l'usage, on a le théorème suivant :

Si, dans une fonction $\Pi(x_0, x_1, \dots, x_{m-1})$ des racines d'une équation $f(x) = 0$, n'ayant pas de racines égales, on effectue les diverses substitutions du groupe conjugué propre à l'équation, les valeurs distinctes qu'acquiert la fonction sont racines d'une équation irréductible; l'adjonction d'une de ces valeurs aux quantités connues réduit le groupe de substitutions propres à l'équation à celles du groupe primitif, qui laissent invariable la fonction

$$\Pi(x_0, x_1, \dots, x_{m-1}).$$

Lorsque l'équation $f(x) = 0$ est primitive, elle n'est réduite que par les équations simples de $F(V) = 0$ d'ordre le plus élevé. Soient $F_1(v) = 0$ l'équation holodrome équivalente à l'ensemble des équations simples d'ordre inférieur, v_0 une de ses racines; après l'adjonction de v_0 , $F(V) = 0$ se décompose en équations équivalentes; soit $F_2(V, v_0) = 0$ l'une d'elles, et

$$\pi(z, v_0) = 0$$

une équation simple réduisant l'équation précédente; les autres équations simples de $F_2(V, v_0) = 0$ s'obtiendront en substituant à v_0 dans les coefficients de $\pi(z, v_0) = 0$ les autres racines de $F_1(v) = 0$; et toutes ces équations simples réduiront $f(x) = 0$; de plus, le groupe de fonctions de $F_2(V, v_0) = 0$ est permutable aux fonctions du groupe de $F(V) = 0$. Le degré de $F_2(V, v_0) = 0$ est égal au produit des degrés des équations

$$\pi(z, v_0) = 0, \quad \pi(z, v_1) = 0, \quad \pi(z, v_{\alpha-1}) = 0,$$

telles que l'une quelconque reste simple après l'adjonction des racines de toutes les autres, et que toutes les équations simples $\pi(z, v_i) = 0$, v_i étant une racine de $F_1(v) = 0$, se réduisent après l'adjonction des racines de ces α équations simples.

Dans le cas où $f(x) = 0$ est l'équation générale de degré m , son groupe est formé de toutes les substitutions possibles entre ses m racines, N est égal à 1, 2, 3, ..., m . Or, si m est supérieur à 4, tout groupe auquel toute substitution est permutable contient le groupe alterné (C. JORDAN, *Traité des substitutions*, p. 63). Donc si $m > 4$, le degré de $F_1(v)$ est égal à 2, et l'on peut prendre

$$F_1(v) = v^2 - \Delta,$$

Δ étant le dernier terme de l'équation aux carrés des différences des racines; $F_2(V, v_0) = 0$ est de degré $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}{2}$; ses équations simples distinctes ne peuvent être qu'au nombre de deux,

$$\pi(z, v_0) = 0 \quad \text{et} \quad \pi(z, -v_0) = 0;$$

mais $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}{2}$ n'étant pas un carré parfait, ces deux équations sont équivalentes et l'équation $F_2(V, v_0) = 0$ est simple (C. JORDAN, *loc. cit.*, p. 66).

IV.

De la division du cercle en parties égales.

20. Les racines primitives de l'équation $x^m - 1 = 0$, c'est-à-dire celles dont les diverses puissances reproduisent toutes les autres, sont au nombre de $\varphi(m)$, nombre des entiers inférieurs à m et premiers avec m ; Gauss a montré que l'équation de degré $\varphi(m)$ qui admet pour racines ces racines primitives est irréductible, lorsque m est une puissance d'un nombre premier; Kronecker a démontré la même proposition pour le cas de m quelconque. Soit $f(x) = 0$ cette équation; q étant un diviseur de $\varphi(m)$, on peut former une équation de degré q permettant de décomposer $f(x)$ en q facteurs d'égal degré $\frac{\varphi(m)}{q}$. Lorsque m est une puissance d'un nombre premier autre que 2, la congruence $x^{\varphi(m)} - 1 \equiv 0 \pmod{m}$ admet des racines primitives, l'équation $f(x) = 0$ est abélienne, et il n'y a qu'une équation de degré q permettant de la décomposer en q facteurs d'égal degré. Gauss a donné cette équation dans le cas où m est un nombre premier pour q égal à 2, 3 et 4. Nous allons établir les résultats de Gauss, en suivant une marche différente qui simplifie les calculs.

Soient g une racine primitive du module premier p , q un diviseur de $p - 1$, et $\omega = \frac{p-1}{q}$; considérons la congruence

$$(1) \quad g^{\alpha+xq} + g^{\beta+yq} + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Nous désignerons par $n_{\alpha,\beta}$ le nombre de systèmes distincts suivant le module p de g^{xq} et g^{yq} satisfaisant à cette congruence. On a $g^{x'q} \equiv g^{xq} \pmod{p}$, si $x' - x$ est divisible par ω , et $n_{\alpha,\beta} = n_{\alpha',\beta'}$, si les nombres α' , β' sont respectivement congrus à α , β suivant le module q ; ainsi nous supposons les nombres x et y réduits suivant le module ω , et les nombres α et β suivant le module q . Enfin on voit immédiatement que $n_{\alpha,\beta} = n_{\beta,\alpha}$.

La congruence (1) peut s'écrire des deux autres manières

$$g^{\alpha-\beta+xq} + g^{-\beta+yq} + 1 \equiv 0, \quad g^{\beta-\alpha+xq} + g^{-\alpha+yq} + 1 \equiv 0 \pmod{p};$$

d'où les relations

$$n_{x,\beta} = n_{\beta,x} = n_{x-\beta,-\beta} = n_{\beta-\alpha,-\alpha}.$$

Donnons à x et y les ω^2 systèmes de valeurs dont ces nombres sont susceptibles dans la somme $g^{\alpha+xq} + g^{\beta+yq}$; cette somme prendra $\omega n_{\alpha-\delta,\beta-\delta}$ valeurs de la forme $-g^{\delta+xq} \pmod{p}$ et s'annulera ω fois $\pmod{p}$ si la congruence

$$\alpha - \beta + xq \equiv \frac{\omega q}{2} \pmod{\omega}$$

a une solution; dans le cas où cette dernière congruence n'a pas de solution, la somme $g^{\alpha+xq} + g^{\beta+yq}$ ne peut s'annuler $\pmod{p}$. Donc, si ω est pair, on a

$$1 + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=q-1} n_{x,\alpha} = \omega, \quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=q-1} n_{\alpha,\alpha+\beta} = \omega,$$

β désignant un nombre non divisible par q ; et, si ω est un nombre impair,

$$1 + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=q-1} n_{\alpha,\alpha+\frac{q}{2}} = \omega, \quad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=q-1} n_{\alpha,\alpha+\beta} = \omega,$$

β désignant un nombre non congru à $\frac{q}{2} \pmod{q}$.

Des relations qui viennent d'être établies, on peut déduire les nombres $n_{\alpha,\beta}$ pour q égal à 2. En effet, on a alors, que ω soit pair ou impair, $n_{01} = n_{11}$ et, si ω est pair,

$$1 + n_{00} + n_{11} = \frac{p-1}{2}, \quad 2n_{11} = \frac{p-1}{2};$$

d'où

$$n_{00} = \frac{p-5}{4}, \quad n_{11} = n_{01} = \frac{p-1}{4}.$$

Si ω est impair,

$$n_{00} + n_{11} = \frac{p-1}{2}, \quad 1 + 2n_{11} = \frac{p-1}{2};$$

d'où

$$n_{00} = \frac{p+1}{4}, \quad n_{11} = n_{01} = \frac{p-3}{4}$$

Pour q égal à 4, on obtient entre les nombres $n_{\alpha,\alpha}$ une relation

qui nous sera utile. On a, si $\frac{p-1}{4}$ est pair,

$$1 + n_{00} + n_{11} + n_{22} + n_{33} = \frac{p-1}{4},$$

$$n_{33} + 2n_{12} + n_{11} = \frac{p-1}{4},$$

$$2n_{22} + 2n_{12} = \frac{p-1}{4};$$

les deux dernières donnent $2n_{22} = n_{11} + n_{33}$.

Si $\frac{p-1}{4}$ est impair,

$$n_{00} + n_{11} + n_{22} + n_{33} = \frac{p-1}{4},$$

$$n_{33} + 2n_{12} + n_{11} = \frac{p-1}{4},$$

$$1 + 2n_{22} + 2n_{12} = \frac{p-1}{4};$$

et, comme dans le cas précédent, on déduit

$$1 + 2n_{22} = n_{11} + n_{33}.$$

Le nombre des systèmes de solutions de la congruence quadrimôme $g^{\alpha+xq} + g^{\beta+yq} + g^{\gamma+zq} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ peut s'exprimer à l'aide des nombres $n_{\alpha,\beta}$ et, dans certains cas, de plusieurs manières; ce qui conduit à des équations du second degré entre les nombres positifs $n_{\alpha,\beta}$. C'est de ces relations que Gauss a déduit ces nombres $n_{\alpha,\beta}$, dans les cas de $q = 3$ et de $q = 4$; mais nous trouverons des relations analogues dans l'étude de l'équation $x^p - 1 = 0$.

21. Soit θ une racine autre que 1 de l'équation $x^p - 1 = 0$; la somme

$$\sum_{i_1=0}^{i_1=\omega-1} \theta \theta^{i_1 q},$$

où ω désigne le rapport $\frac{p-1}{q}$, acquiert q valeurs distinctes lorsqu'on substitue à θ les diverses racines de $\frac{x^p-1}{x-1} = 0$; on les obtient en donnant à i les valeurs 0, 1, 2, ..., $q-1$ dans l'expres-

L'équation de degré q , qui a pour racines les quantités s_i , est abélienne, et elle permet de décomposer $\frac{x^p-1}{x-1}$ en q facteurs de degré ω . Les quantités s_i ont été désignées sous le nom de *périodes des racines d'ordre p de l'unité*. Nous désignerons par s_k la somme

$$\sum_{i=0}^{i=q-1} s_i^k;$$

on a

$$s_1 = -1.$$

La $k^{\text{ième}}$ puissance de s_i est égale à

$$\Sigma \theta g^{i(q+g^{i,q}+\dots+g^{i,1q})},$$

le signe Σ s'étendant aux ω^k termes qu'on obtient en donnant à chacun des nombres $i_1, i_2, \dots, i_k$ les ω valeurs $0, 1, 2, \dots, \omega-1$. D'après cela, soient ωN_k le nombre de fois que la somme

$$\sigma = g^{i,q} + g^{i,q} + \dots + g^{i,1q}$$

s'annule suivant le module p ; ωN_{kj} le nombre des valeurs de σ satisfaisant à la congruence $x^\omega - g^{j\omega} \equiv 0 \pmod{p}$, c'est-à-dire pouvant se mettre sous la forme $g^{j+1q} \pmod{p}$; on a

$$s_i^k = \omega N_k + N_{k0} s_i + N_{k1} s_{i+1} + \dots + N_{k,q-1} s_{i+q-1},$$

d'où

$$s_k = q \omega N_{k1} + s(N_{k0} + N_{k1} + \dots + N_{k,q-1}).$$

Mais on a évidemment

$$N_k + N_{k0} + N_{k1} + \dots + N_{k,q-1} = \omega^{k-1};$$

donc

$$s_k = (\omega q + 1) N_k - \omega^{k-1} = p N_k - \omega^{k-1},$$

en se rappelant que $s_1 = -1$.

Soit

$$x^q + P_1 x^{q-1} + P_2 x^{q-2} + \dots + P_q = 0$$

l'équation aux q périodes. Les formules de Newton donnent

$$s_k + P_1 s_{k-1} + P_2 s_{k-2} + \dots + k P_k = 0,$$

si k est égal ou plus petit que q ; et

$$s_k + P_1 s_{k-1} + P_2 s_{k-2} + \dots + P_q s_{k-q} = 0,$$

si k est plus grand que q . Les premières déterminent les coefficients $P_1, P_2, \dots, P_q$ en fonction de $s_1, s_2, \dots, s_q$; les dernières donnent des relations entre les nombres entiers s_k , qu'on peut exprimer en fonction des nombres $n_{\alpha, \beta}$ du numéro précédent.

22. Nous considérerons d'abord le cas de ω pair.

Alors on a

$$N_2 = 1, \quad N_{2, \alpha} = n_{-\alpha, -\alpha};$$

pour abréger, nous poserons $N_{2\alpha} = n_\alpha$; N_3 est égal à $N_{20} = n_0$, et enfin on voit facilement que

$$N_k = N_{30} = \omega + \sum_{i=0}^{i=q-1} n_i^2.$$

On a, par suite

$$P_1 = 1, \quad P_2 = -\frac{(q-1)\omega}{2}, \quad P_3 = \frac{-p(n_0+1) + \omega^2}{3} - \frac{p-3\omega-1}{6};$$

ce qui donne

$$x^3 + x + \frac{1-p}{4} = 0$$

pour l'équation aux deux périodes; et

$$x^3 + x^2 \frac{p-1}{3} x - \frac{p(n_0+1) - \omega^2}{3} = 0$$

pour l'équation aux trois périodes.

Le nombre n_0 est inconnu dans la dernière équation; mais on a la relation

$$s_3 + P_1 s_2 + P_2 s_1 - P_3 = 0;$$

substituant aux lettres S et P leurs valeurs en fonction des nombres n_0, n_1, n_2 , il vient

$$3(n_0^2 + n_1^2 + n_2^2) + 4n_0 - \omega^2 + 1 = 0;$$

et l'on a déjà

$$1 + n_0 + n_1 + n_2 = \omega = \frac{p-1}{3}.$$

Ces deux équations suffisent pour déterminer les trois nombres n , qui doivent être positifs. Posons

$$n_1 - n_2 = v,$$

d'où

$$n_1^2 + n_2^2 = \frac{(\omega - 1 - n_0)^2 + v^2}{2};$$

la première devient

$$9n_0^2 - 2(3\omega - 7)n_0 + 3v^2 + \omega^2 - 6\omega + 5 = 0,$$

équation qui, multipliée par q , se met sous la forme

$$27v^2 + (9n_0 - 3\omega + 7)^2 = 4p.$$

Posons

$$9n_0 - 3\omega + 7 = L;$$

les deux conditions

$$L \equiv 1 \pmod{3}, \quad 27v^2 + L^2 = 4p$$

déterminent L et, par suite, n_0 ; n_1, n_2 peuvent se permuter entre eux, en changeant la racine primitive prise pour g . L'équation aux trois périodes devient, en faisant $3x + 1 = y$,

$$y^2 - 3py - pL = 0.$$

23. Nous supposons toujours ω pair. Les q périodes s_i sont réelles; en effet on a

$$s_i = \sum_{i_1=0}^{i_1=\omega-1} \theta g^{i+i_1q} = \sum_{i_1=0}^{i_1=\frac{\omega}{2}-1} [\theta g^{i+i_1q} + \theta - g^{i+i_1q}],$$

en remarquant que $g^{\frac{\omega q}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$; et la quantité entre crochets, somme de quantités imaginaires conjuguées, est réelle. Par suite

$$s_i^2 > s_i > \frac{s_i^2}{q},$$

ou, en remplaçant s_2 par $p - \omega$ et s_4 par $pN_4 - \omega^2$,

$$\frac{\omega^2 + (p - \omega)^2}{p} > N_4 > \frac{\omega^2}{q} + \frac{(p - \omega)^2}{qp}.$$

Mais N_4 est égal à

$$\omega + \sum_{i=0}^{i=q-1} n_i^2;$$

donc

$$\frac{(p - \omega)^2(q - 1)}{pq} + \frac{(\omega - 1)^2}{q} > \sum_{i=0}^{i=q-1} n_i^2 > \frac{(\omega - 1)^2}{q},$$

et l'on a

$$\sum n_i = \omega - 1.$$

Désignons par v le plus petit des nombres n_i ; alors la somme des carrés des $q - 1$ autres est égale ou supérieure à $\frac{(\omega - 1 - v)^2}{q - 1}$; donc

$$\frac{(p - \omega)^2(q - 1)}{pq} + \frac{(\omega - 1)^2}{q} \geq \frac{(\omega - 1 - v)^2}{q - 1} + v^2,$$

inégalité qui peut s'écrire

$$\frac{(p - \omega)^2(q - 1)}{pq} \geq \left(\frac{\omega - 1}{q} - v \right)^2,$$

et, comme v est inférieur à $\frac{\omega - 1}{q}$,

$$v \geq \frac{\omega - 1}{q} - \frac{(p - \omega)(q - 1)}{\sqrt{pq}}.$$

Les nombres n_i sont inférieurs à $\omega - 1 - (q - 1)v$, ou, en remplaçant v par sa valeur,

$$\frac{\omega - 1}{q} + \frac{(p - \omega)(q - 1)^2}{\sqrt{pq}} \geq n_i \geq \frac{\omega - 1}{q} - \frac{(p - \omega)(q - 1)}{\sqrt{pq}}.$$

Le nombre n_i représente le nombre des systèmes de solutions de la congruence

$$g^{-i}(x^q + y^q) + 1 \equiv 0 \pmod{p = q\omega + 1},$$

pour lesquels aucun des deux nombres x, y n'est divisible par p .

Lorsqu'on remplace ω par les nombres pairs successifs dans l'expression $\omega q + 1$, on obtient une infinité de nombres premiers: d'après les inégalités que nous venons d'établir pour tous ces nombres premiers correspondant aux valeurs de ω supérieures à une certaine limite, la congruence

$$x^q + y^q \equiv z^q \pmod{p = q\omega + 1}$$

admet des systèmes de solutions pour lesquels aucun des nombres x, y, z n'est divisible par p . Si le contraire avait lieu, l'impossibilité de résoudre en nombres entiers l'équation $x^q + y^q = z^q$, impossibilité annoncée par Fermat, serait démontrée, puisque l'un des nombres x, y ou z devrait être divisible par une infinité de nombres premiers. Pour q égal à 3 ou 4, la proposition que nous venons d'établir résulte immédiatement de l'équation aux trois et aux quatre périodes, comme l'a remarqué Libri [*Mémoire sur la théorie des nombres* (*Journal de Crelle*, t. 9), rappelé par le P. Pepin (*Comptes rendus*, 1880, 2^e semestre)].

24. Lorsque ω est impair, q est forcément pair. On a

$$N_2 = 0, \quad N_{2\alpha} = n_{q-\alpha, \frac{q}{2}-\alpha};$$

nous poserons, pour abréger l'écriture,

$$N_{2\alpha} = n_\alpha, \quad N_3 = n_{\frac{q}{2}}, \quad N_i = N_{3, \frac{q}{2}} = 2 \sum_{i=0}^{\frac{q}{2}-1} n_i n_{\frac{q}{2}+i}.$$

Par suite

$$s_1 = -1, \quad s_2 = -\omega, \quad s_3 = pn_{\frac{q}{2}} - \omega^2;$$

d'où

$$P_1 = 1, \quad P_2 = \frac{\omega + 1}{2}, \quad P_3 = -\frac{2pn_{\frac{q}{2}} - (\omega + 1)(2\omega + 1)}{6}.$$

Ainsi, pour q égal à 2, on a, pour l'équation aux deux périodes, si $\frac{p-1}{2}$ est impair,

$$x^2 + x + \frac{1+p}{4} = 0.$$

La méthode que nous venons d'exposer ne suppose pas le nombre q premier; les formules s'appliquent donc au cas où q est un nombre composé; mais alors il y a en outre des relations qui simplifient les calculs.

25. Soit $q = 4$. On a

$$s_l^2 = \varepsilon \omega + n_0 s_l + n_1 s_{l+1} + n_2 s_{l+2} + n_3 s_{l+3},$$

ε représentant 1 ou 0, suivant que $\frac{p-1}{4} = \omega$ est pair ou impair.

Dans les deux cas, $s_0 + s_2, s_1 + s_3$ sont les deux racines de l'équation aux deux périodes

$$y^2 + y + \frac{1-p}{4} = 0.$$

Or

$$s_0^2 + s_2^2 = 2\varepsilon \omega + (n_0 + n_2)y_0 + (n_1 + n_3)y_1,$$

$$s_1^2 + s_3^2 = 2\varepsilon \omega + (n_0 + n_2)y_1 + (n_1 + n_3)y_0,$$

$$s_0 s_2 = \frac{(s_0 + s_2)^2 - s_0^2 - s_2^2}{3} = \frac{\omega(1 - 2\varepsilon) - (n_0 + n_2 + 1)y_0 - (n_1 + n_3)y_1}{2};$$

ainsi il sera facile de former l'équation ayant pour racines s_0, s_2 , connaissant n_0, n_1, n_2, n_3 .

Des équations écrites plus haut, on déduit

$$s_0^2 - s_2^2 = (n_0 - n_2)(s_0 - s_2) + (n_1 - n_3)(s_1 - s_3),$$

ou

$$(n_0 - n_2 - y_0)(s_0 - s_2) + (n_1 - n_3)(s_1 - s_3) = 0,$$

de même

$$(n_0 - n_2 - y_1)(s_1 - s_3) + (n_1 - n_3)(s_2 - s_0) = 0.$$

Éliminant entre ces deux dernières équations $s_0 - s_2, s_1 - s_3$, il vient

$$(n_1 - n_3)^2 + (n_0 - n_2 - y_0)(n_0 - n_2 - y_1) = 0$$

ou

$$4(n_1 - n_3)^2 + [2(n_0 - n_2) + 1]^2 = p.$$

Nous distinguerons maintenant les deux cas de ω pair et ω impair.

PREMIER CAS : ω pair. — D'après le n° 20, on a les équations

$$1 + n_0 + n_1 + n_2 + n_3 = \omega, \quad 2n_2 = n_1 + n_3.$$

On en déduit

$$n_0 = \omega - 1 - 3n_2, \quad 2(n_0 - n_2) + 1 = 2\omega - 1 - 8n_2 = a;$$

a est déterminé par les deux conditions

$$16b^2 + a^2 = p, \quad a \equiv -1 \pmod{4};$$

n_0, n_2 sont donc déterminés sans ambiguïté; n_1, n_3 peuvent se permuter en changeant la racine primitive prise pour g .

Les quatre périodes de l'unité sont données par l'équation

$$x^2 - \gamma x - \frac{p-1+(a+1)(2+4\gamma)}{16} = 0,$$

en remplaçant γ successivement par γ_0, γ_1 ; la condition trouvée $4(n_1 - n_3)^2 + (2n_0 - 2n_2 + 1)^2 = p$ exprime que les deux équations obtenues sont équivalentes. En posant $a = 4m - 1$, l'équation en x peut s'écrire

$$x^2 - \gamma x - (b^2 + m^2 + m\gamma) = 0,$$

ce qui donne, pour l'équation aux quatre périodes

$$(x^2 - b^2 - m^2)^2 + (x^2 - b^2 - m^2)(x - m) + \frac{1-p}{4}(x - m)^2 = 0.$$

SECOND CAS : ω impair. — D'après le n° 20, on a les équations du premier degré

$$n_0 + n_1 + n_2 + n_3 = \omega, \quad 1 + 2n_0 = n_1 + n_3;$$

d'où

$$n_2 = \omega - 1 - 3n_0, \quad 2n_0 - 2n_2 + 1 = 8n_0 - 2\omega + 3;$$

posons

$$2\omega - 3 - 8n_0 = a;$$

les deux conditions

$$4b^2 + a^2 = p, \quad a \equiv -1 \pmod{4}$$

déterminent complètement a , et par suite n_0, n_2 .

Les quatre périodes de l'unité sont données par l'équation

$$x^2 - \gamma x + \frac{3p+1-(a+1)(2+4\gamma)}{16} = 0$$

ou, en posant $a = 4m - 1$,

$$x^2 - yx + \frac{3b^2 + 1}{4} + m(3m - 2) - my = 0,$$

y devant prendre successivement les valeurs des deux racines de l'équation

$$y^2 + y + \frac{1-p}{4} = 0.$$

V.

Des équations se ramenant aux équations binômes par une transformation linéaire.

26. Si, dans une équation binôme, on remplace l'inconnue par une fonction linéaire $\frac{ax+b}{a'x+b'}$ de x , l'équation transformée or-
donnée suivant les puissances décroissantes de x devient

$$a_0 x^m + m a_1 x^{m-1} + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-i+1)}{1.2\dots i} a_i x^{m-i} + \dots = 0,$$

trois termes consécutifs de la suite $a_0, a_1, \dots, a_m$, satisfaisant à une relation linéaire homogène

$$a_0 a_i + a_1 a_{i+1} + a_2 a_{i+2} = 0;$$

les quantités $a_0, a_1, \dots, a_m$ sont donc $m+1$ termes consécutifs d'une série récurrente provenant d'une fraction dont le dénominateur est du second degré.

Réciproquement, soit

$$f(x) = \sum_{i=0}^{i=m} \frac{m(m-1)\dots(m-i+1)}{1.2\dots i} a_i x^{m-i},$$

les quantités $a_0, a_1, \dots, a_m$ satisfaisant à la loi de récurrence

$$a_0 a_i + a_1 a_{i+1} + a_2 a_{i+2} = 0;$$

on a identiquement

$$(\lambda' - \lambda)f(x) = (a_0 \lambda' - a_1)(x + \lambda)^m - (a_0 \lambda - a_1)(x + \lambda')^m,$$

λ et λ' étant les deux racines de l'équation

$$a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 = 0.$$

supposées distinctes; dans le cas où elles sont égales, on a

$$f(x) = a_0(x + \lambda)^m - m(a_0\lambda - a_1)(x + \lambda)^{m-1}.$$

Supposons les coefficients de $f(x)$ réels, et cherchons le nombre des racines réelles de l'équation $f(x) = 0$. Ces racines s'obtiennent en substituant à y , dans la fonction linéaire $\frac{\lambda'y - \lambda}{1 - y}$, les m racines de l'équation

$$(1) \quad (a_0\lambda' - a_1)y^m - (a_0\lambda - a_1) = 0.$$

1° Les racines de l'équation en λ sont imaginaires. Les racines de l'équation en y sont aussi imaginaires, et leur module est égal à 1; si, dans la quantité $\frac{\lambda'y - \lambda}{1 - y}$, y étant une racine de l'équation (1), on remplace $\sqrt{-1}$ par $-\sqrt{-1}$, elle ne change pas

$$\frac{\lambda \frac{1}{y} - \lambda'}{1 - \frac{1}{y}} = \frac{\lambda'y - \lambda}{1 - y};$$

donc les m racines de l'équation $f(x) = 0$ sont réelles.

2° Les racines de l'équation en λ sont réelles et inégales : la quantité $\frac{\lambda'y - \lambda}{1 - y}$ est réelle ou imaginaire en même temps que y . L'équation $f(x) = 0$ a le même nombre de racines réelles que l'équation en y : une seule si m est impair; deux si, m étant pair, $\frac{a_0\lambda - a_1}{a_0\lambda' - a_1}$ est positif; aucune si, m étant pair, $\frac{a_0\lambda - a_1}{a_0\lambda' - a_1}$ est négatif.

Les équations du troisième degré et l'équation dont dépend $\tan \frac{\alpha}{m}$, étant donnée $\tan \alpha$, rentrent dans la classe précédente.

27. Désignons par $\mathcal{F}(\theta) = 0$ l'équation ayant pour racines les $\varphi(m)$ racines primitives de l'équation binôme $x^m - 1 = 0$; y_0 étant une racine de l'équation (1), les autres seront $\theta y_0, \theta^2 y_0, \dots, \theta^{m-1} y_0, \dots$; et les racines de l'équation $f(x) = 0$ sont données par la formule $x_k = \frac{\lambda' \theta^k y_0 - \lambda}{1 - \theta^k y_0}$, en donnant à k les valeurs 0, 1, 2, ..., $m - 1$. Posons

$$\psi(x) = \frac{\lambda' \theta(x + \lambda) - \lambda(x + \lambda')}{x + \lambda' - \theta(x + \lambda)};$$

il vient

$$x_1 = \psi(x_0), \quad x_2 = \psi(x_1)$$

et, en général,

$$x_{k+1} = \psi(x_k);$$

d'où

$$x_k = \psi^k(x_0) \quad \text{et} \quad \psi^m(x) = x,$$

quel que soit x .

Réciproquement, soit $\psi(x) = \frac{ax+b}{a'x+b'}$ une fonction linéaire, le déterminant $ab' - ba'$ étant différent de 0. Identifiant avec la forme précédente, il vient

$$(1) \quad \frac{a}{a'} = \frac{\lambda'\theta - \lambda}{1-\theta}, \quad \frac{b'}{a'} = \frac{\lambda' - \theta\lambda}{1-\theta}, \quad \frac{b}{a'} = -\lambda\lambda';$$

d'où

$$\frac{b'-a}{a'} = -(\lambda + \lambda');$$

et λ, λ' sont les deux racines de l'équation

$$(2) \quad a'\lambda^2 - (b' - a)\lambda - b = 0;$$

si elles sont distinctes, la valeur de θ est déterminée et satisfait à l'équation

$$\theta^2 + \frac{(a+b')^2 + 2(a'b - ab')}{a'b - ab'} \theta + 1 = 0.$$

Si les racines de cette équation sont des racines de l'unité, la suite des fonctions $x, \psi(x), \psi^2(x), \dots, \psi^k(x)$ est terminée; en tout cas, on a

$$\psi^k(x) = \frac{\lambda'\theta^k(x+\lambda) - \lambda(x+\lambda')}{x+\lambda' - \theta^k(x+\lambda)}.$$

Si les racines de l'équation (2) sont égales, on ne peut satisfaire aux trois équations (1). Effectuons la transformation

$$x = \frac{\lambda'y - \lambda}{1-y}, \quad \psi(x) = \frac{\lambda'\chi(y) - \lambda}{1-\chi(y)},$$

d'où

$$\chi(y) = \frac{(a'\lambda\lambda' - b'\lambda + a\lambda' - b)y - a'\lambda^2 + (b' - a)\lambda + b}{[a'\lambda'^2 - (b' - a)\lambda' - b]y - a'\lambda\lambda' + b'\lambda' - a\lambda + b}.$$

Prenant pour λ' la valeur de la racine double de l'équation

$$a'\lambda^2 - (b' - a)\lambda - b = 0,$$

il vient

$$\chi(\mathcal{Y}) = \mathcal{Y} + \frac{2a'}{a+b'}(\lambda - \lambda'), \quad \chi^k(\mathcal{Y}) = \mathcal{Y} + \frac{2ka'}{a+b'}(\lambda - \lambda'),$$

et l'on en déduit

$$\psi^k(x) = \frac{\left(a - b' + \frac{a+b'}{m}\right)x + 2b}{2a'x - \left(a - b' - \frac{a+b'}{m}\right)}.$$

28. Si l'on se donne les deux premiers coefficients a_0, a_1 de la fonction $f(x)$ du n° 26, et les trois coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ de la relation $\alpha_0 a_i + \alpha_1 a_{i+1} + \alpha_2 a_{i+2} = 0$, tous les autres coefficients de la fonction $f(x)$ sont déterminés. Nous supposons les trois nombres α entiers et les deux quantités a_0, a_1 quelconques, a_0 étant toutefois différent de 0. D'après ce qui précède, les m racines de l'équation $f(x) = 0$ sont représentées par $x, \psi(x), \dots, \psi^{m-1}(x)$, x étant l'une d'elles, et $\psi(x)$ la fonction linéaire

$$\frac{(\lambda'\theta - \lambda)x - \lambda\lambda'(1 - \theta)}{(1 - \theta)x - (\lambda\theta - \lambda')},$$

où λ, λ' sont les deux racines supposées distinctes de l'équation $\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 = 0$, et θ une racine primitive de l'équation $\theta^m - 1 = 0$. On a

$$\frac{\lambda'\theta - \lambda}{1 - \theta} = \frac{\alpha_1 + z}{2\alpha_2}, \quad \frac{\lambda\theta - \lambda'}{1 - \theta} = \frac{\alpha_1 - z}{2\alpha_2},$$

z étant définie par l'équation

$$z^2 = (\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2)\left(\frac{\theta + 1}{1 - \theta}\right)^2;$$

d'où, en posant $\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2 = \Lambda$,

$$\theta = \frac{z - \sqrt{\Lambda}}{z + \sqrt{\Lambda}}.$$

Si l'on remplace θ par sa valeur en fonction de z dans l'équation de degré $\varphi(m)$ donnant les racines primitives de $\theta^m - 1 = 0$, on obtient une équation à coefficients entiers et n'ayant que des termes de degré pair en z . Cette équation est irréductible ou se décompose en deux autres de degré $\frac{\varphi(m)}{2}$ irréductibles; car, en remplaçant

$\frac{z^2}{A}$ par y^2 ou y , on obtient une équation irréductible (20). Il est facile de voir quand elle peut se décomposer pour m égal à un nombre premier p ou au double d'un nombre premier. D'après une formule de Gauss (SERRET, *Algèbre supérieure*),

$$4 \frac{x^p - 1}{x - 1} = Y^2 + (-1)^{\frac{p-1}{2}} p Z^2;$$

ainsi l'équation en z prend la forme $Y^2 + pAZ^2 = 0$, si m est égal à p ou $2p$, p étant un nombre premier congru à $-1 \pmod{4}$, Y et Z étant des fonctions entières de z ; et la forme $Y^2 - pZ^2 = 0$, si m est égal à p ou $2p$, p étant premier et congru à $1 \pmod{4}$. Donc, si m est égal à p ou $2p$, p étant premier et de la forme $4q + 3$, l'équation en z se ramène à deux autres de degré $\frac{p-1}{2}$, à coefficients entiers pour les valeurs de A égales à $-pa^2$; l'équation en z est irréductible dans tout autre cas pour m premier ou égal au double d'un nombre premier.

Soient

$$z_i = \sqrt{A} \frac{1 + \theta^i}{1 - \theta^i} = \gamma_i(z), \quad z_j = \sqrt{A} \frac{1 + \theta^j}{1 - \theta^j} = \gamma_j(z);$$

quel que soit le nombre entier i , $\gamma_i(z)$ est une fonction rationnelle de z ; mais, si le nombre i est premier avec m , z peut réciproquement s'exprimer en fonction rationnelle de z_i . Les entiers i et j étant tous deux premiers avec m , on a

$$\gamma_j \gamma_i(z) = \sqrt{A} \frac{1 + \theta^{ij}}{1 - \theta^{ij}} = \gamma_i \gamma_j(z);$$

les fonctions γ_i, γ_j sont donc échangeables entre elles, conformément à ce qui a été démontré au n° 18.

29. Cherchons dans quel cas les coefficients de la fonction $\psi(x)$ sont des nombres entiers, et par suite l'équation $f(x) = 0$, abélienne. On a

$$\psi(x) = \frac{(x_1 - z)x - 2x_0}{2x_2x - (x_1 + z)};$$

dans tous les cas, les coefficients des diverses fonctions $\psi(x)$, $\psi^2(x), \dots, \psi^{m-1}(z)$ sont des fonctions rationnelles de z ; et, d'après ce qui a été dit plus haut, l'équation en z ne peut se ramener à

une équation du premier degré que dans les cas de m égal à 2, 3, 4 ou 6.

Soit d'abord m égal à 6. L'équation en θ est $\theta^2 - \theta + 1 = 0$; l'équation en z qu'on obtient en substituant à θ la fonction $\frac{z - \sqrt{A}}{z + \sqrt{A}}$ est $z^2 + 3A = 0$; posons

$$A = \alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2 = -3\alpha^2.$$

d'où

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_1^2 + 3\alpha^2}{4\alpha_2}.$$

On peut prendre pour α_1 et α des nombres entiers quelconques de même parité, pour α_2 un diviseur quelconque du nombre entier $\frac{\alpha_1^2 + 3\alpha^2}{4}$; α_0 est alors déterminé; toutefois $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ ne doivent pas avoir de diviseur commun; z est égal à $\pm 3\alpha$, $\alpha_1 \mp 3\alpha$ est un nombre pair et la fonction $\psi(x)$ devient

$$\frac{\frac{\alpha_1 - 3\alpha}{2}x - \alpha_0}{\alpha_2x - \frac{\alpha_1 + 3\alpha}{2}};$$

son déterminant est égal à $-\frac{\alpha_1^2 - 9\alpha^2}{4} + \alpha_0\alpha_2 = 3\alpha^2$.

Soit $m = 3$. L'équation en θ est $\theta^2 + \theta + 1 = 0$, l'équation en z , $3z^2 + A = 0$; posons encore $A = -3\alpha^2 = \alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2$; d'où $\alpha_0\alpha_2 = \frac{\alpha_1^2 - 3\alpha^2}{4}$; $\alpha, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ peuvent être choisis comme précédemment; z est égal à $\pm \alpha$; $\alpha_1 \mp \alpha$ est un nombre pair et la fonction $\psi(x)$ devient

$$\frac{\frac{\alpha_1 - \alpha}{2}x - \alpha_0}{\alpha_2x - \frac{\alpha_1 + \alpha}{2}};$$

son déterminant est égal à $-\frac{\alpha_1^2 - \alpha^2}{4} + \alpha_0\alpha_2 = \alpha^2$; si α^2 est égal à 1, les racines de l'équation $f(x) = 0$ se développent en fractions continues terminées par les mêmes quotients (SERRET, *Algèbre supérieure*). L'équation aux trois périodes rentre dans ce cas; le nombre que nous désignons ici par α correspond au nombre que

nous avons appelé v au n° 22 et qui est défini par l'équation

$$27v^2 + L^2 = 4p.$$

Soit $m = 4$. L'équation en θ est $\theta^2 + 1 = 0$, l'équation en z , $z^2 + A = 0$; posons $A = \alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2 = -a^2$, d'où $\alpha_0\alpha_2 = \frac{\alpha_1^2 + a^2}{4}$. On peut prendre pour α_1 , a des nombres pairs quelconques, pour α_2 un diviseur du nombre entier $\frac{\alpha_1^2 + a^2}{4}$, tel que α_0 , α_1 , α_2 n'aient pas de diviseur commun. z est égal à $\pm a$; $\alpha_1 \pm a$ est un nombre pair et la fonction $\psi(x)$ devient

$$\frac{\frac{\alpha_1 - a}{2}x - \alpha_0}{\alpha_2 x - \frac{\alpha_1 + a}{2}}.$$

Le déterminant de $\psi(x)$ est égal à $\frac{a^2}{2}$; comme dans le cas de $m = 6$, ce déterminant ne peut jamais devenir égal à ± 1 , puisque a et par suite $\frac{a^2}{2}$ sont des nombres pairs.

Soit enfin $m = 2$; considérons le cas où l'équation proposée $Dx^2 + Ex + F = 0$ a ses coefficients entiers. On peut satisfaire à la relation $\alpha_0 D + \alpha_1 E + \alpha_2 F = 0$ d'une infinité de manières, en prenant pour les α des nombres entiers; il en résulte

$$x_2 = \frac{\alpha_1 x_1 - \alpha_0}{\alpha_2 x_1 - \alpha_1},$$

x_1, x_2 étant les deux racines de l'équation. Elles se développeront en fractions continues terminées par les mêmes quotients si l'on peut satisfaire à la condition $\alpha_1^2 - \alpha_0\alpha_2 = \pm 1$, ou par l'élimination de α_0 ,

$$D\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 E + \alpha_2^2 F = \pm D,$$

avec la condition $\frac{\alpha_1^2 \pm 1}{\alpha_2} = \text{entier}$. Cette dernière équation est toujours possible lorsque D ou F est égal à ± 1 ; $\alpha_2 x_1 - \alpha_1$ est une unité complexe lorsque $D = \pm 1$.

30. Lorsque les racines d'une équation irréductible sont reliées par une équation linéaire $ax_1x_2 + bx_1 + cx_2 + d = 0$, ou plus généralement lorsque les racines d'une équation $f(x) = 0$, de degré

m , peuvent se partager en $\frac{m}{\mu}$ groupes de μ racines, les racines d'un groupe pouvant être représentées par $x, \theta(x) \dots \theta^{\mu-1}(x)$, x étant l'une d'elles, θ une fonction rationnelle et linéaire, $\theta^{\mu}(x)$ étant identiquement égale à x , on peut, par une transformation linéaire, ramener l'équation à la forme $F(y^{\mu}) = 0$, F désignant une fonction entière. Ainsi, dans le cas où la relation est

$$ax_1x_2 + b(x_1 + x_2) + c = 0,$$

on peut ramener l'équation à la forme $F(y^2) = 0$. Si a n'est pas nul, on simplifie les calculs en ramenant l'équation à être réciproque par une substitution linéaire et entière, $x = \alpha t + \beta$; puis il suffit de remplacer t par $\frac{y+\gamma}{y-\gamma}$ pour avoir une équation paire. Soit l'équation du quatrième degré

$$f(x) = x^4 + 6qx^2 + 4rx + s = 0.$$

On a, pour déterminer α et β , les équations

$$[6f'(\beta)]^2 - f(\beta)[f''(\beta)]^2 = 0, \quad \alpha^2 = \frac{6f'(\beta)}{f''(\beta)},$$

ou

$$\beta^2 + \frac{s-9q^2}{2r}\beta^2 - 3q\beta - \frac{r}{2} = \varphi(\beta) = 0, \quad \alpha^2 = \varphi'(\beta).$$

Et l'on voit immédiatement que, si les coefficients de $f(x)$ sont réels, il y a deux valeurs réelles et positives pour α^2 si les trois racines de l'équation $\varphi(\beta) = 0$ sont réelles, et une valeur réelle et positive pour α^2 si $\varphi(\beta) = 0$ a deux racines imaginaires.

Sur les transformations planes non isogonales;

par M. C.-A. LAISANT.

(Séance du 19 janvier 1887.)

D'un point X d'une figure plane, on déduit un point Y par une transformation *quelconque*, c'est-à-dire au moyen d'une construction géométrique bien définie, quelle que soit d'ailleurs cette

construction. En général, la transformation ne sera pas isogonale; cela n'aura lieu que lorsque y pourra s'exprimer sous la forme $\varphi(x)$, la fonction φ pouvant d'ailleurs se décomposer en $\varphi_1 + i\varphi_2$.

Mais, alors même qu'il n'en est pas ainsi, la nature des constructions indiquées permet d'écrire y sous la forme analytique suivante :

$$(1) \quad y = \varphi(x, cj x).$$

Considérons un point X quelconque, et posons, pour la valeur correspondante

$$(2) \quad \frac{d\varphi}{dx} = p, \quad \frac{d\varphi}{dcj x} = q.$$

p et q sont alors deux quantités géométriques, constantes pour un même point. Si nous différencions la relation (1) en donnant à x deux accroissements arbitraires $d_1 x$, $d_2 x$, il viendra

$$(3) \quad d_1 y = p d_1 x + q cj d_1 x,$$

$$(4) \quad d_2 y = p d_2 x + q cj d_2 x.$$

La conjuguée de l'équipollence (4) est

$$(5) \quad cj d_2 y = cj p cj d_2 x + cj q d_2 x.$$

De (3) et de (5) on tire

$$d_1 y cj d_2 y - d_2 y cj d_1 y = (p cj p - q cj q)(d_1 x cj d_2 x - d_2 x cj d_1 x),$$

c'est-à-dire

$$(6) \quad (YY_1 Y_2) = (p cj p - q cj q)(XX_1 X_2),$$

en désignant par XX_1 , XX_2 , YY_1 , YY_2 les déplacements infiniment petits $d_1 x$, $d_2 x$, $d_1 y$, $d_2 y$, respectivement.

Le rapport des aires infiniment petites correspondantes autour d'un même point et du point correspondant est donc constant pour le point considéré.

Cette propriété est assez curieuse, et elle peut d'ailleurs s'établir par l'analyse ordinaire, sans le secours de la méthode des équipollences. Elle conduit à plusieurs remarques.

Si nous considérons une courbe fermée quelconque dont l'intérieur est parcouru par l'extrémité de la variable x , l'extrémité

de γ parcourra l'intérieur d'une autre courbe fermée. Appelons $d\sigma$ et $d\zeta$ les aires élémentaires autour de deux points correspondants X et Y, et posons $p \operatorname{cj} p - q \operatorname{cj} q = k$, quantité algébrique. La relation (6) donnera

$$d\zeta = k d\sigma$$

et, par intégration portant sur toute l'aire des courbes,

$$(7) \quad \zeta = \int k d\sigma.$$

Si k exprime, par exemple, le poids spécifique de l'aire (supposée matérialisée) de la courbe (X) en chaque point, ζ exprimera le poids total de cette aire.

Si k exprime une coordonnée normale au plan de la figure, ζ exprimera le volume du cylindre se projetant suivant la courbe (X) et ayant k pour hauteur en chaque point.

Dans ces deux cas, on voit que l'aire de la courbe (Y) exprime, soit le poids, soit le volume dont nous venons de parler. Le fait, au premier abord, pourrait sembler paradoxal, puisque la courbe (Y) ne dépend que du *contour* de la courbe (X), si l'on ne se rappelait pas que le mode de transformation est intimement lié à la valeur de k .

Cette expression des volumes par des aires peut offrir de l'intérêt dans certaines questions particulières.

Dans la relation (3), supprimons l'indice, et posons $dx = dr \cdot \epsilon^0$. Nous aurons

$$dx = dr(p\epsilon^0 + q\epsilon^{-0}) = dr\left(\frac{p+q}{2} \cos\theta + i \frac{p-q}{2} \sin\theta\right).$$

Soient

$$XA = \frac{p+q}{2}, \quad XB = i \frac{p-q}{2}.$$

Alors

$$(8) \quad dy = dr(XA \cos\theta + XB \sin\theta).$$

De là plusieurs conséquences :

1° Si l'on décrit autour de X comme centre une circonférence infiniment petite, la transformée de cette circonférence sera une ellipse infiniment petite de centre Y.

2° A plusieurs circonférences concentriques infiniment pe-

tites autour de X comme centre correspondent plusieurs ellipses homothétiques de centre Y.

3° *A un système de deux rayons rectangulaires dans la circonférence de centre X correspond un système de deux demi-diamètres conjugués dans l'ellipse infiniment petite correspondante.*

Par la relation (3) on reconnaît encore facilement que :

Si une ellipse quelconque infiniment petite est décrite autour de X comme centre, elle a pour correspondante une ellipse infiniment petite de centre Y.

Nous bornons là ces remarques, en nous contentant d'attirer l'attention du lecteur sur un fait : c'est que, malgré l'arbitraire que présente la transformation, la transformée infiniment petite d'une ellipse autour d'un point est une ellipse, à la condition, constamment sous-entendue, qu'il y ait continuité. Il y a, ce semble, une certaine analogie entre ce fait et la théorie de l'indicatrice dans la courbure des surfaces.

Il y aurait lieu d'étudier les analogies qui doivent se produire lorsqu'on examine des transformations de figures dans l'espace.

Note sur quelques intégrales pseudo-elliptiques;

par M. E. GOURSAT.

(Séance du 16 mars 1887.)

1. Considérons une différentielle de la forme

$$(1) \quad f(x) \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}},$$

où $f(x)$ désigne une fonction rationnelle quelconque et

$$Ax^2 + Bx + C$$

un trinôme du second degré, non carré parfait, pouvant, comme

cas particulier, se réduire à une expression linéaire. Posons

$$(2) \quad x = \frac{at^2 + bt + c}{a't^2 + b't + c'} = \varphi(t);$$

le numérateur et le dénominateur de $\varphi(t)$ sont supposés premiers entre eux, et l'un au moins est du second degré. Par cette substitution, la différentielle (1) devient

$$3) \quad \mathcal{F}(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}},$$

où

$$\mathcal{F}(t) = f \left(\frac{at^2 + bt + c}{a't^2 + b't + c'} \right) \frac{Lt^2 - 2Nt + M}{(a't^2 + b't + c')^2},$$

$$L = ab' - ba', \quad M = bc' - cb', \quad N = ca' - ac',$$

$$R(t) = A(at^2 + bt + c)^2 + B(at^2 + bt + c)(a't^2 + b't + c') + C(a't^2 + b't + c')^2.$$

Les deux racines t_1, t_2 de l'équation

$$\varphi(t) = \lambda$$

vérifient, quel que soit λ , la relation d'involution

$$Lt_1t_2 - N(t_1 + t_2) + M = 0,$$

obtenue en éliminant λ entre les deux équations

$$at_1t_2 - c - \lambda[a't_1t_2 - c'] = 0,$$

$$a(t_1 + t_2) + b - \lambda[a'(t_1 + t_2) + b'] = 0.$$

Il suit de là que si, dans $\varphi(t)$, on fait la substitution linéaire

$$(4) \quad Ltz - N(t + z) + M = 0,$$

ou

$$t = \frac{Nz - M}{Lz - N},$$

on aura identiquement

$$\varphi(t) = \varphi(z).$$

On vérifie en effet, sans aucune difficulté, les identités ci-dessous :

$$at^2 + bt + c = (N^2 - LM) \frac{az^2 + bz + c}{(Lz - N)^2},$$

$$a't^2 + b't + c' = (N^2 - LM) \frac{a'z^2 + b'z + c'}{(Lz - N)^2},$$

$$Lt^2 - 2Nt + M = (LM - N^2) \frac{Lz^2 - 2Nz + M}{(Lz - N)^2}.$$

On aura, par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{dt}{\sqrt{R(t)}} &= \frac{(LM - N^2) dz}{\sqrt{(N^2 - LM)^2 R(z)}} = \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}, \\ f\left(\frac{at^2 + bt + c}{a't^2 + b't + c'}\right) &= f\left(\frac{az^2 + bz + c}{a'z^2 + b'z + c'}\right), \\ \frac{Lt^2 - 2Nt + M}{a't^2 + b't + c'} &= -\frac{Lz^2 - 2Nz + M}{a'z^2 + b'z + c'}, \\ \left(\frac{Nz - M}{Lz - N}\right) &= -f\left(\frac{az^2 + bz + c}{a'z^2 + b'z + c'}\right) \frac{Lz^2 - 2Nz + M}{a'z^2 + b'z + c'} = -\mathfrak{F}(z).\end{aligned}$$

La différentielle (3) jouit donc de la propriété suivante :

Il existe une substitution linéaire involutive

$$t = \frac{Nz - M}{Lz - N},$$

qui permute deux à deux les racines de l'équation $R(t) = 0$, telle que l'on ait identiquement

$$\mathfrak{F}\left(\frac{Nz - M}{Lz - N}\right) = -\mathfrak{F}(z).$$

2. Inversement, soit $R(t)$ un polynôme du quatrième degré, ayant quatre racines distinctes a, b, c, d , et soit

$$Lt_1 t_2 - N(t_1 + t_2) + M = 0$$

une substitution linéaire involutive qui permute deux à deux les racines a, b, c, d . Si une fonction rationnelle $\mathfrak{F}(t)$ est telle que l'on ait identiquement

$$\mathfrak{F}(t_1) + \mathfrak{F}(t_2) = 0,$$

l'intégrale

$$\int \mathfrak{F}(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

est une intégrale *pseudo-elliptique*. Désignons en effet par α et β les points doubles de l'involution précédente; la relation entre t_1 et t_2 pourra s'écrire

$$\frac{t_1 - \alpha}{t_1 - \beta} + \frac{t_2 - \alpha}{t_2 - \beta} = 0.$$

Faisons le changement de variable,

$$\frac{t - \alpha}{t - \beta} = u;$$

la différentielle $\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$ se change en une différentielle de la forme

$$\frac{du}{\sqrt{R_1(u)}},$$

où le polynôme $R_1(u)$ n'a que des termes de degré pair; car la relation entre les valeurs u_1, u_2 de u , qui correspondent aux valeurs t_1, t_2 de t , est précisément

$$u_1 + u_2 = 0.$$

De même, la fonction rationnelle $\mathcal{F}(t)$ se change en une certaine fonction rationnelle $F(u)$, et la relation

$$\mathcal{F}(t_1) + \mathcal{F}(t_2) = 0$$

devient

$$F(u_1) + F(u_2) = 0,$$

c'est-à-dire

$$F(u_1) + F(-u_1) = 0.$$

Il suit de là que $F(u)$ sera de la forme $u F_1(u^2)$, et il suffira de poser

$$u^2 = x$$

pour ramener la différentielle

$$\frac{u F_1(u^2) du}{\sqrt{R_1(u)}}$$

à une différentielle de la forme (1). On peut donc énoncer le théorème suivant :

Soit

$$\left[t, \frac{Nt - M}{Lt - N} \right]$$

une substitution de période 2 permutant deux à deux les quatre racines a, b, c, d de l'équation $R(t) = 0$, et $\mathcal{F}(t)$ une fonction rationnelle telle que l'on ait identiquement

$$\mathcal{F}(t) + \mathcal{F}\left(\frac{Nt - M}{Lt - N}\right) = 0;$$

l'intégrale

$$\int \mathfrak{F}(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

est une intégrale pseudo-elliptique.

Ce résultat a été obtenu d'une autre façon par M. Raffy (voir *Bulletin*, t. XII, p. 51); le procédé ci-dessus donne en outre le moyen d'effectuer la réduction.

L'énoncé précédent s'applique encore lorsque $R(t)$ est du troisième degré, pourvu qu'on regarde une des quatre racines a, b, c, d comme infinie.

3. Les quatre racines a, b, c, d étant quelconques, il existe trois substitutions linéaires de période 2, qui permutent deux à deux ces trois racines. Par exemple, la substitution

$$\left\{ t, \frac{(ab - cd)t + (a + b)cd - (c + d)ab}{[(a + b) - (c + d)]t - (ab - cd)} \right\}$$

permuté les deux racines a et b et les deux racines c et d . Les deux autres substitutions se déduisent de celle-là, en prenant successivement pour a et b deux quelconques des racines, et pour c et d les deux autres. Désignons par S_1, S_2, S_3 ces trois substitutions; avec la substitution identique $t = t$, elles forment un groupe de quatre substitutions, et l'on a les relations

$$S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = 1, \\ S_1 S_2 = S_2 S_1 = S_3, \quad S_1 S_3 = S_3 S_1 = S_2, \quad S_2 S_3 = S_3 S_2 = S_1.$$

Soient en général S une substitution linéaire

$$S \left[t, \frac{Nt - M}{Lt - N} \right]$$

et $F(t)$ une fonction rationnelle de t ; je désignerai, pour abréger, par $F(S)$ la fonction rationnelle

$$F \left(\frac{Nt - M}{Lt - N} \right).$$

Étant donné un polynôme quelconque du quatrième degré $R(t)$, nous connaissons, d'après ce qui précède, trois types d'intégrales

pseudo-elliptiques, relatives à ce polynôme,

$$\begin{aligned} \int f(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}, \\ \int \varphi(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}, \\ \int \psi(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}, \end{aligned}$$

les fonctions rationnelles $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ vérifiant respectivement les relations

$$f(S_1) + f = 0, \quad \varphi(S_2) + \varphi = 0, \quad \psi(S_3) + \psi = 0,$$

équivalentes à celles-ci

$$f(S_2) + f(S_3) = 0, \quad \varphi(S_1) + \varphi(S_3) = 0, \quad \psi(S_1) + \psi(S_2) = 0.$$

Il est clair qu'en ajoutant ces trois intégrales, on obtient encore une intégrale *pseudo-elliptique*

$$\int \mathcal{F}(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}},$$

où

$$\mathcal{F}(t) = f(t) + \varphi(t) + \psi(t);$$

les relations précédentes, qui sont vérifiées par les fonctions f , φ , ψ , nous donnent, pour la fonction $\mathcal{F}(t)$, la relation

$$(5) \quad \mathcal{F} + \mathcal{F}(S_1) + \mathcal{F}(S_2) + \mathcal{F}(S_3) = 0.$$

Inversement, soit $\mathcal{F}(t)$ une fonction rationnelle satisfaisant à la condition (5). Posons

$$f = \frac{\mathcal{F} - \mathcal{F}(S_1)}{2}, \quad \varphi = \frac{\mathcal{F} + \mathcal{F}(S_1)}{2};$$

on aura respectivement

$$f(S_1) + f = 0, \quad \varphi(S_2) + \varphi = 0,$$

de sorte que les deux intégrales

$$\int f(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}, \quad \int \varphi(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

sont des intégrales *pseudo-elliptiques*. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Soient S_1, S_2, S_3 les trois substitutions linéaires de période 2, qui permutent deux à deux les quatre racines de l'équation $R(t) = 0$, et $\mathfrak{F}(t)$ une fonction rationnelle telle que l'on ait identiquement

$$\mathfrak{F} + \mathfrak{F}(S_1) + \mathfrak{F}(S_2) + \mathfrak{F}(S_3) = 0;$$

l'intégrale

$$\int \mathfrak{F}(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

est une intégrale pseudo-elliptique.

Le théorème s'applique encore lorsque $R(t)$ est du troisième degré, pourvu qu'on regarde une des racines a, b, c, d comme infinie.

La somme

$$\mathfrak{F} + \mathfrak{F}(S_1) + \mathfrak{F}(S_2) + \mathfrak{F}(S_3)$$

est une fonction symétrique des quantités a, b, c, d ; on pourra donc reconnaître si elle est nulle sans connaître les racines du polynôme sous le radical.

Exemples. — Soit

$$R(t) = (1 - t^2)(1 - k^2 t^2);$$

l'intégrale

$$\int f(t) \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}$$

sera pseudo-elliptique, pourvu que l'on ait

$$f(t) + f(-t) + f\left(\frac{1}{kt}\right) + f\left(-\frac{1}{kt}\right) = 0.$$

Il en sera de même de l'intégrale

$$\int \frac{f(x^2) dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}},$$

pourvu que l'on ait

$$f(x^2) + f\left[\frac{1-k^2x^2}{k^2(1-x^2)}\right] + f\left(\frac{1}{k^2x^2}\right) + f\left(\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}\right) = 0.$$

(Voir HERMITE, *Journal de Liouville*, 1880; RAFFY, *loc. cit.*, p. 71.)

4. L'analyse qui précède nous fait connaître une relation entre certaines intégrales pseudo-elliptiques et les substitutions linéaires qui permutent les racines de l'équation $R(t) = 0$. Si les quantités a, b, c, d sont quelconques, il n'existe pas d'autres substitutions linéaires que les trois précédentes permutant ces quatre racines. Mais, pour certaines formes spéciales de $R(t)$, il existera d'autres substitutions de cette espèce. Il est naturel de se demander si l'on peut aussi rattacher à ces nouvelles substitutions des intégrales pseudo-elliptiques. C'est en effet ce qui a lieu.

On peut faire sur ces substitutions plusieurs hypothèses. Soient toujours a, b, c, d les racines de $R(t) = 0$; il peut se faire qu'il existe une substitution linéaire ne changeant pas le point a et permutant les trois autres racines b, c, d circulairement. Cette substitution sera forcément de période 3, et on pourra l'écrire

$$S\left[\frac{t-a}{t-a_1}; \alpha \frac{t-a}{t-a_1}\right], \quad \text{où} \quad \alpha = e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

Soit maintenant $F(t)$ une fonction rationnelle de t jouissant de la propriété exprimée par l'équation

$$F(S) = \alpha F;$$

l'intégrale

$$\int F(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

pourra s'exprimer en termes finis au moyen de symboles élémentaires.

Faisons d'abord la transformation

$$\frac{t-a}{t-a_1} = z;$$

la transformée de S par cette substitution est

$$S'[z; \alpha z].$$

La différentielle $\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$ se change en une différentielle de la forme

$$\frac{dz}{\sqrt{z(Az^3 + B)}},$$

puisque les trois racines différentes de zéro du nouveau polynôme sous le radical doivent se permuter circulairement par la substitution S' . La fonction rationnelle $F(t)$ se change en une fonction rationnelle de z vérifiant la relation

$$F_1(\alpha z) = \alpha F_1(z),$$

qui sera, par conséquent, de la forme

$$F_1(z) = z \varphi(z^3),$$

et la différentielle précédente devient

$$\frac{\varphi(z^3)z dz}{\sqrt{z(Az^3 + B)}}.$$

Il suffit maintenant de poser $z^3 = x$ pour être ramené à une différentielle de la forme (1); d'où résulte le théorème énoncé plus haut.

On peut rattacher à ce cas de réduction une intégrale assez célèbre, étudiée par Legendre et Clausen, et tout récemment par M. S. Günther (*Bulletin*, t. X, p. 89). S'il existe une substitution linéaire de période 3 laissant fixe une des racines a, b, c, d et permutant les autres circulairement, on pourra toujours, par une substitution linéaire, ramener $R(t)$ à la forme

$$R(t) = t^3 - 1;$$

ce qui revient à supposer $a = \infty, b = 1, c = \alpha, d = \alpha^2$. Il existe huit substitutions de période 3, qui permutent trois de ces racines et laissent fixe la quatrième; ce sont les quatre suivantes :

$$[t; \alpha t], \quad \left[\frac{t-1}{t+2}; \alpha \frac{t-1}{t+2} \right], \quad \left[\frac{t-\alpha}{t+2\alpha}; \alpha \frac{t-\alpha}{t+2\alpha} \right], \quad \left[\frac{t-\alpha^2}{t+2\alpha^2}; \alpha \frac{t-\alpha^2}{t+2\alpha^2} \right],$$

et leurs répétitions. A ces quatre substitutions correspondent les quatre types d'intégrales pseudo-elliptiques

$$\int \varphi(t^3) \frac{dt}{t\sqrt{t^3-1}}, \quad \int \varphi\left[\left(\frac{t-1}{t+2}\right)^3\right] \frac{t-1}{t+2} \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}},$$

$$\int \varphi\left[\left(\frac{t-\alpha}{t+2\alpha}\right)^3\right] \frac{t-\alpha}{t+2\alpha} \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}, \quad \int \varphi\left[\left(\frac{t-\alpha^2}{t+2\alpha^2}\right)^3\right] \frac{t-\alpha^2}{t+2\alpha^2} \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}};$$

les substitutions propres à réduire ces intégrales sont respectivement

$$t^3 = x, \quad \left(\frac{t-1}{t+2}\right)^3 = x, \quad \left(\frac{t-\alpha}{t+2\alpha}\right)^3 = x, \quad \left(\frac{t-\alpha^2}{t+2\alpha^2}\right)^3 = x.$$

La première s'offre immédiatement. Quant à la seconde, un calcul facile permet de vérifier qu'en posant

$$x = \left(\frac{t-1}{t+2}\right)^3$$

on a

$$\frac{1}{3} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{t-1}{t+2} \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}};$$

ce qui donne en même temps un résultat connu (REALIS, *Mathesis*, t. II)

$$\int \frac{t-1}{t+2} \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}} = \frac{2}{3} \arctan \frac{(t-1)^2}{3\sqrt{t^3-1}}.$$

On trouve tout pareillement

$$\int \frac{t-\alpha^2}{t+2\alpha^2} \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}} = \frac{2}{3\alpha^2} \arctan \frac{(\alpha t-1)^2}{3\sqrt{t^3-1}},$$

$$\int \frac{t-\alpha}{t+2\alpha} \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}} = \frac{2}{3\alpha^2} \arctan \frac{(\alpha^2 t-1)^2}{3\sqrt{t^3-1}}.$$

Désignons par A, B, C trois constantes arbitraires; l'intégrale

$$\int \left(A \frac{t-1}{t+2} + B \frac{t-\alpha^2}{t+2\alpha^2} + C \frac{t-\alpha}{t+2\alpha} \right) \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}$$

s'exprimera en termes finis au moyen de symboles élémentaires. Cette intégrale peut s'écrire

$$\int \frac{\lambda(t^3-4) + \mu t^2 + \nu t}{t^3+8} \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}};$$

où

$$\lambda = A + B + C, \quad \mu = -3(A + Bx^2 + Cx), \quad \nu = 6(A + Bx + Cx^2);$$

λ, μ, ν sont, comme A, B, C , des coefficients arbitraires. Par conséquent les deux intégrales

$$\int \frac{t^3 - 4}{t^3 + 8} \frac{dt}{\sqrt{t^3 - 1}}, \quad \int \frac{t dt}{(t^3 + 8)\sqrt{t^3 - 1}}$$

sont des intégrales pseudo-elliptiques; la dernière est précisément l'intégrale de Legendre et de Clausen.

5. Les substitutions linéaires qui permutent les quatre quantités $\infty, 1, \alpha, \alpha^2$ forment un *groupe* de douze substitutions isomorphe au groupe formé par les rotations qui font revenir sur lui-même un tétraèdre régulier (voir KLEIN, *Mathematische Annalen*, Bd. XII). Ces substitutions sont les suivantes, abstraction faite de la substitution identique :

$$\begin{aligned} & \left[t; \frac{t+2}{t-1} \right], \quad \left[t; \frac{t+2\alpha}{\alpha^2 t-1} \right], \quad \left[t; \frac{t+2\alpha^2}{\alpha t-1} \right], \\ & [t; \alpha t], \quad \left[t; \frac{t+2\alpha^2}{t-\alpha^2} \right], \quad \left[t; \frac{t+2}{\alpha^2 t-\alpha^2} \right], \quad \left[t; \frac{t+2\alpha}{t-\alpha^2} \right], \\ & [t; \alpha^2 t], \quad \left[t; \frac{t+2\alpha}{t-\alpha} \right], \quad \left[t; \frac{t+2\alpha^2}{\alpha^2 t-\alpha} \right], \quad \left[t; \frac{t+2}{\alpha t-\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Les trois premières sont de période 2 et de multiplicateur -1 ; les quatre de la seconde ligne sont de période 3 et de multiplicateur α^2 ; les quatre dernières sont de période 3 et de multiplicateur α . Pour évaluer le multiplicateur d'une substitution de période 3, je la mets sous la forme normale

$$\left[\frac{t-a}{t-a_1}; \mu \frac{t-a}{t-a_1} \right],$$

a étant celui des points doubles de cette substitution, qui fait partie des quantités $\infty, 1, \alpha, \alpha^2$, et j'appelle μ le multiplicateur correspondant.

Soient S_i une des douze substitutions précédentes et μ_i le multiplicateur correspondant. Prenons une fonction rationnelle $F(t)$

satisfaisant aux deux relations.

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{i=12} F(S_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^{i=12} \frac{1}{\mu_i^2} F(S_i) = 0; \end{array} \right.$$

l'intégrale

$$\int F(t) \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}$$

est une intégrale pseudo-elliptique.

Pour le démontrer, je pose

$$\begin{aligned} F(t) + F\left(\frac{t+2}{t-1}\right) + F\left(\frac{t+2\alpha}{\alpha^2 t-1}\right) + F\left(\frac{t+2\alpha^2}{\alpha t-1}\right) &= 4\varphi(t), \\ F(t) - F\left(\frac{t+2}{t-1}\right) + F\left(\frac{t+2\alpha}{\alpha^2 t-1}\right) - F\left(\frac{t+2\alpha^2}{\alpha t-1}\right) &= 4\varphi_1(t), \\ F(t) - F\left(\frac{t+2}{t-1}\right) - F\left(\frac{t+2\alpha}{\alpha^2 t-1}\right) + F\left(\frac{t+2\alpha^2}{\alpha t-1}\right) &= 4\varphi_2(t), \\ F(t) + F\left(\frac{t+2}{t-1}\right) - F\left(\frac{t+2\alpha}{\alpha^2 t-1}\right) - F\left(\frac{t+2\alpha^2}{\alpha t-1}\right) &= 4\varphi_3(t); \end{aligned}$$

on en déduit

$$F(t) = \varphi(t) + \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \varphi_3(t).$$

Mais les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ vérifient respectivement les relations

$$\begin{aligned} \varphi_1\left(\frac{t+2}{t-1}\right) + \varphi_1(t) &= 0, \\ \varphi_2\left(\frac{t+2\alpha}{\alpha^2 t-1}\right) + \varphi_2(t) &= 0, \\ \varphi_3\left(\frac{t+2\alpha^2}{\alpha t-1}\right) + \varphi_3(t) &= 0, \end{aligned}$$

de sorte que, d'après la proposition du n° 2, les trois intégrales

$$\int \varphi_1(t) \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}, \quad \int \varphi_2(t) \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}, \quad \int \varphi_3(t) \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}$$

sont des intégrales pseudo-elliptiques. Nous avons encore à consi-

dérivé l'intégrale

$$\int \varphi(t) \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}};$$

mais, en tenant compte des relations (6), on aura

$$\begin{aligned} \varphi(t) + \varphi(\alpha t) + \varphi(\alpha^2 t) &= 0, \\ \varphi(t) + \alpha^2 \varphi(\alpha t) + \alpha \varphi(\alpha^2 t) &= 0, \end{aligned}$$

de sorte que $\varphi(t)$ sera de la forme

$$\varphi(t) = t^2 \psi(t^3),$$

et la différentielle considérée prend la forme

$$t^2 \psi(t^3) \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}},$$

que l'on ramène immédiatement à la forme (1), en posant $t^3 = x$.

6. On peut encore faire deux hypothèses sur les substitutions linéaires qui permutent les quatre racines a, b, c, d : 1° il peut se faire qu'une substitution, ayant pour points doubles deux de ces racines, permute les deux autres; 2° il peut arriver qu'il existe une substitution linéaire, permutant circulairement les quatre racines. Dans le premier cas, la différentielle

$$\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

pourra se ramener, par une substitution linéaire, à la forme

$$\frac{dt}{\sqrt{t(t^2+1)}},$$

et, dans le second cas, à la forme

$$\frac{dt}{\sqrt{t^4-1}};$$

d'ailleurs on passe de la première à la seconde en changeant t en $\frac{1-t}{1+t}$. Il suffit donc de considérer la seconde forme. Il existe huit substitutions permutant les quatre quantités $+1, -1, +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$.

$-\sqrt{-1}$; ce sont les suivantes :

$$[t; t], [t; it], [t; -t], [t; -it], \\ \left[t; \frac{1}{t}\right], \left[t; -\frac{1}{t}\right], \left[t; \frac{i}{t}\right], \left[t; -\frac{i}{t}\right];$$

elles forment un groupe isomorphe au groupe formé par les rotations qui font revenir sur lui-même un système de deux diamètres rectangulaires de la sphère. On peut faire correspondre à ces substitutions les types suivants d'intégrales réductibles :

$$\int t^{\varphi(t^2)} \frac{dt}{\sqrt{t^4-1}}, \quad \int \left(t \mp \frac{i}{t}\right)^{\varphi} \left(t \pm \frac{i}{t}\right) \frac{dt}{\sqrt{t^4-1}};$$

mais il est à remarquer que les substitutions de période 4 ne fournissent pas d'intégrales pseudo-elliptiques nouvelles.

7. Étant donné un polynôme $R(t)$ de degré supérieur au quatrième, n'ayant que des facteurs linéaires simples, il n'existe pas en général de substitution linéaire permutant les racines de l'équation $R(t) = 0$. S'il existe de pareilles substitutions, on peut leur faire correspondre des intégrales ultra-elliptiques de la forme

$$\int f[t, \sqrt{R(t)}] dt,$$

qu'il est possible de ramener, par une substitution algébrique, à des intégrales de genre inférieur. Sans entrer ici dans tous les détails, je rappellerai les deux exemples suivants, qui, du reste, sont bien connus. Si l'on a affaire à un polynôme du sixième degré dont les racines sont en involution, on sait qu'on peut, par une substitution linéaire, le ramener à la forme

$$R(u) = au^6 + bu^4 + cu^2 + d,$$

et les deux intégrales de première espèce et de second genre

$$\int \frac{du}{\sqrt{R(u)}}, \quad \int \frac{u du}{\sqrt{R(u)}}$$

se ramènent par la substitution $u^2 = x$ à des intégrales elliptiques. C'est au fond le cas de réduction trouvé par Jacobi (*Journal de Crelle*, t. 8).

Comme autre exemple, prenons

$$R(t) = t(t^4 - 1);$$

les six quantités $0, \infty, \pm 1, \pm i$ sont permutées par un groupe de vingt-quatre substitutions linéaires, dérivé des deux substitutions

$$[t; it], \quad \left[t; \frac{1-t}{1+t}\right];$$

ce groupe est isomorphe au groupe formé par les rotations qui font revenir sur lui-même un octaèdre régulier. Les substitutions de période 2, qui permutent les racines deux à deux, sont au nombre de quatre :

$$\left[t; \frac{1-t}{1+t}\right], \quad \left[t; \frac{1+t}{1-t}\right], \quad \left[t; \frac{i}{t}\right], \quad \left[t; \frac{-i}{t}\right].$$

A chacune d'elles correspondent deux intégrales de première espèce, n'ayant que deux périodes distinctes,

$$\int \frac{(t \pm 1 \pm \sqrt{2}) dt}{\sqrt{t(t^4 - 1)}}, \quad \int \frac{(t \pm e^{\pm \frac{\pi i}{4}}) dt}{\sqrt{t(t^4 - 1)}}.$$

D'après un théorème dû à M. Poincaré, on en conclut qu'il y aura une infinité d'intégrales de la forme

$$\int \frac{(xt + \beta) dt}{\sqrt{t(t^4 - 1)}},$$

n'ayant que deux périodes distinctes.

Théorèmes sur les déterminants; par M. A.-H. ANGLIN.

(Séance du 2 mars 1887.)

Dans un Mémoire intitulé : *Sur le coefficient du terme général dans certains développements*, publié dans le *Journal de Mathématiques*, t. II, fascicule II, 1885, figurent divers résultats obtenus en partant d'un théorème fondamental. L'objet de ce

Mémoire est de généraliser ce théorème, en exprimant les résultats sous forme de déterminants.

Le théorème en question établit la formule

$$a^n(b-c) + b^n(c-a) + c^n(a-b) = k h_{n-2},$$

où k représente $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ et h_n la somme (y compris les puissances) des produits homogènes de degré n des lettres a, b, c .

1. Avant de procéder à la recherche proposée, il est nécessaire de démontrer le lemme suivant, auquel on aura fréquemment recours :

Si h_n représente la somme (y compris les puissances) des produits homogènes, de degré n , des lettres $a, b, c, \dots, l$, h'_n représentant la somme analogue des produits homogènes, de degré n , de $b, c, d, \dots, l$, on a

$$h'_n = h_n - ah_{n-1}.$$

La démonstration très simple peut être présentée ainsi.

Nous avons

$$\begin{aligned} h_n &= a^n + a^{n-1}h'_1 + a^{n-2}h'_2 + \dots + a^2h'_{n-2} + ah'_{n-1} + h'_n \\ &= a[a^{n-1} + a^{n-2}h'_1 + a^{n-3}h'_2 + \dots + ah'_{n-2} + h'_{n-1}] + h'_n \\ &= ah_{n-1} + h'_n, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(A) \quad h'_n = h_n - ah_{n-1}.$$

2. Introduisant dans le théorème fondamental rappelé plus haut la notation des déterminants, nous avons

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^n \\ 1 & b & b^n \\ 1 & c & c^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} h_{n-2},$$

ce qui peut s'écrire plus simplement

$$| a^0 \quad b^1 \quad c^n | = | a^0 \quad b^1 \quad c^2 | h_{n-2},$$

ou, en observant que $| a^0, b^1, c^2 |$ est égal au produit des diffé-

rences de a, b, c , deux à deux,

$$(1) \quad | a^0 \ b^1 \ c^n | = [a \ b \ c] h_{n-2}.$$

La valeur de

$$| a^0 \ b^p \ c^q |$$

peut être aisément déduite des résultats (A) et (1); on trouve ainsi

$$| a^0 \ b^p \ c^q | = [a \ b \ c] (h_{p-1} h_{q-2} - h_{p-2} h_{q-1}),$$

ce qu'on peut écrire sous la forme

$$| a^0 \ b^p \ c^q | = [a \ b \ c] \begin{vmatrix} p-1 & p-2 \\ q-1 & q-2 \end{vmatrix}$$

ou, d'une façon plus concise,

$$(2) \quad | a^0 \ b^p \ c^q | = [a \ b \ c] | p-1 \ q-2 |.$$

Pour plus de simplicité, toutes les quantités, telles que h_n , sont représentées par l'indice n .

3. On obtient des résultats analogues dans le cas de quatre et cinq lettres; mais, pour plus de clarté et afin de mettre en lumière le principe sur lequel repose la démonstration des résultats dans le cas général, nous ferons d'abord l'application au cas de quatre lettres.

Nous avons

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)(1-dx)} = 1 + h_1 x + h_2 x^2 + \dots + h_n x^n + \dots$$

où h_n représente la somme des produits homogènes de degré n de a, b, c, d .

Mais on voit facilement que

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)(1-dx)} = \frac{A}{1-ax} + \frac{B}{1-bx} + \frac{C}{1-cx} + \frac{D}{1-dx}$$

où

$$A = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)}, \quad \dots, \quad D = \frac{d^3}{(d-a)(d-b)(d-c)},$$

et ainsi

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)} (1-ax)^{-1} + \dots = 1 + h_1 x + \dots + h_n x^n + \dots$$

Le dénominateur commun du premier membre de cette équation est le produit des différences, deux à deux, de a, b, c, d , que nous pouvons représenter par $[a \ b \ c \ d]$; en réduisant, nous avons

$$\begin{aligned} & a^3[b \ c \ d](1-ax)^{-1} - b^3[a \ c \ d](1-bx)^{-1} \\ & + c^3[a \ b \ d](1-cx)^{-1} - d^3[a \ b \ c](1-dx)^{-1} \\ & = [a \ b \ c \ d](1+h_1x+h_2x^2+\dots+h_nx^n+\dots). \end{aligned}$$

Développant et égalant les termes constants dans les deux membres,

$$|a^0 \ b^1 \ c^2 \ d^3| = [a \ b \ c \ d].$$

De même, égalant les coefficients des termes de même degré, nous avons une série de résultats analogues dont la forme générale est

$$a^n[b \ c \ d] - \dots - d^n[a \ b \ c] = [a \ b \ c \ d]h_{n-1},$$

c'est-à-dire

$$(3) \quad |a^0 \ b^1 \ c^2 \ d^n| = [a \ b \ c \ d]h_{n-1}.$$

Pour trouver la valeur de

$$|a^0 \ b^1 \ c^q \ d^r|,$$

remarquons que l'on a

$$|a^0 \ b^1 \ c^q \ d^r| = a^r |b^0 \ c^1 \ d^q| - \dots - d^r |a^0 \ b^1 \ c^q|$$

ou

$$|a^0 \ b^1 \ c^q \ d^r| = a^r [b \ c \ d]h'_{q-2} - \dots - d^r [a \ b \ c]h'_{q-2},$$

en partant du résultat (1).

Dans cette égalité, h' se rapporte aux lettres b, c, d , dans le premier terme, et aux lettres a, b, c , dans le dernier.

Partant de la formule (A), pour passer de h' à h et arrangeant les termes, nous avons

$$\begin{aligned} & \{a^r [b \ c \ d] - \dots - d^r [a \ b \ c]\} h_{q-2} \\ & - \{a^{r+1} [b \ c \ d] - \dots - d^{r+1} [a \ b \ c]\} h_{q-3} \\ & = |a^0 \ b^1 \ c^2 \ d^r| h_{q-2} - |a^0 \ b^1 \ c^2 \ d^{r+1}| h_{q-3} \end{aligned}$$

ou, d'après (3),

$$= [a \ b \ c \ d] (h_{q-2} h_{r-3} - h_{q-3} h_{r-2}),$$

$$= [a \ b \ c \ d] \begin{vmatrix} q-2 & q-3 \\ r-2 & r-3 \end{vmatrix}$$

et ainsi

$$(4) \quad |a^0 \ b^1 \ c^q \ d^r| = [a \ b \ c \ d] |q-2 \ r-3|.$$

De même, nous trouvons la valeur de

$$|a^0 \ b^p \ c^q \ d^r|.$$

En développant, comme plus haut, nous avons

$$|a^0 \ b^p \ c^q \ d^r| = a^r |b^0 \ c^p \ d^q| - \dots$$

$$= a^r [b \ c \ d] \begin{vmatrix} p-1 & p-2 \\ q-1 & q-2 \end{vmatrix}' - \dots,$$

grâce à la formule (2).

L'indice ' du déterminant se rapporte aux lettres b, c, d .

Revenant de h' à h , par la relation (1), et réduisant par un théorème connu de la théorie des déterminants, nous avons

$$a^r [b \ c \ d] \left\{ \begin{vmatrix} p-1 & p-2 \\ q-1 & q-2 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} p-1 & p-3 \\ q-1 & q-3 \end{vmatrix} + a^2 \begin{vmatrix} p-2 & p-3 \\ q-2 & q-3 \end{vmatrix} \right\} - \dots$$

$$= |p-1 \ q-2| \{ a^r [b \ c \ d] - \dots \} - |p-1 \ q-3| \{ a^{r+1} [b \ c \ d] - \dots \}$$

$$+ |p-2 \ q-3| \{ a^{r+2} [b \ c \ d] - \dots \}$$

$$= |p-1 \ q-2| |a^0 \ b^1 \ c^2 \ d^r| - |p-1 \ q-3| |a^0 \ b^1 \ c^2 \ d^{r+1}|$$

$$+ |p-2 \ q-3| |a^0 \ b^1 \ c^2 \ d^{r+2}|$$

$$= [a \ b \ c \ d] |p-1 \ q-2| h_{r-3} - [a \ b \ c \ d] |p-1 \ q-3| h_{r-2}$$

$$+ [a \ b \ c \ d] |p-2 \ q-3| h_{r-1}$$

$$= [a \ b \ c \ d] \begin{vmatrix} p-1 & p-2 & p-3 \\ q-1 & q-2 & q-3 \\ r-1 & r-2 & r-3 \end{vmatrix},$$

$$(5) \quad |a^0 \ b^p \ c^q \ d^r| = [a \ b \ c \ d] |p-1 \ q-2 \ r-3|.$$

D'une manière analogue, en appliquant les formules (3), (4) et (5), on déduit les résultats correspondant au cas de cinq lettres a, b, c, d, e , et l'on voit que

$$(6) \quad |a^0 \ b^1 \ c^2 \ d^3 \ e^r| = [a \ b \ c \ d \ e] h_{r-4},$$

$$(7) \quad |a^0 \ b^1 \ c^2 \ d^r \ e^s| = [a \ b \ c \ d \ e] |r-3 \ s-4|,$$

$$(8) \quad |a^0 \ b^1 \ c^q \ d^r \ e^s| = [a \ b \ c \ d \ e] |q-2 \ r-3 \ s-4|,$$

$$(9) \quad |a^0 \ b^p \ c^q \ d^r \ e^s| = [a \ b \ c \ d \ e] |p-1 \ q-2 \ r-3 \ s-4|.$$

où $[a \ b \ c \ d \ e]$ représente $|a^0 \ b^1 \ c^2 \ d^3 \ e^4|$, ou le produit des différences, deux à deux, de a, b, c, d, e , et où, dans les déterminants des seconds membres, les diagonales seulement sont écrites, c'est-à-dire que $|p-1, q-2, r-3, s-4|$ représente

$$\begin{vmatrix} p-1 & p-2 & p-3 & p-4 \\ q-1 & q-2 & q-3 & q-4 \\ r-1 & r-2 & r-3 & r-4 \\ s-1 & s-2 & s-3 & s-4 \end{vmatrix}.$$

4. Dans la recherche précédente, nous observons que, pour obtenir les résultats dans le cas de cinq lettres, nous avons utilisé ceux obtenus pour quatre lettres. Aussi, pour établir les formules correspondant au cas d'un nombre m quelconque de lettres, $a, b, c, \dots, l$, nous appliquons le principe d'induction mathématique, en supposant les résultats établis pour $m-1$.

Nous avons

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)\dots(1-lx)} = 1 + h_1x + h_2x^2 + \dots + h_nx^n + \dots,$$

où h_n représente la somme des produits homogènes de degré n de $a, b, c, \dots, l$. Mais nous avons aussi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)\dots(1-lx)} \\ &= \frac{A}{1-ax} + \frac{B}{1-bx} + \frac{C}{1-cx} \dots + \frac{L}{1-lx}, \end{aligned}$$

où

$$A = \frac{a^{m-1}}{(a-b)(a-c)\dots(a-l)},$$

$$L = \frac{l^{m-1}}{(l-a)(l-b)\dots(l-k)};$$

d'où nous tirons

$$\frac{a^{m-1}}{(a-b)(a-c)\dots(a-l)} (1-ax)^{-1} + \dots = 1 + h_1x + h_2x^2 + \dots + h_nx^n + \dots$$

Le dénominateur commun du premier membre de cette équation se compose des produits des différences, deux à deux, de $a,$

Revenant de h' à h , par la formule (A), et ordonnant,

$$(1') \quad \left\{ \begin{aligned} & \{a^z[b \ c \ d \ \dots \ l] - \dots\} h_{y-m+2} \\ & - \{a^{z+1}[b \ c \ d \ \dots \ l] - \dots\} h_{y-m+1} \\ & = | \begin{matrix} a^0 & b^1 & c^2 & \dots & k^{m-2} & l^2 \end{matrix} | h_{y-m+2} \\ & \quad - | \begin{matrix} a^0 & b^1 & c^2 & \dots & k^{m-2} & l^{z+1} \end{matrix} | h_{y-m+1} \\ & = [a \ b \ c \ \dots \ l] (h_{y-m+2} h_{z-m+1} - h_{y-m+1} h_{z-m+2}) \\ (2) \quad & = [a \ b \ c \ \dots \ l] \begin{vmatrix} y-m+2 & y-m+1 \\ z-m+2 & z-m+1 \end{vmatrix}; \end{aligned} \right.$$

donc

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & | \begin{matrix} a^0 & b^1 & c^2 & \dots & h^{m-2} & k^y & l^z \end{matrix} | \\ & = [a \ b \ c \ \dots \ l] | \begin{matrix} y-m+2 & z-m+1 \end{matrix} |. \end{aligned} \right.$$

Ensuite, pour trouver la valeur de

$$| \begin{matrix} a^0 & b^1 & c^2 & \dots & g^{m-1} & h^x & k^y & l^z \end{matrix} |,$$

développons, comme auparavant :

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} & | \begin{matrix} a^0 & b^1 & c^2 & \dots & g^{m-1} & h^x & k^y & l^z \end{matrix} | \\ & = a^z | \begin{matrix} b^0 & c^1 & d^2 & \dots & h^{m-1} & k^x & l^y \end{matrix} | - \dots \\ & = a^z [b \ c \ d \ \dots \ l] | \begin{matrix} x-m+3 & y-m+2 \end{matrix} | - \dots \end{aligned} \right.$$

Revenant de h' à h et réduisant, à l'aide d'un théorème connu de la théorie des déterminants, nous obtenons

$$\begin{aligned} a^z [b \ c \ d \ \dots \ l] & \left\{ \begin{aligned} & | \begin{matrix} x-m+3 & y-m+2 \end{matrix} | \\ & - a | \begin{matrix} x-m+3 & y-m+1 \end{matrix} | \\ & + a^2 | \begin{matrix} x-m+2 & y-m+1 \end{matrix} | \end{aligned} \right\} - \dots \end{aligned}$$

Faisant le même changement dans les autres termes des différents groupes, de façon que tous les termes du dernier soient exprimés en termes en h , nous avons, en appliquant (1),

$$\begin{aligned} & | \begin{matrix} x-m+3 & y-m+2 \end{matrix} | | \begin{matrix} a^0 & b^1 & c^2 & \dots & k^{m-2} & l^z \end{matrix} | \\ & - | \begin{matrix} x-m+3 & y-m+1 \end{matrix} | | \begin{matrix} a^0 & b^1 & c^2 & \dots & k^{m-2} & l^{z+1} \end{matrix} | \\ & + | \begin{matrix} x-m+2 & y-m+1 \end{matrix} | | \begin{matrix} a^0 & b^1 & c^2 & \dots & k^{m-2} & l^{z+2} \end{matrix} |, \end{aligned}$$

qui, par la formule (2), est égal à

$$[a \ b \ c \ \dots \ l] \begin{vmatrix} x-m+3 & x-m+2 & x-m+1 \\ y-m+3 & y-m+2 & y-m+1 \\ z-m+3 & z-m+2 & z-m+1 \end{vmatrix};$$

donc

$$(m) \left\{ \begin{array}{l} | a^0 \ b^p \ c^q \ d^r \ \dots \ l^z | \\ = [a \ b \ c \ \dots \ l] | p-1 \ q-2 \ r-3 \ \dots \ z-m+1 |, \end{array} \right.$$

qui établit la proposition dans le cas le plus général.

Sur un point de la théorie des surfaces; par M. DEMARTRES.

(Séance du 16 mars 1887.)

1. Dans une Communication précédente (19 janvier 1887), j'ai défini la flexion d'une ligne tracée sur une surface relativement à un plan donné. Je me propose d'établir ici diverses expressions de cet élément, qui, pour un choix particulier du plan de référence, se réduit, comme on le verra, à la torsion géodésique, introduite, par M. Bertrand, dans la théorie générale des surfaces.

Soient

MM' un élément de courbe tracée sur la surface;

Q, Q' les plans tangents correspondants;

$\theta, \theta + d\theta$ les angles qu'ils font avec le plan de référence fixe P;

dV l'angle des deux plans Q et Q';

$d\varphi$ l'angle que font les traces des deux plans tangents sur le plan P;

$h, h + dh$ les distances de M et de M' au plan P.

La flexion de MM', par rapport à P, est, par définition,

$$(1) \quad f = \frac{dh}{d\varphi} \frac{1}{\sin^2 \theta}.$$

Or, si nous appelons D la trace sur Q d'un plan parallèle à P et mené par M, on a d'abord

$$(2) \quad dh = MM' \sin \epsilon \sin \theta,$$

ϵ étant l'angle que θ fait avec la direction D' de la tangente MM';

d'autre part, si ϵ_1 est l'angle que fait avec D la tangente conjuguée de D', les trois plans P, Q, Q' forment un trièdre dans lequel

les deux faces $d\varphi, \epsilon_1$ sont opposées aux dièdres $\widehat{Q, Q'}, \theta + d\theta$; on

aura donc

$$(3) \quad \frac{d\varphi}{\widehat{QQ'}} = \frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \theta}.$$

Si l'on porte les valeurs (2) et (3) dans l'expression (1), on obtient la première expression de la flexion

$$(4) \quad f = \frac{MM'}{\widehat{QQ'}} \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon_1}.$$

La première conséquence à en tirer est la suivante :

La flexion d'un élément MM' n'est pas altérée lorsque le plan de référence tourne d'un angle quelconque autour de sa trace sur le plan tangent en M.

J'appellerai alors *flexion d'une direction D'*, par rapport à une direction D, celle d'un élément de courbe pris sur O' par rapport à n'importe quel plan parallèle à D, et je le désignerai, pour abréger, par le symbole (OO').

Le rapport $\frac{MM'}{\widehat{QQ'}}$ est susceptible de diverses expressions bien connues. M. Bertrand a donné la suivante :

$$\frac{\widehat{QQ'}}{MM'} = \sqrt{\frac{1}{R_1^2} \cos^2 \varphi + \frac{1}{R_2^2} \sin^2 \varphi},$$

où φ est l'inclinaison de MM' sur la direction principale de courbure $\frac{1}{R_1}$. Substituons cette valeur dans la formule (4) et désignons par ω l'inclinaison de D sur la même direction principale, nous aurons

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \omega - \varphi, & \varepsilon_1 &= \omega - \varphi_1, \\ f &= \frac{\pm \sin(\omega - \varphi)}{\sin(\omega - \varphi_1) \sqrt{\frac{1}{R_1^2} \cos^2 \varphi + \frac{1}{R_2^2} \sin^2 \varphi}}, \\ \text{tang } \varphi_1 \text{ tang } \varphi &= -\frac{R_2}{R_1}. \end{aligned}$$

Éliminons φ , il vient

$$(5) \quad f = \frac{\sin(\omega - \varphi)}{\frac{\cos \omega \cos \varphi}{R_1} - \frac{\sin \omega \sin \varphi}{R_2}} = (DD'),$$

le signe ayant été déterminé de telle sorte que $d\varphi$ soit positif lorsque la rotation s'effectue de la première direction principale vers la seconde.

On a d'autre part, d'après une formule due à M. Bonnet, en appelant $\frac{1}{R}$ la courbure normale de MM' ,

$$\frac{MM'}{\widehat{QQ'}} = R' \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon);$$

d'où cette autre expression

$$(6) \quad (D, D') = \frac{R' \sin \varepsilon \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{\sin \varepsilon_1}.$$

On peut enfin obtenir une expression où figurent les courbures normales $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R'}$ relatives aux distances D et D' . Si l'on développe l'équation (5) et qu'on y remplace $\cos \omega$, $\sin \omega$, $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ par les quantités proportionnelles $\sqrt{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R}}$, $\sqrt{\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}}$, $\sqrt{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'}}$, $\sqrt{\frac{1}{R'} - \frac{1}{R_1}}$, on obtient, après une réduction très simple,

$$(7) \quad (DD') = \frac{\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}}{\frac{1}{R'} \sqrt{\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R}\right)} + \frac{1}{R} \sqrt{\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R_1}\right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'}\right)}}.$$

2. Les expressions (4), (5), (6), (7) sont également propres à mettre en évidence un certain nombre de propositions immédiates. Nous les déduirons de la formule (5).

On voit d'abord que, si l'on échange ω et φ , l'expression trouvée change seulement de signe, en d'autres termes $(DD') + (D'D) = 0$.
Donc :

THÉORÈME 1. — *La flexion de D' par rapport à D est égale et de signe contraire à celle de D par rapport à D' .*

Il suit de là que toute propriété des flexions entraîne une propriété corrélatrice.

Si l'on fait $\varphi = 0$, on obtient $f = R_1 \tan \omega$; de même, pour $\omega = 0$, $f = -R_1 \tan \varphi$; de là un double théorème que je me dispenserai d'énoncer.

L'équation (5), sous la forme

$$(8) \quad \frac{f}{R_2} \tan \omega \tan \varphi + \tan \varphi - \tan \omega + \frac{f}{R_1} = 0,$$

donne lieu au théorème suivant :

THÉOREME II. — *A chaque direction (D) en correspond une autre D' bien déterminée, telle que (DD') ait une valeur donnée f; cette flexion restant constante, les droites D et D' engendrent deux faisceaux homographiques ayant pour rayons doubles les asymptotes de l'indicatrice au point M.*

Si l'on désigne par f, f_1 les flexions de D' par rapport à deux directions D, D₁ perpendiculaires entre elles, on obtient immédiatement la relation

$$ff_1 + (f + f_1)(R_1 - R_2) \sin \omega \cos \omega + R_1 R_2 = 0.$$

De même, l'équation

$$ff_1 + (f + f_1)(R_2 - R_1) \sin \varphi \cos \varphi + R_1 R_2 = 0$$

aura lieu entre les deux directions $\varphi, \frac{\pi}{2} + \varphi$ par rapport à une même direction D.

Supposons $\tan \omega \tan \varphi = -1$: l'équation (8) devient

$$-\frac{f}{R_2} + \frac{f}{R_1} = -\cot \varphi - \tan \varphi = \frac{-1}{\sin \varphi \cos \varphi};$$

$$f = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sin \varphi \cos \varphi;$$

on reconnaît l'expression de la torsion géodésique de la direction MM'; donc :

THÉOREME III. — *Lorsque deux directions sont rectangulaires, la flexion de l'une par rapport à l'autre a pour valeur absolue la torsion géodésique correspondante.*

Notre égalité générale $(DD') = -(D'D)$ se réduit ici à la proposition de M. Bertrand sur les torsions géodésiques de deux éléments rectangulaires; on peut la considérer comme une généralisation de la proposition en question.

Revenons à la formule (5); donnons à φ deux valeurs φ, φ_1 cor-

respondant à deux diamètres conjugués, c'est-à-dire liés par la relation

$$\operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \varphi_1 = -\frac{R_2}{R_1}.$$

On aura, en désignant par f, f_1 les flexions correspondantes, la relation suivante, indépendante de ω ,

$$ff_1 + RR_1 = 0.$$

On trouve ainsi, par une voie géométrique, l'égalité qui a fait l'objet de la Note citée plus haut; mais on peut maintenant l'énoncer de deux manières, qui correspondent à des théorèmes parfaitement distincts, et dont chacun donne une expression très générale de la courbure totale, savoir :

THÉORÈME IV. — *La courbure totale est égale et de signe contraire au produit des flexions de deux déplacements conjugués, le plan de référence étant le même et d'ailleurs quelconque.*

THÉORÈME V. — *La courbure totale est égale et de signe contraire au produit des flexions d'un même déplacement par rapport à deux plans quelconques coupant le plan tangent suivant deux diamètres conjugués de l'indicatrice.*

Sur une source d'identités; par M. MAURICE D'OCAGNE.

(Séance du 16 mars 1887.)

1. Nous avons rencontré et utilisé la formule dont il va être question ici, dans un Mémoire étendu *Sur une classe de nombres remarquables*, qui va paraître prochainement dans un autre Recueil (¹). Les nombres que nous avons étudiés dans ce Mémoire, et dont le rôle est important en Analyse, jouissent, entre autres, de certaines propriétés qui dérivent de l'identité générale dont nous allons parler. Nous renverrons donc à ce Mémoire, pour cette ap-

(¹) *American Journal of Mathematics.*

$$\begin{aligned} f_1(n) &= f(1) + f(2) + \dots + f(n), \\ f_2(n) &= f_1(1) + f_1(2) + \dots + f_1(n), \\ f_3(n) &= f_2(1) + f_2(2) + \dots + f_2(n), \\ &\dots\dots\dots, \\ f_k(n) &= f_{k-1}(1) + f_{k-1}(2) + \dots + f_{k-1}(n). \end{aligned}$$
$$f_2(n) = n f(1) + (n-1) f(2) + \dots + f(n),$$

$$f_3(n) = \frac{(n+1)n}{2} f(1) + \frac{n(n-1)}{2} f(2) + \dots + \frac{2 \cdot 1}{2} f(n).$$
$$(1) \quad f_{k+1}(n) = C_{n+k-1}^k f(1) + C_{n+k-2}^k f(2) + \dots + C_k^k f(n),$$

Telle est la formule générale, presque intuitive, on le voit, que nous avons en vue. Chaque fois que, pour une fonction $f(n)$, on pourra, par un autre procédé, calculer $f_{k+1}(n)$, la formule (1) donnera une identité; elle est donc bien, selon l'expression élégante de M. Cesaro (1), une *source d'identités*. Donnons-en quelques applications.

$$f(n) := n = C_n^1.$$

(¹) *Mathesis*, t. VI, p. 126.

Nous avons alors

$$\begin{aligned} f_1(n) &= C_1^1 + C_2^1 + \dots + C_n^1 = C_{n+1}^2, \\ f_2(n) &= C_2^2 + C_3^2 + \dots + C_{n+1}^2 = C_{n+2}^3, \\ &\dots\dots\dots, \\ f_{k+1}(n) &= C_{k+1}^{k+1} + C_{k+2}^{k+1} + \dots + C_{n+k}^{k+1} = C_{n+k+1}^{k+2}. \end{aligned}$$

La formule (1) donne donc, dans ce cas,

$$(2) \quad C_{n+k+1}^{k+2} = C_{n+k-1}^k + 2 C_{n+k-2}^k + \dots + n C_k^k.$$

4. Faisons maintenant

$$f(n) = a^{n-1}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} (a-1)f_1(n) &= a^n - 1, \\ (a-1)f_1(n-1) &= a^{n-1} - 1, \\ &\dots\dots\dots, \\ (a-1)f_1(1) &= a - 1, \end{aligned}$$

et, en faisant la somme,

$$(a-1)f_2(n) = a \frac{a^n - 1}{a - 1} - n;$$

d'où

$$\begin{aligned} (a-1)^2 f_2(n) &= a^{n+1} - a - n(a-1), \\ (a-1)^2 f_2(n-1) &= a^n - a - (n-1)(a-1), \\ &\dots\dots\dots, \\ (a-1)^2 f_2(1) &= a^2 - a - (a-1), \end{aligned}$$

et, en faisant la somme,

$$(a-1)^2 f_3(n) = a^2 \frac{a^n - 1}{a - 1} - na - \frac{(n+1)n}{1.2} (a-1)$$

ou

$$(a-1)^3 f_3(n) = a^{n+2} - a^2 - C_n^1 a(a-1) - C_{n+1}^2 (a-1)^2.$$

En continuant ainsi, de proche en proche, on arrive à la formule que voici :

$$\begin{aligned} (a-1)^{k+1} f_{k+1}(n) &= a^{n+k} - a^k - C_n^k a^{k-1} (a-1) \\ &\quad - C_{n+1}^2 a^{k-2} (a-1)^2 - \dots - C_{n+k-1}^k (a-1)^k. \end{aligned}$$

Par suite, la formule (1) donne, dans ce cas,

$$\left\{ \begin{aligned} &(a-1)^{k+1} (C_{n+k-1}^k + C_{n+k-2}^k a + \dots + C_n^k a^{n-1}) \\ &= a^{n+k} - [a^k + C_n^1 a^{k-1} (a-1) + C_{n+1}^2 a^{k-2} (a-1)^2 + \dots + C_{n+k-1}^k (a-1)^k]. \end{aligned} \right.$$

Pour $a = 2$, cette formule devient

$$(3') \quad \begin{cases} C_{n+k-1}^k + C_{n+k-2}^k 2 + \dots + C_k^k 2^{n-1} \\ = 2^{n+k} - (2^k + C_n^1 2^{k-1} + C_{n+1}^2 2^{k-2} + \dots + C_{n+k-1}^k). \end{cases}$$

Pour $a = -1$,

$$(3'') \quad \begin{cases} 2^{k+1} [C_{n+k-1}^k - C_{n+k-2}^k + \dots + (-1)^{n-1} C_k^k] \\ = (-1)^{n-1} + 1 + C_n^1 2 + C_{n+1}^2 2^2 + \dots + C_{n+k-1}^k 2^k. \end{cases}$$

5. Faisons (1)

$$f(n) = n^2.$$

On a identiquement

$$n^2 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n+1)n}{2} = C_n^2 + C_{n+1}^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} f(n) &= C_n^2 + C_{n+1}^2, \\ f(n-1) &= C_{n-1}^2 + C_n^2, \\ &\dots\dots\dots, \\ f(2) &= C_2^2 + C_3^2, \\ f(1) &= C_1^2, \end{aligned}$$

et, en faisant la somme,

$$f_1(n) = C_{n+1}^2 + C_{n+2}^2.$$

Continuant ainsi, de proche en proche, on trouve

$$f_{k+1}(n) = C_{n+k+1}^{k+3} + C_{n+k+2}^{k+3},$$

et la formule (1) donne

$$(4) \quad C_{n+k-1}^k 1^2 + C_{n+k-1}^k 2^2 + \dots + C_k^k n^2 = C_{n+k+1}^{k+3} + C_{n+k+2}^{k+3}.$$

6. Pour

$$f(n) = 2n - 1,$$

on a

$$f_1(n) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Donc la fonction f_{k+1} , correspondant à ce cas-ci, n'est autre que la fonction f_k du numéro précédent, et l'application de la for-

(1) C'est le cas général $f(n) = n^m$ que nous avons traité et utilisé dans notre Mémoire *Sur une classe de nombres remarquables*.

mule (1) donne

$$(5) \quad C_{n+k-1}^k + 3 C_{n+k-2}^k + 5 C_{n+k-3}^k + \dots + (2n-1) C_k^k = C_{n+k}^{k+2} + C_{n+k+1}^{k+2}.$$

7. Prenons maintenant

$$f(n) = (-1)^{n-1} (2n-1).$$

Nous ferons ici usage d'une formule qui se trouve démontrée dans une autre de nos Notes (1), et que voici :

$$(2) \quad \sum_{i=0}^{i=n} (a + ir) q^i = a \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + r q \frac{q^n [n(q-1) - 1] + 1}{(q-1)^2}.$$

La valeur de $f(n)$ peut s'écrire

$$f(n) = (-1)^{n-1} [1 + 2(n-1)].$$

On aura donc

$$f_1(n) = \sum_{i=0}^{i=n-1} (-1)^i (1 + 2i)$$

ou, en vertu de la formule (2), toute réduction faite,

$$f_1(n) = (-1)^{n-1} n.$$

Maintenant on a

$$f_2(n) = \sum_{i=0}^{i=n-1} (-1)^i (1 + i)$$

ou, d'après la formule (2),

$$f_2(n) = \frac{(-1)^{n-1} (2n+1) + 1}{4}$$

que nous écrirons

$$4f_2(n) = -(-1)^n (2n+1) + 1.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} 4f_3(n) &= - \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^i (2i+1) + n \\ &= - \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i (2i+1) + n + 1 \\ &= -(-1)^n (n+1) + (n+1), \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

(1) *Sur certaines sommations arithmétiques* (Jornal de Sc. math. de M. Gomes Teixeira, t. VII, p. 117). La formule en question se trouve à la page 125.

On trouve d'une manière générale

$$\begin{aligned} 4^{2p} f_{4p}(n) &= (-1)^{n+2p-1} (2n + 4p - 1) - \sum_{i=0}^{i=2p-1} (-1)^i 4^i C_{n+2p-1}^{2i} \\ 4^{2p} f_{4p+1}(n) &= (-1)^{n+2p-1} (n + 2p) - \sum_{i=0}^{i=2p-1} (-1)^i 4^i C_{n+2p+1}^{2i+1} \\ 4^{2p+1} f_{4p+2}(n) &= (-1)^{n+2p-1} (2n + 4p + 1) + \sum_{i=0}^{i=2p} (-1)^i 4^i C_{n+2p+1}^{2i} \\ 4^{2p+1} f_{4p+3}(n) &= (-1)^{n+2p-1} (n + 2p + 1) + \sum_{i=0}^{i=2p} (-1)^i 4^i C_{n+2p+1}^{2i+1}. \end{aligned}$$

Ces quatre formules peuvent être comprises en une seule. Si, en effet, nous représentons par $E\left(\frac{k}{p}\right)$ le plus grand entier contenu dans $\frac{k}{p}$, et par $R\left(\frac{k}{p}\right)$ le reste de la division de k par p , de façon que

$$k = pE\left(\frac{k}{p}\right) + R\left(\frac{k}{p}\right),$$

nous ferons observer que ces quatre formules se résument en celle-ci

$$\begin{aligned} 4^{E\left(\frac{k}{2}\right)} f_k(n) &= \frac{(-1)^{n+2E\left(\frac{k}{2}\right)-1}}{1 + R\left(\frac{k}{2}\right)} (2n + k - 1) \\ &\quad + (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^{i=E\left(\frac{k}{2}\right)-1} (-1)^{R\left(\frac{k}{2}\right)+i} 4^i C_{n+E\left(\frac{k}{2}\right)+R\left(\frac{k}{2}\right)-1+i}^{R\left(\frac{k}{2}\right)+2i} \end{aligned}$$

On a donc, par application de la formule (1),

$$(6) \left\{ \begin{aligned} &4^{E\left(\frac{k}{2}\right)} [C_{n+k-2}^{k-1} - 3C_{n+k-3}^{k-1} + 5C_{n+k-4}^{k-1} - \dots + (-1)^{n-1} (2n-1)C_{k-1}^{k-1}] \\ &= \frac{(-1)^{n+2E\left(\frac{k}{2}\right)-1}}{1 + R\left(\frac{k}{2}\right)} (2n + k - 1) \\ &\quad + (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^{i=E\left(\frac{k}{2}\right)-1} (-1)^{R\left(\frac{k}{2}\right)+i} 4^i C_{n+E\left(\frac{k}{2}\right)+R\left(\frac{k}{2}\right)-1+i}^{R\left(\frac{k}{2}\right)+2i} \end{aligned} \right.$$

Pour $k = 1$, cette formule donne

$$(6_1) \quad 1 - 3 + 5 - \dots + (-1)^{n-1}(2n-1) = (-1)^{n-1}n;$$

pour $k = 2$,

$$(6_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4[C_n^1 - 3C_{n-1}^1 + 5C_{n-2}^1 - \dots \\ + (-1)^{n-1}(2n-1)C_1^1] = (-1)^{n-1}(2n+1) + 1; \end{array} \right.$$

pour $k = 3$,

$$(6_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4[C_{n+1}^2 - 3C_n^2 + 5C_{n-1}^2 - \dots \\ + (-1)^{n-1}(2n-1)C_2^2] = (-1)^{n-1}(n+1) + C_{n+1}^1. \end{array} \right.$$

On voit que cette dernière somme est nulle si n est pair. Pour $k = 4$,

$$(6_4) \quad \left\{ \begin{array}{l} 16[C_{n+2}^3 - 3C_{n+1}^3 + 5C_n^3 - \dots \\ + (-1)^{n-1}(2n-1)C_3^3] = (-1)^{n+1}(2n+3) - 1 + 4C_{n+2}^1. \end{array} \right.$$

Ces expressions particulières sont séparément susceptibles de simplification. Prenons, par exemple, la dernière; on vérifie bien aisément que, quel que soit n , pair ou impair, on a

$$(-1)^{n+1}(2n+3) - 1 - 4C_{n+2}^1 = 8E\left(\frac{n}{2}\right) \left[E\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \right].$$

Dès lors la formule (6_4) pourra s'écrire

$$(6_4) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{n+2}^3 - 3C_{n+1}^3 + 5C_n^3 - \dots \\ + (-1)^{n-1}(2n-1)C_3^3 = \frac{E\left(\frac{n}{2}\right) \left[E\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \right]}{2} = C_{E\left(\frac{n}{2}\right)+1}^2. \end{array} \right.$$

Ne quittons pas la fonction $f(n) = (-1)^{n-1}(2n-1)$ sans faire à son égard une autre remarque. L'expression ci-dessus calculée pour $f_2(n)$ montre que

$$4f_2(n) + f(n+1) = 1;$$

de même

$$4f_2(n-1) + f(n) = 1,$$

$$4f_2(n-2) + f(n-1) = 1,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$4f_2(1) + f(2) = 1,$$

$$f(1) = 1,$$

Additionnant ces $n+1$ égalités, on a

$$4f_3(n) + f_1(n+1) = C_{n+1}^1.$$

Le même calcul, continué de proche en proche, conduit à ce

résultat

$$4f_{k+1}(n) + f_{k-1}(n+1) = C_{n+k-1}^{k-1},$$

et, par application de la formule (1),

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} 4[C_{n+k-1}^k - 3C_{n+k-2}^k + \dots + (-1)^{n-1}(2n-1)C_k^k] \\ + [C_{n+k-2}^{k-1} - 3C_{n+k-3}^{k-1} + \dots + (-1)^n(2n+1)C_{k-1}^{k-1}] \end{array} \right\} = C_{n+k-1}^{k-1}.$$

8. Faisons maintenant

$$f(n) = \sin n\omega.$$

En vertu d'une formule bien connue, on a

$$f_1(n) = \sin \omega + \sin 2\omega + \dots + \sin n\omega = \frac{\cos \frac{\omega}{2} - \cos \left(\frac{\omega}{2} + n\omega \right)}{2 \sin \frac{\omega}{2}}$$

ou

$$2 \sin \frac{\omega}{2} f_1(n) - \cos \frac{\omega}{2} = -\cos \left(\frac{\omega}{2} + n\omega \right).$$

Remplaçant dans cette formule n par $1, 2, 3, \dots, n$ et faisant la somme, en appliquant, pour avoir la valeur du second membre, la formule de la somme des cosinus d'arcs en progression arithmétique, on a

$$2 \sin \frac{\omega}{2} f_2(n) - C_n^1 \cos \frac{\omega}{2} = -\frac{\sin(n+1)\omega - \sin \omega}{2 \sin \frac{\omega}{2}}$$

ou

$$\left(2 \sin \frac{\omega}{2} \right)^2 f_2(n) - C_n^1 \cos \frac{\omega}{2} 2 \sin \frac{\omega}{2} - \sin \omega = -\sin \left(2 \frac{\omega}{2} + n\omega \right).$$

On obtient de même, de proche en proche,

$$\begin{aligned} \left(2 \sin \frac{\omega}{2} \right)^3 f_3(n) - C_{n+1}^2 \cos \frac{\omega}{2} \left(2 \sin \frac{\omega}{2} \right)^2 \\ - C_n^1 \sin \omega \left(2 \sin \frac{\omega}{2} \right) + \cos \frac{3\omega}{2} = \cos \left(3 \frac{\omega}{2} + n\omega \right) \end{aligned}$$

.....

$$\left(2 \sin \frac{\omega}{2} \right)^{k+1} f_{k+1}(n)$$

$$- \sum_{i=0}^{i=k} (-1)^i C_{n+k-1-i}^{k-i} \cos \left[\frac{i\pi}{2} + \frac{(i+1)\omega}{2} \right] \left(2 \sin \frac{\omega}{2} \right)^{k-i}$$

$$= \cos \left[(k+2) \frac{\pi}{2} - (k+1) \frac{\omega}{2} - n\omega \right].$$

La formule (1) donne alors

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(2 \sin \frac{\omega}{2} \right)^{k+1} \sum_{i=1}^{i=n} C_{n+k-i}^k \sin \omega \\ & - \sum_{i=0}^{i=k} (-1)^i C_{n+k-1-i}^{k-i} \cos \left[\frac{i\pi}{2} + \frac{(i-1)\omega}{2} \right] \left(2 \sin \frac{\omega}{2} \right)^{k-i} \\ & = \cos \left[(k+2) \frac{\pi}{2} - (k+1) \frac{\omega}{2} - n\omega \right]. \end{aligned} \right.$$

9. Faisons enfin

$$f(n) = u_n,$$

u_n étant le $n^{\text{ième}}$ terme de la série de Fibonacci,

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

En vertu d'une formule démontrée de différentes façons par M. Ed. Lucas (1) et par nous-même (2), on a

$$f_1(n) = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+1} - 1.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f_1(n) &= u_{n+1} - 1, \\ f_1(n+1) &= u_{n+2} - 1, \\ &\dots\dots\dots, \\ f_1(1) &= u_2 - 1, \end{aligned}$$

et, en faisant la somme,

$$\begin{aligned} f_2(n) &= f_1(n+2) - f_1(2) - n \\ &= u_{n+3} - 1 - u_2 - 1 - n \\ &= u_{n+3} - u_2 - nu_2. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} f_2(n) &= u_{n+3} - u_2 - nu_2, \\ f_2(n-1) &= u_{n+2} - u_2 - (n-1)u_2, \\ &\dots\dots\dots, \\ f_2(1) &= u_3 - u_2 - u_2, \end{aligned}$$

(1) *Sur la théorie des fonctions numériques simplement périodiques*, p. 20 (Extrait des t. III et IV de la *Nouvelle Correspondance mathématique*).

(2) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XIV, p. 24, formule (4) du Mémoire *Sur une suite récurrente*.

et, en additionnant,

$$\begin{aligned} f_3(n) &= f(n+4) - f(4) - C_n^1 u_4 - C_{n+1}^2 u_2 \\ &= u_{n+6} - 1 - u_6 + 1 - C_n^1 u_4 - C_{n+1}^2 u_2 \\ &= u_{n+6} - u_6 - C_n^1 u_4 - C_{n+1}^2 u_2. \end{aligned}$$

Continuant ainsi, de proche en proche, on arrive à cette formule

$$f_{k+1}(n) = u_{n+2(k+1)} - u_{2(k+1)} - C_n^1 u_{2k} - C_{n+1}^2 u_{2(k-1)} - \dots - C_{n+k-1}^k u_2.$$

La formule (1) donne donc alors

$$\begin{aligned} u_{n+2(k+1)} - u_{2(k+1)} - C_n^1 u_{2k} - C_{n+1}^2 u_{2(k-1)} - \dots - C_{n+k-1}^k u_2 \\ = C_{n+k-1}^k u_1 + C_{n+k-2}^k u_2 + \dots + C_n^k u_n \end{aligned}$$

ou

$$(9) \quad u_{n+2(k+1)} = \sum_{i=0}^{i=k} C_{n+i-1}^i u_{2(k+1-i)} + \sum_{i=1}^{i=n} C_{n+k-i}^k u_i.$$

La formule qui donne $f_2(n)$, obtenue plus haut, peut s'écrire

$$f_2(n) = f_1(n+1) + u_{n+2} - (n+2),$$

donc

$$\begin{aligned} f_2(n-1) &= f_1(n) + u_{n+1} - (n+1), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$f_2(1) = f_1(2) + u_3 - 3,$$

en outre

$$0 = f_1(1) + u_2 - 2,$$

$$0 = u_1 - 1.$$

Faisant la somme,

$$f_3(n) = f_2(n+1) + f_1(n+2) - C_{n+3}^2.$$

Continuant, de proche en proche, on arrive à

$$C_{i+k-1}^k = f_{k-1}(n+2) + f_k(n+1) - f_{k+1}(n);$$

et la formule (1) donne

$$C_{n+k+1}^k = \sum_{i=1}^{i=n+2} C_{n+k-i}^{k-2} u_i + \sum_{i=1}^{i=n+1} C_{n+k-i}^{k-1} u_i - \sum_{i=1}^{i=n} C_{n+k-i}^k u_i$$



ou, en remarquant que

$$C_{n+k-i}^{k-2} + C_{n+k-i}^{k-1} = C_{n+k+1-i}^{k-1}; \quad \text{et que } C_{\mu}^{\nu} = 0 \quad \text{pour } \nu > \mu,$$

$$(10) \quad C_{n+k+1}^k = \sum_{i=1}^{i=n+2} (C_{n+k+1-i}^{k-1} - C_{n+k-i}^k) u_i.$$

Les quelques exemples qui précèdent, joints à ceux que contient notre Mémoire cité en commençant, suffiront sans doute à faire ressortir la fécondité de la source d'identités (1) qui conduit, on le voit, à d'intéressants exercices de calcul algébrique.

Intégration d'une suite récurrente qui se présente dans une question de probabilité; par M. MAURICE D'OCAGNE.

(Séance du 16 mars 1887.)

M. Weill s'est proposé de résoudre le problème suivant (1) :

Étant considérés k événements différents, également probables, et p épreuves consécutives, quelle est la probabilité X(p) qu'un des événements considérés et désigné se produise au moins deux fois de suite dans l'ensemble des p épreuves ?

Par un raisonnement ingénieux, M. Weill établit que X(p) est donnée, par voie récurrente, par la formule

$$(1) \quad X(p) = \frac{k-1}{k} X(p-1) + \frac{k-1}{k^2} X(p-2) + \frac{1}{k^2},$$

et il ajoute :

« L'expression de X(p) est de la forme

$$C \alpha^p + C' \beta^p - \frac{1}{k^2 - 1},$$

α , β , C, C' étant des constantes que l'on sait déterminer par la méthode de Lagrange. »

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XIV, p. 158.

Nous allons intégrer l'équation récurrente (1) par une autre méthode que nous avons donnée dans notre *Théorie élémentaire des séries récurrentes* (1).

Comme on a évidemment

$$X(0) = 0, \quad X(1) = 0,$$

$X(p)$ sera donnée, en vertu de nos formules (2), par

$$X(p) = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{i=p-1} u_i,$$

u_i étant le $i^{\text{ème}}$ terme de la suite

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \\ u_i = \frac{k-1}{k} u_{i-1} + \frac{k-1}{k^2} u_{i-2}.$$

Or on a (3), en représentant par $E\left(\frac{p}{2}\right)$ la partie entière de $\frac{p}{2}$,

$$u_i = \frac{(k-1)^{i-1}}{k^{i-1}} + C_{i-2}^1 \frac{(k-1)^{i-2}}{k^{i-1}} + C_{i-3}^2 \frac{(k-1)^{i-3}}{k^{i-1}} + \dots \\ + C_{E\left(\frac{i}{2}\right)}^{i-E\left(\frac{i}{2}\right)-1} \frac{(k-1)^{E\left(\frac{i}{2}\right)}}{k^{i-1}}.$$

Effectuant alors la somme $\sum_{i=1}^{i=p-1} u_i$ et multipliant par $\frac{1}{k^2}$, on obtient

$$X(p) = \frac{1}{k^2} \sum_{\mu=0}^{\mu=E\left(\frac{p}{2}\right)-1} \left[\left(\frac{k-1}{k^2} \right)^{\mu} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-2-(\mu+1)} C_{\mu+\lambda}^{\mu} \left(\frac{k-1}{k} \right)^{\lambda} \right].$$

Telle est la formule que nous nous proposons d'établir et qui donne explicitement la probabilité $X(p)$ en fonction de p et de k . Elle complète la solution de M. Weill.

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3^e série, t. III, 1884, p. 65.

(2) *Loc. cit.*, § 37.

(3) *Loc. cit.*, § 8, formule (8).

Une méthode graphique de quadrature;
par M. ED. COLLIGNON (1).

(Séance du 6 avril 1887.)

L'aire d'une courbe, $\int_b^a y dx$, peut être regardée comme exprimant la somme des moments, pris par rapport à l'axe des abscisses, d'éléments de masse dx parallèles à cet axe et éloignés à la distance y . Cette considération conduit à appliquer à l'évaluation des aires le procédé connu de construction du centre de gravité d'un système de points : on détermine ainsi l'ordonnée moyenne

$$y_1 = \frac{\int_a^b y dx}{b - a},$$

qui, multipliée par la base totale $b - a$, fait connaître l'aire cherchée.

S'il s'agit, par exemple, de trouver la somme des surfaces d'une série de trapèzes juxtaposés, I, II, III, ..., dont les bases occupent des tronçons contigus sur l'axe des abscisses, on prendra les milieux 1, 2, 3, ... des côtés supérieurs de ces trapèzes, dans l'ordre où ils se succèdent; on joindra les points 1 et 2 par une droite qui coupe en un point α l'ordonnée commune aux deux trapèzes I et II; on retournera bout pour bout la droite 12; le point α vient tomber, par suite de ce retournement, en un point (12), dont l'ordonnée, multipliée par la somme des bases des trapèzes I et II, donnera la somme des deux surfaces. L'opération, répétée autant de fois qu'il sera nécessaire, en joignant les points (12) et 3, puis (123) et 4, etc., fera connaître successivement les points (123), (1234), ..., dont les ordonnées, multipliées respectivement par la somme des bases correspondantes, donneront les aires cumulées des trois premiers trapèzes, des quatre premiers, etc.

Dans certains cas on est conduit à admettre des aires nulles ou négatives; la méthode est générale, pourvu qu'on tienne compte

(1) Voir *Annales des Ponts et Chaussées*, janvier 1887.

des signes. Les aires nulles servent, soit à changer la base de la ligne, pour simplifier l'évaluation définitive de l'aire, soit à rattacher l'une à l'autre deux aires non contiguës, aboutissant toutes deux à l'axe des abscisses.

L'évaluation des aires fermées, telles que les profils en travers, la recherche du rayon moyen de la section transversale d'un canal, la détermination de la moyenne d'un certain nombre de quantités, sans passer par le total de ces quantités, s'effectuent très aisément par l'emploi de la méthode. Le tracé d'une ligne droite de compensation à travers un profil accidenté se ramène immédiatement aux mêmes principes.

Appliquée à la quadrature des courbes, la méthode réduit à une construction graphique très simple l'emploi de la règle de Thomas Simpson. La vérification en a été faite sur la parabole, la cycloïde, l'hyperbole équilatère, etc.

Appliquée à diverses figures géométriques, elle conduit à des théorèmes qu'il serait peut-être assez difficile de démontrer directement.

On en a fait usage pour déduire la courbe de la vie moyenne de la courbe de mortalité.

En résumé, la méthode graphique que nous venons d'exposer nous paraît simple et rapide. Elle a, croyons-nous, toute l'exactitude qu'on peut attendre des constructions géométriques, tout en n'exigeant que l'emploi des instruments les plus élémentaires.

Remarque sur certains déterminants numériques;
par M. G. FOURET.

(Séance du 20 avril 1887.)

Dans une Communication récente, *sur un mode de transformation des déterminants* ⁽¹⁾, j'ai eu besoin de trouver la valeur de certains déterminants numériques présentant une forme assez re-

⁽¹⁾ *Bulletin*, t. XIV, p. 146.



marquable, et j'ai donné les résultats auxquels j'étais arrivé très simplement, sans rien préjuger d'ailleurs quant à leur nouveauté. Depuis, j'ai constaté que M. Catalan s'était occupé, en 1846, de questions analogues, dans un intéressant Mémoire ayant pour titre : *Recherches sur les déterminants* ⁽¹⁾. Parmi les applications, que donne l'auteur, d'une méthode générale pour obtenir la valeur de certains déterminants numériques, se trouve un déterminant qui comprend, comme cas particulier, celui que j'ai appelé C_n dans la Note rappelée plus haut.

Le déterminant considéré par M. Catalan est de la forme

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & +1 & +1 & \dots & +1 \\ +1 & -1 & \dots & -1 & -1 & +1 & \dots & +1 \\ +1 & +1 & \dots & -1 & -1 & -1 & \dots & +1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & +1 & +1 & +1 & \dots & -1 \end{vmatrix}.$$

Si l'on désigne par n l'ordre de ce déterminant, sa première ligne horizontale est composée de $p < \frac{n}{2}$ éléments égaux à -1 , suivis de $n - p$ éléments égaux à $+1$. Les lignes suivantes se déduisent de la première par permutations circulaires.

La valeur de ce déterminant, obtenue par M. Catalan, est

$$(n - 2p)(-2)^{n-1}.$$

Celui que j'avais eu à évaluer correspond au cas particulier où p est égal à l'unité : sa valeur numérique est $(n - 2)(-2)^{n-1}$.

Le Mémoire de M. Catalan, publié à une époque où la connaissance des déterminants était encore peu répandue, contient d'ailleurs d'autres résultats dignes de remarque.

⁽¹⁾ *Bulletin de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*, t. XIII, 2^e Partie, p. 534.

Sur les fonctions hyperfuchsienues provenant des séries hypergéométriques de deux variables; par M. ÉMILE PICARD.

(Séance du 20 avril 1887.)

On sait que les intégrales

$$\int_g^h u^{b_1-1} (u-1)^{b_1-1} (u-x)^{\mu-1} (u-y)^{\lambda-1} du,$$

où g et h désignent deux des quantités $0, 1, x, y$ et ∞ , satisfont à un système s de trois équations linéaires aux dérivées partielles, ayant trois solutions communes linéairement indépendantes. Soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ trois solutions; j'ai considéré précédemment (*Annales de l'École Normale*, 1885) les équations

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = u, \quad \frac{\omega_2}{\omega_3} = v$$

et montré qu'elles donnent pour x et y des fonctions uniformes de u et v , quand $\lambda + b_1 - 1$ et les expressions analogues, ainsi que $2 - \lambda - b_1 - b_2$ et ses analogues, étaient les inverses de nombres entiers. (Je me suis borné dans mon Mémoire au cas de nombres entiers positifs, mais c'est là une restriction inutile.)

J'ai cité dans mon travail deux cas particuliers; j'avais fait précédemment du premier une étude complète, et le second, qui correspond à

$$\lambda = \mu = b_1 = b_2 = \frac{5}{5},$$

nous a donné le premier exemple d'un groupe hyperfuchsien dans lequel le domaine ou *polyèdre* fondamental est tout entier à l'intérieur de l'hypersphère limite, c'est-à-dire que sa *surface* n'a pas de points communs avec celle de l'hypersphère.

Voici deux autres exemples, où se présente encore cette circonstance remarquable.

Le premier est donné par

$$\lambda = \mu = b_1 = b_2 = \frac{5}{8};$$

on voit que dans ce cas $\lambda + b_1 - 1 = \frac{1}{4}$, ainsi que toutes les

combinaisons analogues, puisque les nombres sont égaux. On aura pareillement $2 - \lambda - b_1 - b_2 = \frac{1}{8}$.

Aucun des développements à employer ne contiendra alors de logarithmes et l'on peut en conclure (Mémoire cité) que la surface du polyèdre fondamental n'a aucun point commun avec la surface de l'hypersphère limite.

Le second exemple correspond à

$$\lambda = \mu = b_1 = b_2 = \frac{5}{9}$$

pour lequel on a

$$\lambda + b_1 - 1 = \frac{1}{9}$$

et

$$2 - \lambda - b_1 - b_2 = \frac{1}{3}.$$

Citons un troisième exemple

$$\lambda = \mu = b_1 = \frac{3}{4}, \quad b_2 = \frac{1}{4};$$

mais ici nous ne serons plus dans le même cas que pour les exemples précédents; le polyèdre fondamental du groupe hyperfuchsien aura un certain nombre de points communs avec la surface de l'hypersphère.

Pour ce qui concerne l'étude des fonctions hyperfuchsiennes qui précèdent, un des points les plus importants de la théorie des séries hypergéométriques de deux variables consiste dans le théorème suivant. On peut associer à tout système S, correspondant à une intégrale hypergéométrique, une forme quadratique ternaire à indéterminées conjuguées, qui ne change pas quand on effectue sur les variables les substitutions du *groupe* du système S. C'est ce que j'ai démontré (*loc. cit.*). Le discriminant de cette forme est, en général, différent de zéro, et, dans les cas qui donnent des fonctions hyperfuchsiennes, la forme est indéfinie et donne la limite de l'espace dans lequel les fonctions sont définies. Ceci posé, je me suis demandé si l'on ne pourrait pas trouver des cas où les conditions relatives aux différences telles que

$$\lambda + b_1 - 1$$

et

$$2 - \lambda - b_1 - b_2$$

seraient vérifiées, et pour lesquels le discriminant de la forme ternaire serait nul. Un exemple d'un pareil cas nous sera donné

par

$$\lambda = \mu = b_1 = b_2 = \frac{3}{4}.$$

Ici, comme dans tous les cas où $\lambda + \mu + b_1 + b_2 = 3$, une des intégrales du système S se réduit à une constante; c'est ce que l'on reconnaît de suite, puisque les termes en z disparaissent dans les trois équations.

Cherchons ce que devient dans ce cas la forme quadratique ternaire dont j'ai parlé plus haut. Je vais, à cet effet, appliquer les formules données d'une manière générale dans mon Mémoire. Soit $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ le système fondamental d'intégrales dont je suis parti. Nous écrirons la forme comme il suit

$$\begin{aligned} & A\omega_1\omega_1^0 + A'\omega_2\omega_2^0 + A''\omega_3\omega_3^0 + B''\omega_1\omega_2^0 + B_0''\omega_1^0\omega_2 \\ & + B'\omega_1\omega_3^0 + B_0'\omega_1^0\omega_3 + B\omega_2\omega_3^0 + B_0\omega_2^0\omega_3, \end{aligned}$$

ω_i et ω_i^0 désignant évidemment des variables conjuguées, B et B_0 étant des coefficients conjugués.

On a, par l'application des formules générales,

$$A = 1, \quad A' = 2, \quad A'' = 1, \quad B = 1 + i, \quad B' = -i, \quad B'' = -(1 + i)$$

et l'on voit alors immédiatement que la forme précédente se réduit à

$$\text{norme}[\omega_1 - (1 - i)\omega_2 + i\omega_3].$$

La forme de ce résultat si simple était aisée à prévoir; car une combinaison linéaire et homogène de ω_1, ω_2 et ω_3 devant se réduire à une constante, la forme quadratique devait être nécessairement la norme d'une expression linéaire et homogène en ω_1, ω_2 et ω_3 . Dans le cas actuel ce sera évidemment $\omega_1 - (1 - i)\omega_2 + i\omega_3$ qui se réduira à une constante.

Nous n'avons à considérer que deux des expressions ω , soient ω_1 et ω_3 ; mais, pour pouvoir appliquer de suite nos formules générales, considérons les quotients

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_1 - (1 - i)\omega_2 + i\omega_3}, \quad v = \frac{\omega_3}{\omega_1 - (1 - i)\omega_2 + i\omega_3}.$$

Cherchons ce que deviennent u et v quand on effectue sur les ω les substitutions du groupe du système S. Je me borne à transcrire les substitutions désignées d'une manière générale (*loc. cit.*) par $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ et qui proviennent, γ étant laissé constant, de la circulation de x autour des points 0, 1 et γ .

En appliquant les formules, on aura tout de suite

$$\Sigma_1 \begin{cases} u' = -u, \\ v' = v, \end{cases} \quad \Sigma_2 \begin{cases} u' = -iv + 1, \\ v' = ui - i, \end{cases} \quad \Sigma_3 \begin{cases} u' = v + 1, \\ v' = u - 1; \end{cases}$$

je tirerai de ces formules une remarque importante. Une combinaison très simple des trois substitutions précédentes nous donne la substitution

$$(1) \quad \begin{cases} u' = u - 4i, \\ v' = v, \end{cases}$$

et une seconde combinaison donne sans peine la substitution

$$(2) \quad \begin{cases} u' = u + 4, \\ v' = v. \end{cases}$$

Ceci posé, revenons à u et v considérées comme fonctions de x et y . Elles restent finies pour toute valeur de x et y , et de plus les conditions relatives à

$$\lambda + b_1 - 1 \quad \text{et} \quad 2 - \lambda - b_1 - b_2$$

étant remplies, les deux équations

$$u(x, y) = z, \quad v(x, y) = t$$

donneront pour x et y des fonctions uniformes de z et t , définies pour toutes valeurs finies des variables complexes z et t .

Quelle sera la nature de ces fonctions uniformes? Les substitutions (1) et (2) nous montrent tout de suite que x et y seront des fonctions uniformes de z , admettant les deux périodes $+4$ et $4i$. La considération des autres substitutions fondamentales du groupe que je n'ai pas écrites nous montrerait de même, ce qui est d'ailleurs évident par raison de symétrie, que x et y sont également doublement périodiques par rapport à la seconde variable t .

Ainsi, dans le cas particulier qui nous occupe, les fonctions hyperfuchsienues dégénèrent en fonctions uniformes de z et t , *doublement périodiques séparément* par rapport à chacune de ces variables.

M. Goursat avait de son côté rencontré ce cas particulier, comme on peut le voir dans les *Comptes rendus* (28 mars 1887). D'après ce qui précède, l'inversion des équations (3) se ramènera non

seulement à des fonctions Θ de deux variables, mais même à des fonctions Θ d'une seule variable.

Il ne serait peut-être pas sans intérêt de rechercher s'il existe des dégénérescences moins particulières que celle qui vient d'être indiquée. Dans notre exemple, la forme quadratique ternaire de discriminant nul se réduit au seul terme UU_0 ; il n'est pas impossible qu'on puisse rencontrer un cas où, les autres conditions étant d'ailleurs remplies, la forme quadratique ternaire aurait la forme moins particulière

$$\alpha UU_0 + \beta VV_0.$$

On aurait alors des fonctions hyperfuchsiennes de u et v , pour lesquelles le groupe des substitutions aurait la forme

$$\left(u, \quad v, \quad \frac{au+b}{cu+d}, \quad \frac{cv+a'u+b'}{cu+d} \right)$$

Remarque sur les groupes linéaires d'ordre fini à trois variables; par M. É. PICARD.

(Séance du 20 avril 1887.)

Considérons d'abord un groupe linéaire G d'ordre fini à deux variables, dont une substitution quelconque sera représentée par

$$(x, y, \alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y).$$

On peut remarquer qu'il existe une forme quadratique binaire à indéterminées conjuguées

$$(1) \quad Ax x_0 + B x y_0 + B_0 x_0 y + C y y_0$$

(A et C étant réels, B et B_0 ainsi que x, x_0 et y, y_0 étant respectivement des imaginaires conjuguées), qui se transforme en elle-même quand on effectue sur x et y les substitutions du groupe G ; on effectue bien entendu, sur x_0 et y_0 , la substitution

$$(x_0, y_0, \alpha_0 x_0 + \beta_0 y_0, \gamma_0 x_0 + \delta_0 y_0),$$

dont les coefficients sont respectivement conjugués de ceux de la première.

Tous les groupes linéaires d'ordre fini à deux variables pouvant être obtenus en particulierisant les constantes qui figurent dans l'équation linéaire du second ordre de la série hypergéométrique, cette remarque n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus général que j'ai indiqué autrefois (*Annales de l'École Normale*, 1885) sur le groupe hypergéométrique, et que je prends la liberté de rappeler. Désignant par

$$\int_g^h u^{b_1-1} (u-1)^{b_2-1} (u-x)^{\lambda-1} du \quad (g, h = 0, 1, x, \infty)$$

l'intégrale bien connue dans cette théorie; le groupe de l'équation linéaire correspondante peut être obtenu à l'aide des deux substitutions fondamentales

$$\begin{vmatrix} x & e^{-2(\lambda+b_1)\pi i} \\ y & (e^{-2(\lambda+b_1)\pi i} - e^{-2\lambda\pi i})x + y \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} x & x + (e^{2(\lambda+b_2)\pi i} - e^{2\lambda\pi i})y \\ y & e^{2(\lambda+b_2)\pi i}y \end{vmatrix},$$

et ces substitutions transforment en elle-même la forme (1), en posant

$$A = \frac{(e^{2\pi b_1 i} - 1)(e^{2\pi(\lambda+b_2)i} - 1)}{(e^{2\pi b_2 i} - 1)(e^{2\pi(\lambda+b_1)i} - 1)}, \quad B = \frac{1 - e^{2\pi b_1 i}}{e^{2\pi(\lambda+b_1)i} - 1}, \quad C = 1.$$

On est conduit tout naturellement à se demander si la remarque qui vient d'être faite pour les groupes linéaires d'ordre fini à deux variables peut s'étendre aux groupes d'ordre fini à trois variables. Il en est effectivement ainsi, et il va suffire de prendre les divers types de groupes d'ordre fini à trois variables pour vérifier qu'il existe une forme quadratique ternaire à indéterminées conjuguées, qui se transforme en elle-même quand on effectue sur les variables les substitutions d'un groupe d'ordre fini.

L'énoncé précédent souffre une exception pour un seul type de groupe dans lequel se présente une circonstance plus simple encore.

La découverte de tous les groupes d'ordre fini à trois variables est due, comme on sait, à M. Jordan (*Crelle*, t. 84, et *Mémoires couronnés par l'Académie de Naples*, t. XX).

Dans le premier type, toutes les substitutions sont de la forme

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x + \beta y & x + \beta' y & \gamma z \end{vmatrix};$$

les coefficients γ étant des racines de l'unité, et les coefficients α , β , α' , β' , tels que les substitutions à deux variables

$$\begin{vmatrix} x & y & \alpha x + \beta y & \alpha' x + \beta' y \end{vmatrix}$$

forment un groupe d'ordre fini. On aura évidemment ici une forme et même une infinité jouissant de la propriété indiquée.

Pour les groupes du *deuxième* ou du *troisième* type, dont les substitutions sont toutes de la forme

$$\begin{vmatrix} x & y & z & ax & by & cz \\ x & y & z & a'y & b'z & c'x \\ x & y & z & a''y & b''x & c''z \end{vmatrix},$$

où les a , b , c sont des racines de l'unité, la forme

$$xx_0 + yy_0 + zz_0$$

satisfera évidemment à la question.

Pour le *quatrième* type, le théorème cesse d'être exact ; mais on a alors une forme quadratique ternaire ordinaire que reproduisent, à un facteur près, les substitutions du groupe. Celui-ci dérive de la combinaison des substitutions

$$\begin{vmatrix} x & y & z & \lambda x & \lambda y & \lambda z \\ x & y & z & \tau x & \tau^{-1}y & z \\ x & y & z & y & x & z \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x & ax + (1-a)y + 2a(1-a)z \\ y & (1-a)x + ay - 2a(1-a)z \\ z & x - y & + (1-2a)z \end{vmatrix},$$

où

$$\tau^5 = 1, \quad 1 + a(\tau + \tau^{-1} - 2) = 0$$

et λ désignant une racine de l'unité ; on vérifie aisément que la forme quadratique

$$z^2 - 5xy$$

se reproduit, à un facteur près, par les substitutions précédentes.

Passons au *cinquième* type. Ce groupe est dérivé de la combi-

raison des substitutions

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} x & y & z & \lambda x & \lambda y & \lambda z \\ x & y & z & x & \theta y & \theta^2 z \\ x & y & z & y & z & x \\ x & y & z & rjx & rj\theta^2 y & rjz \end{vmatrix}, \\ & \begin{vmatrix} x & r^2 a(x + y + \theta^2 z) \\ y & r^2 a(x + \theta y + z) \\ z & r^2 a(x + \theta^2 y + \theta^2 z) \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

où l'on a

$$\begin{aligned} \theta^3 &= 1, & j^3 &= \theta, & a^3 &= \frac{1}{3(1-\theta^2)}, \\ \lambda^3 \rho &= 1, & r^3 &= \lambda^\mu \quad (\rho \text{ quelconque, mais entier}), & \mu &= 0, 1, 2, \end{aligned}$$

θ, j, r et λ ayant des modules égaux à l'unité, et aa_0 étant égal à $\frac{1}{3}$. On voit sans peine que toutes ces substitutions transforment en elle-même

$$xx_0 + yy_0 + zz_0.$$

Il n'y a rien à ajouter pour les groupes du *sixième* et du *septième* type, pour lesquels le même fait se vérifie de suite.

Il nous reste à examiner le *huitième* type. Le groupe dérive de la combinaison des substitutions

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} x & y & z & \lambda x & \lambda y & \lambda z \\ x & y & z & \tau x & \tau^2 y & \tau^4 z \\ x & y & z & y & z & x \end{vmatrix}, \\ & \begin{vmatrix} x & ax + cy + bz \\ y & cx + by + az \\ z & bx + ay + cz \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

où $r^7 = 1$, et a, b, c sont définis par le système linéaire

$$\begin{aligned} a + b + c &= -1, \\ a + b\tau + c\tau^3 &= 0, \\ a\tau^3 + b\tau^2 + c &= 0, \end{aligned}$$

et λ désignant toujours une racine de l'unité.

C'est encore la forme $xx_0 + yy_0 + zz_0$ qui répond à la question : il suffit de la vérifier pour la dernière substitution : c'est ce qui

se fera tout de suite, en remarquant que a, b, c sont réels, et que

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

$$ab + bc + ca = 0,$$

la seconde égalité se démontrant de suite, en remplaçant a, b, c par des quantités proportionnelles tirées des deux dernières équations.

Le théorème énoncé se trouve ainsi démontré.

Sur une notation utile en Algèbre et en Analyse;

par M. MAURICE D'OCAGNE.

(Séance du 20 avril 1887.)

On rencontre très fréquemment, en Mathématiques, certaines expressions tout à fait analogues au développement du binôme (ou d'un polynôme), en ce sens que les coefficients y sont les mêmes, mais que les exposants y sont remplacés, soit par des indices d'ordre, soit par des indices de dérivation.

On est alors dans l'habitude de condenser ces expressions sous forme de binôme (ou de polynôme) élevé à une certaine puissance, en ajoutant qu'on les met sous *forme symbolique*. Dans beaucoup de cas, cette convention suffit, mais non pas toujours. Elle peut amener certaine confusion, par exemple si, dans le même travail, les mêmes lettres figurent affectées tantôt d'exposants, tantôt d'indices de dérivation, ou bien encore si, au cours d'un long Mémoire, le lecteur, dont l'esprit est attiré sur d'autres points, vient à oublier le *sens conventionnel* attribué à certaines expressions. Ces faits nous ont frappé au cours de récentes recherches, et nous avons reconnu, sinon la nécessité absolue, du moins la grande utilité qu'il y aurait à convenir d'un signe particulier destiné à mettre en relief le côté conventionnel des expressions que nous avons en vue. Nous nous sommes arrêté à certain signe qui nous a paru à la fois simple, parlant à l'esprit et facile à réaliser en typographie. Nous en soumettons ici l'idée aux mathématiciens, qui

jugeront s'il y a lieu de l'admettre et d'en généraliser l'emploi. Voici quel est ce signe :

Si une lettre figure, dans l'expression développée, avec des indices d'ordre (placés en bas) remplaçant les exposants, nous l'écrirons, dans l'expression condensée, soulignée d'un petit trait.

Si elle figure, dans l'expression développée, avec des indices de dérivation (placés en haut) remplaçant les exposants, nous l'écrirons, dans l'expression condensée, surmontée d'un trait.

En d'autres termes :

Z^m sera supposé être la même chose que Z_m .

$\bar{Z}^m$ sera supposé être la même chose que $Z^{(m)}$.

Avec cette double convention, pas d'erreur possible.

Veut-on, par exemple, écrire que les nombres d'Euler peuvent se calculer, par voie récurrente, au moyen de la relation (1)

$$\left[E_m + \frac{m}{1} E_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} E_{m-2} + \dots + E_0 \right] + \left[E_m - \frac{m}{1} E_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} E_{m-2} - \dots + (-1)^m E_0 \right] = 0,$$

on écrira

$$(\underline{E} + 1)^m + (\underline{E} - 1)^m = 0.$$

La formule de Leibnitz, donnant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit $u = zy$, s'écrira

$$u^{(n)} = (\bar{z} + \bar{y})^n.$$

Pour représenter symboliquement (2)

$$\alpha_0 w^{(\mu)} - \mu p \alpha_1 w^{(\mu-1)} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} p^2 \alpha_2 w^{(\mu-2)} - \dots + (-1)^\mu \alpha_\mu w,$$

on aura

$$(\bar{w} - p\alpha)^\mu.$$

L'expression (1) du théorème I de la Note où M. R. Perrin généralise d'une façon si remarquable (*Comptes rendus*, t. CIV, p. 1097) le théorème que j'avais précédemment donné sur les péninvariants

(1) *Nouv. Ann. de Math.*, 3^e série, t. V, p. 309.

(2) *Comptes rendus*, t. CIV, p. 964.

des formes binaires s'écrira, avec la nouvelle notation,

$$[w_p, w_q]_r = (p\bar{w}_q - q\bar{w}_p)^r.$$

On pourrait indéfiniment multiplier de tels exemples, car les expressions de ce genre se rencontrent, pour ainsi dire, à chaque pas, soit en Algèbre, soit en Analyse. Mais les exemples qui viennent d'être donnés, particulièrement les derniers, suffisent à faire saisir l'utilité de la convention que nous proposons. Si elle était admise définitivement et introduite dans l'usage courant, le langage algébrique y gagnerait en netteté. C'est là le seul résultat que nous nous soyons proposé en publiant cette remarque.

*Exposition d'une méthode de M. Caspary, pour l'étude
des courbes gauches; par M. CARVALLO.*

(Séance du 18 mai 1887.)

1. Dans le 100^e Volume du *Journal de Crelle*, M. Caspary a publié, sur la génération des courbes gauches algébriques, un Mémoire qu'il a signalé à la Société mathématique dans la séance du 20 avril. La remarquable méthode employée par M. Caspary est purement intuitive; elle repose sur une généralisation, qui logiquement s'impose, des notations ordinaires de la Géométrie, et s'adapte merveilleusement à la Géométrie de position. Mais sa portée est plus grande encore, car les principes qui lui servent de base formeraient, d'après l'auteur, le lien entre la Géométrie pure et la Géométrie analytique et se prêteraient également bien aux études entreprises dans ces deux sens.

2. Systématisant une notation familière en Géométrie, M. Caspary désigne par

AB la droite qui joint les points A et B;

$\alpha\beta$ la droite d'intersection des plans α et β ;

A α le plan qui passe par le point A et la droite α ;

$\alpha\alpha$ le point d'intersection du plan α et de la droite α .

En résumé, par la juxtaposition des lettres qui désignent les éléments simples, l'auteur représente l'élément qui résulte ou de la jonction ou de l'intersection des éléments primitifs. Il est dès lors conduit à représenter un nombre arbitraire de constructions successives par la juxtaposition de symboles représentant des points, des droites et des plans. De cette façon, si l'on désigne ces éléments respectivement par des majuscules, des minuscules et des lettres grecques et qu'on adopte, comme en Algèbre, l'usage des parenthèses, l'expression

$$(Xab)(Xc\alpha)$$

symbolise la construction suivante :

- 1° On mène le plan passant par le point X et la droite a , Xa ;
- 2° On prend l'intersection du plan Xa avec la droite b , Xab ;
- 3° et 4° On construit de même l'expression $Xc\alpha$ qui représente une droite;
- 5° On mène le plan passant par le point Xab et la droite $Xc\alpha$.

En définitive, $(Xab)(Xc\alpha)$ représente un plan qu'on sait trouver.

3. L'auteur appelle dérivé d'un élément variable point, droite ou plan, par exemple d'un point X , un autre élément représenté par une expression telle que la précédente où entre X . Je me permettrai de plus de dire qu'il est dérivé d'ordre n si X entre n fois dans l'expression de cet élément dérivé. Cette nouvelle définition se justifie comme il suit.

Soit d'abord une expression où l'élément variable entre une seule fois, par exemple

$$AaxX\dots$$

Je dois effectuer la construction Aax qui donne une certaine droite b ; l'expression s'écrit alors

$$bX\dots \text{ ou } Xb\dots$$

Ainsi l'élément variable peut toujours être amené en tête de l'expression donnée. Je laisserai maintenant au lecteur le soin de

vérifier les résultats suivants (1) :

XA représente une droite dont les coordonnées sont linéaires homogènes par rapport à celles de X .

Xa représente un plan dont les coordonnées sont linéaires homogènes par rapport à celles de X .

ξx représente une droite dont les coordonnées sont linéaires homogènes par rapport à celles de ξ .

ξa représente un point dont les coordonnées sont linéaires homogènes par rapport à celles de ξ .

xA représente un plan dont les coordonnées sont linéaires homogènes par rapport à celles de x .

xa représente un point dont les coordonnées sont linéaires homogènes par rapport à celles de x .

Dans le premier groupe, on considère les coordonnées ponctuelles de la droite XA ; dans le deuxième groupe, les coordonnées tangentielles de la droite ξx ; dans le troisième groupe, les coordonnées de la droite x sont arbitrairement des coordonnées tangentielles ou ponctuelles.

Toutes les combinaisons sont examinées dans le Tableau précédent ; dès lors :

1° Si l'on effectue une suite de constructions en faisant entrer une seule fois un élément variable, un point X par exemple, tous les éléments qu'on obtiendra successivement auront leurs coordonnées linéaires homogènes par rapport à celles de X .

2° Si l'on fait entrer n éléments $X_1, X_2, \dots, X_n$ chacun une fois, l'élément dérivé aura des coordonnées linéaires homogènes par rapport aux coordonnées de chacun de ces éléments.

3° Si l'on fait entrer n fois un élément X , l'élément dérivé aura ses coordonnées homogènes de degré n par rapport à celles de X .

4. Par une convention de l'auteur,

$\lambda N = 0$ exprime que le point N est dans le plan λ ;

(1) Je considère pour le point des coordonnées homogènes ; les coordonnées du plan sont les quatre coefficients de son équation ; enfin j'appelle *coordonnées ponctuelles* de la droite les six déterminants formés avec les coordonnées des deux points ; *coordonnées tangentielles* de la droite les six déterminants formés avec les coordonnées des deux plans qui définissent la droite.

$ln = 0$ exprime que les droites l et n sont dans un même plan;
 $lN = 0$ exprime que le point N est sur la droite l ;
 $lv = 0$ exprime que le plan v contient la droite l .

Je ferai à ce sujet les remarques suivantes :

1° $\lambda N = 0$ se traduit en géométrie cartésienne par une équation linéaire homogène par rapport aux coordonnées de λ et aussi par rapport à celles de N . Si, en particulier, les éléments λ et N sont respectivement dérivés d'ordres p et q , d'un point X , $\lambda N = 0$ représente l'équation ponctuelle d'une surface de degré $p + q$. Mais λ et N peuvent être dérivés d'un plan ou d'une droite, de façon que $\lambda N = 0$ représente, dans ces cas, une équation tangentielle ou relative à l'espace réglé.

2° Considérons $ln = 0$. Si une des droites est définie par deux points, soit par exemple $n = MN$, l'égalité signifie que les deux droites l et MN sont dans un même plan ou, ce qui revient au même, que le plan $\lambda = lM$ contient le point N . On est alors ramené à la forme $\lambda N = 0$ déjà examinée.

Si, au contraire, les deux droites sont définies par des intersections de plans, soient

$$l = \lambda\mu, \quad n = \nu\varpi,$$

l'égalité $ln = 0$ signifie que les deux droites $\lambda\mu$ et $\nu\varpi$ sont dans un même plan ou, ce qui revient au même, que le plan λ passe par le point $\mu\nu\varpi = N$. On est encore ramené à la forme précédente $\lambda N = 0$.

3° Pour $lN = 0$, deux cas se présentent suivant que la droite l est définie par l'intersection de deux plans λ et μ ou par deux points L et M . Dans le premier cas, le point N étant sur la droite $\lambda\mu$ est à la fois dans chacun des deux plans λ et μ , c'est-à-dire que l'égalité $lN = 0$ se décompose en deux autres, savoir

$$\lambda N = 0, \quad \mu N = 0,$$

qui sont de la première forme examinée.

Dans le second cas, je considère deux points arbitraires, mais fixes, A et B ; la droite $l = LM$ est l'intersection des plans $\lambda = LMA$, $\mu = LMB$ et l'on est ramené au premier cas.

4° L'égalité $lv = 0$ se traite comme la précédente à laquelle

elle correspond par le principe de dualité. Elle donne encore lieu à deux équations dont on évaluera facilement les degrés.

5. Si, en particulier, les éléments l et N sont dérivés d'un point mobile X , l'égalité $lN = 0$ équivaut aux équations de deux surfaces algébriques et, par conséquent, représente la courbe algébrique qui résulte de leur intersection. Il en est de même pour $lv = 0$.

J'ai cru devoir remplacer par les remarques précédentes l'exposition de M. Caspary, parce que ces remarques forment une discussion intéressante et que de plus la démonstration de l'auteur est basée sur un théorème de Grassmann qui peut être ignoré du lecteur. Voici maintenant les applications que l'auteur fait de cette théorie à la génération des cubiques.

6. Soit l'égalité

$$(1) \quad (Xa_1a_2)(Xb_1b_2)(Xg) = 0.$$

Si l'on pose

$$(2) \quad P = Xa_1a_2, \quad Q = Xb_1b_2,$$

l'égalité (1) exprime que le plan Xg contient la droite PQ et, par suite, chacun des points P et Q ; elle se décompose donc en deux autres, savoir

$$(3) \quad P(Xg) = 0, \quad Q(Xg) = 0.$$

L'auteur interprète ces formules des trois façons suivantes :

1. — 1° D'après la première égalité (2), le point P est dans le plan Xa_1 ; donc PX coupe a_1 ;

2° D'après la même égalité, le point P est sur la droite a_2 ; donc PX coupe a_2 .

3° D'après la première égalité (3), le point P est dans le plan Xg ; donc PX coupe g .

PX rencontrant les trois droites a_1, a_2, g décrit un hyperboloïde. De même QX décrit l'hyperboloïde qui a pour directrices b_1, b_2, g . Donc, X décrit l'intersection de ces deux hyperboloïdes et, comme ceux-ci ont la génératrice commune g , cette intersection est une cubique.

II. — 1° Le plan PQX passe par la droite g , d'après les égalités (3).

2° Le point P décrit la droite a_2 et Q la droite b_2 , d'après les égalités (2).

3° La droite PX s'appuie sur a_1 et QX sur b_1 , d'après les égalités (2).

Donc :

1° Si le plan d'un triangle PQX tourne autour d'une droite fixe g ,

2° Si les deux sommets P et Q décrivent respectivement des droites fixes a_2 et b_2 ,

3° Si les deux côtés PX et QX s'appuient sur deux droites fixes a_1 et b_1 ,

Le troisième sommet X décrit une cubique.

III. — P est dans le plan Xg , d'après la première égalité (3);

P est dans le plan Xa_1 , d'après la première égalité (2).

Donc P est sur l'intersection $(Xa_1)(Xg)$ de ces deux plans; d'ailleurs P est sur a_2 d'après la première égalité (2).

P étant sur la droite $(Xa_1)(Xg)$ et sur la droite a_2 , ces deux droites se coupent et l'on a

$$(Xa_1)(Xg)a_2 = 0, \quad \text{et de même} \quad (Xb_1)(Xg)b_2 = 0.$$

Donc :

1° Si les trois faces Xa_1 , Xb_1 , Xg d'un trièdre pivotent autour de trois droites fixes a_1 , b_1 , g ,

2° Si les deux arêtes (Xa_1) , (Xg) et (Xb_1) , (Xg) s'appuient sur deux droites fixes a_2 , b_2 ,

Le sommet X de ce trièdre décrit une cubique.

7. Généralisation. — Considérons l'égalité

$$(1) \quad (Xa_1a_2 \dots a_{2l})(Xb_1b_2 \dots b_{2m})(Xc_1c_2 \dots c_{2n}g) = 0,$$

qui reproduit la précédente quand on y fait

$$l = 1, \quad m = 1, \quad n = 0.$$

On peut voir par un procédé analogue au précédent que X décrit la cubique d'intersection de deux hyperboloïdes ayant pour génératrice commune g . Mais l'auteur préfère employer la marche

suivante, qui montre bien les relations qui existent entre une des interprétations de ses résultats et la méthode employée dans la Géométrie pure de Chasles, de Steiner et d'autres géomètres.

Posons donc

$$(2) \quad P = X a_1 a_2 \dots a_{2l}, \quad Q = X b_1 b_2 \dots b_{2m}, \quad R = X c_1 c_2 \dots c_{2n},$$

ces expressions représentant évidemment des points.

L'égalité (1) s'écrit

$$PQ(Rg) = 0.$$

Sous cette forme, elle exprime que la droite PQ est dans le plan Rg; si donc on pose

$$PQR = \lambda,$$

le plan λ contient d'abord la droite g, ce qui donne

$$(3) \quad \lambda g = 0;$$

ce plan λ contient aussi les points P, Q, R et l'on a, en particulier,

$$P\lambda = 0,$$

ou, en remplaçant P par son expression (2),

$$X a_1 a_2 \dots a_{2l} \lambda = 0.$$

Or il est évident que cette égalité peut être écrite en ordre inverse

$$\lambda a_{2l} \dots a_2 a_1 X = 0;$$

sous cette forme, elle exprime que le point X est dans le plan $\lambda a_{2l} \dots a_2 a_1$. Le même raisonnement s'applique aux points Q et R; si donc on pose

$$(4) \quad \begin{cases} \lambda a_{2l} \dots a_2 a_1 = \mu, \\ \lambda b_{2m} \dots b_2 b_1 = \nu, \\ \lambda c_{2n} \dots c_2 c_1 = \pi, \end{cases}$$

on voit que le point X est dans chacun des plans μ, ν, π , c'est-à-dire qu'il est leur intersection.

Interprétons maintenant les égalités (3) et (4) :

1° L'égalité (3) représente un faisceau de plans λ tournant autour de l'axe g.

2° La première égalité (4) montre que le plan μ pivote autour de a_1 ; de plus, λ ne figurant qu'une fois dans l'expression de μ ,

ce plan μ décrit un faisceau de plans homographiques du précédent.

De même ν et ϖ décrivent autour de b_1 et c_1 des faisceaux homographiques du premier. Donc ces trois faisceaux μ , ν , ϖ , homographiques d'un même troisième λ , sont homographiques entre eux; dès lors, d'après un théorème de Chasles, le point X commun aux trois plans μ , ν , ϖ décrit une cubique.

En suivant une marche identique à la précédente, l'auteur démontre que, si l'on prend un nombre impair de droites dans chacun des groupes

$$a_1 a_2 \dots, \quad b_1 b_2 \dots, \quad c_1 c_2 \dots,$$

l'égalité

$$(1)' \quad (X a_1 a_2 \dots a_{2l+1})(X b_1 b_2 \dots b_{2m+1})(X c_1 c_2 \dots c_{2n+1} g) = 0$$

représente encore une cubique. Les égalités (1) et (1') donnent ainsi lieu à un énoncé très général dont voici l'application au cas particulier où l'on fait dans chacune de ces égalités

$$l = m = n = 1.$$

(1). Si le plan de base PQR d'un tétraèdre PQRX pivote autour d'une droite fixe g , si les trois sommets P, Q, R de cette base décrivent des droites fixes a_2 , b_2 , c_2 , si les trois arêtes latérales PX, QX, RX rencontrent trois droites fixes a_1 , b_1 , c_1 , le quatrième sommet X du tétraèdre décrit une cubique.

(1)'. Si un des sommets S d'une double pyramide triangulaire SPQRX décrit une droite fixe g_1 , si les six arêtes latérales rencontrent des droites fixes a_1 , b_1 , c_1 ; a_3 , b_3 , c_3 , si les trois sommets P, Q, R de la base commune décrivent trois droites fixes a_2 , b_2 , c_2 , le sommet X décrit une cubique.

Après avoir ainsi employé seulement des droites comme éléments fixes, l'auteur emploie des plans et des points et considère l'égalité

$$(X A_1 \alpha_1 \dots A_l \alpha_l)(X B_1 \beta_1 \dots B_m \beta_m)(X C_1 \gamma_1 \dots C_n \gamma_n) g = 0.$$

Comme précédemment, si l'on appelle λ le plan des trois points

$$P = X A_1 \alpha_1 \dots A_l \alpha_l, \quad Q = X B_1 \beta_1 \dots B_m \beta_m, \quad R = X C_1 \gamma_1 \dots C_n \gamma_n,$$

On voit que le point X est l'intersection des trois plans

$$\begin{aligned}\mu &= \lambda \alpha_l A_l \dots \alpha_1 A_1, \\ \nu &= \lambda \beta_m B_m \dots \beta_1 B_1, \\ \varpi &= \lambda \gamma_n C_n \dots \gamma_1 C_1,\end{aligned}$$

liés linéairement au plan λ qui pivote autour de la droite g . Donc ce point X décrit une cubique.

Ce résultat s'énonce ainsi :

Un plan λ pivote autour d'une droite fixe g .

On prend les intersections de ce plan avec les plans $\alpha_l, \beta_m, \gamma_n$;

Par ces intersections $\lambda \alpha_l, \lambda \beta_m, \lambda \gamma_n$ et les points A_l, B_m, C_n , on fait passer trois plans ;

On prend les intersections de ces plans avec $\alpha_{l-1}, \beta_{m-1}, \gamma_{n-1}$, etc.

On arrive finalement à trois derniers plans μ, ν, ϖ passant par les points A_1, B_1, C_1 ;

L'intersection X de ces trois plans décrit une cubique.

Pour $l=m=n=1$, on obtient un théorème donné par Chasles sans démonstration (*Aperçu historique* ; Note XXXIII, 7).

9. L'auteur traite ensuite, et d'une façon tout à fait analogue, l'égalité

$$(X A_1 \alpha_1 \dots A_l \alpha_l)(X B_1 \beta_1 \dots B_m \beta_m)C = 0;$$

il montre que le point X décrit une cubique et énonce ainsi ce résultat auquel correspond, en Géométrie plane, le théorème de Maclaurin et Braikenbridge :

THÉORÈME. — Si les côtés d'un polygone gauche PQ...RSX passent par des points fixes $A_1, A_2, \dots, C, \dots, B_2, B_1$, si les sommets sauf un, P, Q, ..., R, S décrivent des plans fixes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_2, \beta_1$, le dernier sommet X décrit une cubique.

Note sur les expressions obtenues par Duhamel et par Lamé pour le flux de chaleur dans les solides non isotropes; par M. CARVALLO.

(Séance du 15 juin 1887.)

1. *Introduction.* — « Le principe admis est celui-ci : Lorsque deux molécules d'un milieu solide athermane et homogène ont des températures inégales, la plus chaude cède à la plus froide une quantité de chaleur égale au produit de la différence des températures par l'élément du temps et par un troisième *facteur* dépendant à la fois et de la distance et des angles qui assignent sa direction, *ce facteur ayant toutefois la même valeur pour deux directions opposées l'une à l'autre.* »

C'est ainsi que s'exprime Lamé ⁽¹⁾ en parlant du beau Mémoire de Duhamel ⁽²⁾ sur la propagation de la chaleur dans les solides non isotropes, et plus loin, parlant de sa propre théorie :

« Pour entrer dans la phase définitive que j'ai indiquée, il ne reste plus qu'à écarter la restriction imposée par l'identité admise des valeurs de la *fonction-facteur* pour deux directions opposées l'une à l'autre. »

C'est là ce que fait le célèbre physicien et il trouve un résultat plus général que Duhamel, l'expression qu'il obtient pour le flux renfermant neuf coefficients au lieu de six. Écarter une restriction et par là trouver des résultats plus généraux, tel est, suivant Lamé, le progrès réalisé par sa théorie. Une marche analogue, dans l'élasticité, l'a conduit à deux coefficients au lieu d'un seul primitivement obtenu, « circonstance fort heureuse, dit-il, en ce qu'elle écarte complètement les objections qui résultaient des expériences de M. Wertheim et d'autres physiciens ».

L'avantage n'est pas aussi grand dans la théorie de la chaleur, car les résultats de Duhamel suffisent et la plus grande généralité de Lamé n'est nullement nécessitée par l'expérience, de façon

⁽¹⁾ *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur.* Discours préliminaire, p. 15.

⁽²⁾ *Journal de l'École Polytechnique*, t. XIII

qu'elle n'introduit en réalité que de la complication. Il y a plus, l'hypothèse de Duhamel sur la *fonction-facteur* n'a pour effet que de faciliter les intégrations, et je me propose de montrer ici que, même l'hypothèse étant écartée, les formules de Lamé sont trop générales et ses neuf coefficients doivent être réduits aux six de Duhamel.

2. *Loi de l'échange de la chaleur entre deux points.* — L'échange de chaleur n'est supposé se faire qu'entre molécules très voisines. Soient m et m' deux de ces molécules aux températures V et V' ; on admet que la quantité de chaleur qui passe de m' à m est proportionnelle à l'élément de temps dt et à la différence très petite de température $V' - V$.

Or, si l'on désigne les cosinus directeurs de la direction mm' par α , β , γ et la longueur mm' par r , on a, en bornant l'approximation au premier ordre,

$$V' - V = r \left(\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V}{\partial z} \right).$$

L'échange de chaleur est donc proportionnel à cette quantité ou simplement à celle que renferme la parenthèse. Quant au *coefficient de proportionnalité*, je ne ferai aucune hypothèse à son sujet; il aura seulement, pour chaque couple de molécules, une valeur déterminée qui dépend de la nature et des positions relatives des deux molécules.

3. *Flux de chaleur à travers un élément de surface. Définition et méthode d'évaluation.* — « Si l'on considère un élément plan infiniment petit dans l'intérieur d'un corps solide limité ou indéfini, la chaleur traversera cet élément dans tous les sens : nous appellerons *flux* la quantité de chaleur qui passe d'un côté moins celle qui passe de l'autre. Cette différence changera de signe sans changer de grandeur, quand on considérera successivement les deux côtés du plan de l'élément ⁽¹⁾ : le signe de flux dépendra donc

⁽¹⁾ Ce fait résulte d'une simple convention de signe aussi simplement que la valeur algébrique d'un segment change de signe quand on change le sens dans lequel on le compte positivement. Il ne faudrait donc pas le confondre avec l'hypothèse sur la *fonction-facteur*, qui seule est attaquée par Lamé.

du sens que l'on considérera et qui sera toujours déterminé par la direction de la normale prise à partir de l'élément. »

Telle est la définition de Duhamel. D'après cette définition, je considère un élément de surface σ dont la normale munie d'un sens est ON. Je prends un point m du côté de ON, un point m' de l'autre côté par rapport au plan de l'élément et de façon que la droite mm' coupe σ . Je considère la quantité de chaleur échangée comme positive si elle va de m' à m , comme négative si elle va de m à m' . Je dois faire la somme algébrique de toutes les quantités de chaleur écoulées pendant le temps dt , pour tous les couples (m, m') formés de cette façon. Pour cela, je considère les cylindres de toutes directions ayant pour base σ ; pour un de ces cylindres, je prends les couples de points (m, m') , tels que la droite qui les joint soit dans l'intérieur du cylindre et parallèle aux génératrices; enfin je fais la somme des flux ainsi obtenus pour toutes les directions de génératrices. J'ajouterai que, pour relier entre eux les résultats correspondant à ces divers cylindres, j'emploie comme intermédiaires les cylindres circonscrits à une sphère : c'est là le point original de la méthode.

4. Évaluation du flux à travers un élément de surface. —

I. Je considère une sphère O infiniment petite, une direction OA ayant pour cosinus directeurs α, β, γ , puis le cylindre circonscrit dont les génératrices sont parallèles à OA. Ce cylindre touche la sphère suivant un cercle ε . Enfin je prends un point m du côté de OA par rapport au plan du cercle ε , un point m' de l'autre côté, sous la condition que la droite mm' soit parallèle aux génératrices et comprise dans l'intérieur du cylindre. La quantité de chaleur qui passe de m' à m est proportionnelle (n° 2) à $\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V}{\partial z}$. Je fais la somme de tous les flux qui correspondent aux couples tels que (m, m') , j'obtiens une quantité $k \left(\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V}{\partial z} \right) \varepsilon dt$ dans laquelle, pour la direction OA, k est une constante qui ne dépend que de la nature du corps. Pour une autre direction OA, ayant pour cosinus directeurs $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, on aurait une autre constante k_1 , et la quantité de chaleur analogue serait

$$k_1 \left(\alpha_1 \frac{\partial V}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma_1 \frac{\partial V}{\partial z} \right) \varepsilon dt.$$

Si le corps était isotrope et dans ce cas seulement, on aurait toujours

$$k_1 = k.$$

Remarque. — Dans la sommation précédente, je peux négliger les points intérieurs à la sphère, ou les introduire sans changer le résultat; car, s'il est vrai que l'écoulement de chaleur ne se fait qu'entre points très voisins, néanmoins la distance limite très petite est finie. Ainsi les points que je considère sont contenus dans un cylindre ayant une section infiniment petite mais une hauteur finie; au contraire, la sphère a toutes ses dimensions infiniment petites. On peut donc, dans l'évaluation précédente, négliger les points qui y sont contenus ou les introduire indifféremment.

II. Je considère maintenant le grand cercle σ à travers lequel je veux évaluer le flux; soit ON la normale à ce cercle, λ , μ , ν ses cosinus directeurs. Je considère le faisceau cylindrique ayant pour base σ et pour génératrices des parallèles à OA : il est une portion du cylindre circonscrit à la sphère et cette portion est au cylindre total dans le rapport de la projection de σ sur le plan du cercle ϵ à ce cercle lui-même. Or ce rapport est égal au cosinus de l'angle des normales ON, OA, et ce cosinus a pour valeur

$$\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu.$$

Multipliant le flux précédemment obtenu par ce cosinus et divisant par σdt ou par son égal ϵdt , il vient

$$(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu)k \left(\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V}{\partial z} \right).$$

Je ferai encore les remarques suivantes :

1° Le raisonnement précédent ne semble rigoureux que si l'on considère le flux qui traverse, non pas l'élément σ lui-même, mais sa projection sur le plan du cercle ϵ ; mais il n'y a de différence que pour les points qui sont dans les onglets compris entre σ et ϵ , et, d'après une remarque précédente, la quantité correspondante est infiniment petite d'ordre supérieur à celle qu'on évalue.

2° J'ai admis aussi que le flux qui traverse un cylindre de direction OA est proportionnel à la section de ce cylindre.

Cela est vrai rigoureusement dans un corps homogène et serait vrai seulement à un infiniment petit près d'ordre supérieur dans un corps hétérogène.

3° Avant de faire la somme des flux partiels qui répondent à toutes les directions OA, il est utile d'apporter à ce qui précède une modification qui permette de mettre cette somme sous la forme ordinaire d'une intégrale. Pour cela, j'appliquerai le raisonnement précédent, non plus au simple cylindre de direction OA, mais au faisceau des cylindres dont les génératrices sont parallèles aux droites qui joignent le centre d'une sphère de rayon 1 à tous les points d'un élément $d\omega$ de la surface de cette sphère. Le flux de chaleur $k \left(\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V}{\partial z} \right)$ est remplacé par un flux qui contient $d\omega$ en facteur et qui est de la forme

$$K d\omega \left(\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V}{\partial z} \right).$$

Dans cette expression, K est une constante pour la direction OA, variable avec cette direction et qui dépend de la nature du corps.

De cette façon je néglige la variation de $\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V}{\partial z}$ pour les directions renfermées dans le cône d'ouverture $d\omega$. Mais il est clair que, la fonction V étant supposée continue ainsi que ses dérivées, on ne néglige ainsi que des termes d'ordre supérieur. Enfin ce flux, qui traverse l'ensemble des cercles normaux aux directions du pinceau d'ouverture $d\omega$, peut être regardé comme traversant le cercle ϵ . Pour passer de ce flux à celui qui traverse σ , il suffit encore de multiplier le précédent par $\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu$, car on néglige ainsi seulement un infiniment petit d'ordre supérieur. En résumé, le flux qui traverse σ parallèlement au faisceau des directions définies par le cône d'ouverture $d\omega$ est, au facteur près τdt ,

$$(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu) K d\omega \left(\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V}{\partial z} \right).$$

III. Il reste à faire la somme de tous ces flux partiels de façon à embrasser tous les couples de points (m, m'). Il vient ainsi pour

le flux correspondant à l'élément σ de normale ON

$$\begin{aligned} & \lambda \left(\int K \alpha^2 d\omega \frac{\partial V}{\partial x} + \int K \alpha \beta d\omega \frac{\partial V}{\partial y} + \int K \alpha \gamma d\omega \frac{\partial V}{\partial z} \right) \\ & + \mu \left(\int K \beta \alpha d\omega \frac{\partial V}{\partial x} + \int K \beta^2 d\omega \frac{\partial V}{\partial y} + \int K \beta \gamma d\omega \frac{\partial V}{\partial z} \right) \\ & + \nu \left(\int K \gamma \alpha d\omega \frac{\partial V}{\partial x} + \int K \gamma \beta d\omega \frac{\partial V}{\partial y} + \int K \gamma^2 d\omega \frac{\partial V}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Les intégrations doivent être étendues à un hémisphère, d'ailleurs arbitraire, de façon à comprendre et une fois seulement chaque couple $(m; m')$.

5. *Conclusion.* — Comme on voit, l'expression précédente du flux ne contient que six coefficients

$$\begin{aligned} A &= \int K \alpha^2 d\omega, & B &= \int K \beta^2 d\omega, & C &= \int K \gamma^2 d\omega, \\ D &= \int K \beta \alpha d\omega, & E &= \int K \gamma \alpha d\omega, & F &= \int K \alpha \beta d\omega. \end{aligned}$$

Ce résultat est identique à celui de Duhamel. Au contraire, Lamé trouve des valeurs distinctes pour les neuf coefficients des dérivées $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$; et ce résultat ne coïncide avec le précédent que dans le cas appelé par Lamé cas de l'égalité symétrique. Or, dans l'analyse précédente, on a écarté cette restriction que la *fonction-facteur* ait la même valeur pour deux directions opposées. Ce n'est donc pas à ce fait, mais à une imperfection de son analyse qu'est due la plus grande généralité de Lamé, et cette imperfection est, pensons-nous, dans la définition qu'il donne du flux.

En effet, il considère un cylindre C normal à σ , ayant pour base cet élément et tracé seulement d'un côté de lui. La quantité de chaleur envoyée par ce cylindre à toute la région du corps située de l'autre côté du plan de l'élément est ce que Lamé appelle le *flux élémentaire* correspondant à σ . Cette définition peu rationnelle n'introduit pas tous les couples de points tels que la droite qui les joint traverse σ et en introduit qui ne satisfont pas à cette condition; elle ne permet pas de reprendre le calcul de Duhamel ni le raisonnement que je viens de présenter. Il y a plus, on voit intuitivement que, en prenant n'importe quelle définition, plus arbitraire encore que la dernière, on arriverait pour le flux à une

expression de la forme

$$\left(A \frac{\partial V}{\partial x} + B \frac{\partial V}{\partial y} + C \frac{\partial V}{\partial z} \right) \sigma dt,$$

dans laquelle A, B, C sont des constantes qui dépendent de la direction ON. On aurait donc, comme Lamé, neuf coefficients pour les trois flux coordonnés, et cela sans se donner la peine de faire aucun calcul.

Démonstration nouvelle de la propriété fondamentale de l'intégrale eulérienne de première espèce; par M. LERCH, docent à l'École Polytechnique tchèque de Prague.

(Séance du 15 juin 1887.)

Plusieurs démonstrations ont été données de la formule

$$\int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{t-1} dx = \frac{\Gamma(s) \Gamma(t)}{\Gamma(s+t)};$$

quoiqu'elles ne laissent rien à désirer à l'égard de la clarté et de la simplicité, je crois néanmoins que la démonstration suivante ne serait pas superflue en se fondant sur les principes de la théorie des fonctions et sur le théorème de Cauchy sur les intégrales prises entre des limites imaginaires.

Je suppose connues les deux propriétés fondamentales de la fonction *gamma*, savoir

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha), \quad \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha},$$

dont la seconde prouve que $\frac{1}{\Gamma(x)}$ est une fonction transcendante entière de α .

Soient s, t deux quantités complexes dont les parties réelles sont positives et considérons l'intégrale

$$(1) \quad B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{t-1} dx,$$

où l'on pose

$$x^{s-1} = e^{(s-1)\log x}, \quad (1-x)^{t-1} = e^{(t-1)\log(1-x)},$$

les logarithmes étant pris en sens arithmétique. En supposant que les parties réelles de s et de t sont supérieures à l'unité, l'intégration par parties nous donnera la formule

$$(2) \quad B(s, t) = \frac{s-t}{s+t-1} B(s-1, t).$$

Pour déterminer la nature analytique de la fonction $B(s, t)$, considérons l'intégrale

$$(3) \quad E(s, t) = \int_{(1,0,1)} z^{s-1} (1-z)^{t-1} dz,$$

prise le long d'un contour fermé $(1 \alpha \alpha' \alpha'' \alpha 1)$ enveloppant l'origine au moyen d'un cercle $\alpha \alpha' \alpha'' \alpha$ du centre zéro et du rayon $\alpha < 1$.

D'après le théorème de Cauchy, cette intégrale ne dépend point de la valeur de α et nous aurons, comme il est facile de voir,

$$E(s, t) = \int_1^0 z^{s-1} (1-z)^{t-1} dz + e^{2\pi i(s-1)} \int_0^1 z^{s-1} (1-z)^{t-1} dz,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(4) \quad E(s, t) = 2ie^{\pi i} \sin \pi s B(s, t).$$

Or l'intégrale (3) existe pour chaque valeur finie de s et l'on démontre aisément qu'elle est une fonction *transcendante entière* de la variable s , la partie réelle de t étant, bien entendu, supposée positive.

Donc la fonction

$$(5) \quad \Phi(s) = \frac{B(s, t) \Gamma(s+t)}{\Gamma(s)}$$

est une fonction analytique *uniforme* et l'équation (2) montre qu'elle admet la période 1. Il s'agit des infinis de cette fonction-ci. Comme le montre l'équation (4), nous aurons

$$\Phi(s) = \frac{E(s, t) \Gamma(s+t)}{2ie^{\pi i} \sin \pi s \Gamma(s)}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$i \text{ bis) } \quad \Phi(s) = \frac{1}{2\pi i} e^{-s\pi i} \Gamma(1-s) \Gamma(s+t) E(s, t).$$

La fonction $\Gamma(1-s)$ ne devenant infinie que pour $s=1, 2, 3, \dots$ et $\Gamma(s+t)$ pour $s+t=0, -1, -2, -3, \dots$ on voit que les

infinis de la fonction $\Phi(s)$ sont contenus parmi les valeurs de la forme $s = n, -t, -t - n$ en représentant par n un terme quelconque de la série des nombres naturels 1, 2, 3, ...

Quant aux valeurs de la forme $s = n$, on voit, d'après le théorème de Cauchy, que l'intégrale (3) s'annule de sorte qu'elles ne sont que des points ordinaires de la fonction $\Phi(s)$. Il ne s'agit donc que des points tels, que $s + t$ soit un nombre entier négatif ou nul, $s + t = -n$. Dans ce cas, la fonction $z^{s-1}(1-z)^{t-1}$ sera uniforme dans le plan affecté de la *coupure* (0...1) et le théorème de Cauchy nous donne

$$E(s, t) = \int_C z^{s-1}(1-z)^{t-1} dz,$$

cette intégrale-ci devant être prise le long d'une ligne fermée simple C enveloppant la coupure (0...1). Soit, en particulier, C un cercle du rayon $\frac{1}{r} > 1$ et de centre zéro; posant $z = \frac{1}{x}$, il vient

$$E = \int_{(0)} x^{-s-t}(x-1)^{t-1} dx.$$

cette intégrale étant prise le long du cercle du centre zéro et du rayon $r < 1$. La fonction sous le signe $\int$ étant uniforme et finie pour $s + t = -n$ à l'intérieur de ce cercle, le théorème de Cauchy montre qu'on aura, pour $s + t = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$),

$$E(s, t) = 0,$$

et il s'ensuit que la fonction ne devient jamais infinie, de sorte qu'elle est une *fonction transcendante entière* de s et, puisqu'elle admet la période 1, elle sera représentée par une série de la forme

$$(6) \quad \Phi(s) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} A_v \xi^{sv}, \quad \xi = e^{s\pi i},$$

dont les coefficients A_v ne dépendent que de t .

C'est en combinant les propriétés de la fonction $\Phi(s)$ exprimées par les formules (5^a) et (6) que nous pourrions prouver la formule en question. Supposons à cet effet que la partie réelle de t est contenue entre 1 et 2, tandis que celle de s doit être prise ou nulle ou entre les limites (0...1). La partie réelle de $s + t$ étant con-

tenue entre les limites (1...3), nous aurons

$$|\Gamma(s+t)| = \left| \int_0^\infty e^{-z} z^{s+t-1} dz \right| < \int_0^\infty e^{-z} z^1 dz,$$

c'est-à-dire

$$(\alpha) \quad |\Gamma(s+t)| < 2.$$

Soit ui la partie imaginaire de s ; je dis qu'on peut déterminer une quantité m telle, qu'on ait, pour chaque valeur de u supérieure ou égale en valeur absolue à m , l'inégalité

$$(\beta) \quad |\Gamma(1-s)| < \frac{1}{e} + \delta,$$

δ étant une quantité positive donnée d'avance.

C'est ce qui résulte d'un théorème donné par M. Prym ⁽¹⁾ et démontré d'une manière plus simple par M. Hermite ⁽²⁾, savoir

$$\Gamma(1-s) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!(v+1-s)} + \int_1^\infty e^{-z} z^{-s} dz.$$

En effet, on a, la partie réelle de $-s$ étant négative,

$$\left| \int_1^\infty e^{-z} z^{-s} dz \right| < \int_1^\infty e^{-z} dz = \frac{1}{e};$$

on peut supposer d'ailleurs m tel que, pour $|u| \geq m$, on ait

$$\left| \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!(v+1-s)} \right| < \delta.$$

d'où il suit ce que nous avons affirmé.

On a de plus

$$E(s, t) = (e^{2\pi i s} - 1) \int_0^1 z^{s-1} (1-z)^{t-1} dz + \int_{(\alpha \alpha' \alpha'' \alpha)} z^{s-1} (1-z)^{t-1} dz.$$

Dans la seconde intégrale du second membre la variable z peut se mettre sous la forme

$$z = \alpha e^{\beta i}, \quad \beta = (0 \dots 2\pi);$$

⁽¹⁾ *Journal de Borchardt*, t. 82.

⁽²⁾ *Ibid.*, t. 90, Lettre à M. H.-A. Schwarz.

en se rappelant que

$$|z^{s-1}| = e^{-u\Im} |z^{t-1}|,$$

nous aurons

$$\left| \int_{(\alpha \alpha' \alpha'' \alpha)} z^{s-1} (1-z)^{t-1} dz \right| < |z^s (1-z)^{t-1}| \int_0^{2\pi} e^{-u\Im} d\Im,$$

et, puisque la partie réelle de s et de $t-1$ est positive, cette quantité est moindre que

$$\int_0^{2\pi} e^{-u\Im} d\Im = \frac{1 - e^{-u2\pi}}{u}.$$

On a enfin

$$\left| \int_{\alpha}^1 z^{s-1} (1-z)^{t-1} dz \right| < \int_{\alpha}^1 z^{-1} dz = \log \frac{1}{\alpha},$$

de sorte que

$$|E(s, t)| < |e^{2\pi i s} - 1| \log \frac{1}{\alpha} + \int_0^{2\pi} e^{-u\Im} d\Im.$$

Le premier membre étant indépendant de α , on doit, en faisant α converger vers l'unité, que

$$(\gamma) \quad |E(s, t)| \leq \frac{1 - e^{-u2\pi}}{u}.$$

En combinant la formule (5 bis) avec les inégalités (α), (β), (γ), on trouve

$$|\Phi(s) e^{s\pi i}| < \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{e} + \delta \right) \frac{1 - e^{-u2\pi}}{u}.$$

Si donc u est positif on peut déterminer m tel que pour $u \geq m$ on ait $\frac{1 - e^{-u2\pi}}{u} < \delta$, de sorte que

$$(a) \quad |\Phi(s) e^{s\pi i}| < \frac{\delta}{\pi} \left(\frac{1}{e} + \delta \right),$$

et, si u est négatif, on pourra trouver m tel que, pour $-u \geq m$, on ait

$$e^{2u\pi} \frac{(1 - e^{-2u\pi})}{u} < \delta,$$

de sorte qu'on aura

$$(a') \quad |\Phi(s) e^{-s\pi i}| < \frac{\delta}{\pi} \left(\frac{1}{e} + \delta \right).$$

La fonction $\Phi(s)$ admettant la période 1, il suit des inégalités (a) , (a') qu'on pourra déterminer une quantité $\rho (= e^{-m\pi})$ telle que, pour chaque valeur de ξ moindre en valeur absolue que ρ et pour chaque ξ' plus grand en valeur absolue que $\frac{1}{\rho}$, il subsiste des inégalités

$$(b) \quad |\Phi(s)e^{s\pi i}| = \left| \sum_{v=-\infty}^{\infty} A_v \xi^{v+1} \right| < \delta',$$

$$(b') \quad |\Phi(s)e^{-s\pi i}| = \left| \sum_{v=-\infty}^{\infty} A_v \xi'^{2v-1} \right| < \delta',$$

δ' étant une quantité positive donnée d'avance. Or il suit de (b) qu'on a nécessairement

$$A_n = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

et l'on obtient de même de (b')

$$A_{-n} = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

de sorte que nous aurons

$$\Phi(s) = A_0,$$

c'est-à-dire que la fonction $\Phi(s)$ ne dépend point de s . La formule (5) nous donne d'ailleurs

$$B(s, t) = \frac{\Gamma(s) A_0}{\Gamma(s-t)},$$

d'où l'on conclut aisément que l'on a

$$A_0 = \Gamma(t),$$

de sorte qu'il vient

$$B(s, t) = \frac{\Gamma(s) \Gamma(t)}{\Gamma(s-t)},$$

ce qui est la formule dont nous avions en vue la démonstration.

Démonstration de la loi d'inertie des formes quadratiques;
par M. DE PRESLE (1).

(Séance du 18 mai 1887.)

Si une forme quadratique est décomposée en une somme de carrés de formes linéaires indépendantes, le nombre des carrés affectés du signe plus et le nombre des carrés affectés du signe moins sont invariables.

Désignons par $x_1, x_2, \dots, x_m$ les variables dont le nombre est m , par U la forme quadratique, par n le nombre des formes linéaires, qui est invariable, et considérons deux décompositions différentes en sommes de carrés de formes linéaires indépendantes. Dans la première décomposition, désignons par $P_1, P_2, \dots, P_\alpha$ les formes linéaires dont les carrés sont positifs, par $Q_1, Q_2, \dots, Q_\beta$ les formes linéaires dont les carrés sont négatifs; dans la seconde décomposition, désignons les mêmes choses par les mêmes lettres accentuées, nous aurons

$$(1) \quad \begin{cases} U = P_1^2 + P_2^2 + \dots + P_\alpha^2 - Q_1^2 - Q_2^2 - \dots - Q_\beta^2 \\ \quad = P_1'^2 + P_2'^2 + \dots + P_{\alpha'}'^2 - Q_1'^2 - Q_2'^2 - \dots - Q_{\beta'}'^2. \end{cases}$$

Remarquons que l'on a

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = n.$$

Il s'agit de démontrer que l'on doit avoir

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta'.$$

Si ces égalités n'avaient pas lieu, on aurait

$$\alpha + \beta' < \alpha' + \beta \quad \text{ou} \quad \alpha + \beta' > \alpha' + \beta.$$

Supposons

$$\alpha + \beta' < \alpha' + \beta,$$

(1) Le présent Travail suppose connue la théorie de la résolution des équations linéaires de M. E. Rouché, publiée dans le *Journal de l'École Polytechnique* en 1882.

on en déduit

$$\alpha + \beta' < n.$$

L'équation (1) peut s'écrire

$$(2) \quad \begin{cases} P_1^2 + P_2^2 + \dots + P_\alpha^2 + Q_1'^2 + Q_2'^2 + \dots + Q_{\beta'}^2 \\ = P_1'^2 + P_2'^2 + \dots + P_\alpha'^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + \dots + Q_\beta^2. \end{cases}$$

Considérons les équations linéaires

$$(3) \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad \dots, \quad P_\alpha = 0; \quad Q_1' = 0, \quad Q_2' = 0, \quad \dots, \quad Q_{\beta'} = 0;$$

si on les résout par rapport aux variables $x_1, x_2, \dots, x_m$, elles sont satisfaites par une infinité de systèmes de valeurs de ces variables, et le degré d'indétermination est $m - k$, k étant le degré du déterminant principal des coefficients des variables dans les équations (3). Or k est au plus égal à $\alpha + \beta'$ qui est moindre que n ; donc le degré d'indétermination est supérieur à $m - n$.

Pour chacun des systèmes des valeurs des variables satisfaisant aux équations (3), les fonctions linéaires du second membre de l'équation (2) sont nulles, et l'on a

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \dots, \quad Q_\beta = 0,$$

les valeurs satisfont donc aux équations

$$(4) \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad \dots, \quad P_\alpha = 0; \quad Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \dots, \quad Q_\beta = 0.$$

Mais le déterminant principal des coefficients des variables $x_1, x_2, \dots, x_m$, dans les équations (4), est de degré n , si on les résout par rapport à ces variables, le degré d'indétermination est $m - n$; elles ne peuvent donc pas être satisfaites par des systèmes dont l'indétermination est d'un degré supérieur à $m - n$.

Ainsi il n'est pas possible de supposer

$$\alpha + \beta' < n.$$

On ne peut avoir

$$\alpha + \beta' > n,$$

car on en déduirait

$$\alpha' + \beta < n.$$

et un raisonnement identique au précédent prouverait l'impossibilité de cette hypothèse.

On aura donc

$$\alpha + \beta' = \alpha' + \beta = n;$$

ces équations rapprochées des équations

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = n$$

donnent

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta'.$$

C. Q. F. D.

Lettre de M. Tissot sur une Note insérée au Bulletin.

M. Tissot a adressé à l'un des secrétaires de la Société la Lettre suivante :

« A propos de la Note de M. Laisant *Sur les transformations planes non isogonales* insérée dans le dernier numéro du *Bulletin*, permettez-moi de rappeler que j'ai énoncé, il y a longtemps, les propriétés fondamentales de ces transformations (t. XLIX des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*) et que, depuis, j'en ai développé les conséquences, au point de vue de la déformation, dans un *Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques*, édité par M. Gauthier-Villars en 1881. Le parti que M. Ulysse Dini a tiré de ces propriétés pour établir une théorie nouvelle de la courbure des surfaces (*Volumi dell' Accademia dei XL*, 3^e série t. I), et une remarque dudit Mémoire au sujet des transformations dans l'espace, justifient d'ailleurs pleinement les considérations par lesquelles M. Laisant termine sa Note. »

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 3 NOVEMBRE 1886.

PRÉSIDENTE DE M. POINCARÉ.

Élections : M. Stieltjes, présenté par MM. de Presle et Poincaré, et M. Hauptmann, présenté par MM. Mercereau et Maurice Lévy, sont élus à l'unanimité.

Communications :

M. de Presle : *Sur la définition de l'intégrale définie.*

M. Fouret : *Sur certains mouvements dans lesquels les arcs d'une courbe sont décrits dans le même temps que les cordes correspondantes.*

M. Humbert : *Sur le théorème d'Abel.*

SÉANCE DU 17 NOVEMBRE 1886.

PRÉSIDENTE DE M. ANDRÉ.

Élection : M. Duncan, présenté par MM. Craig et Poincaré, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. Fouret : *Sur certains déterminants.*

M. Humbert : *Sur les courbes gauches algébriques qui peuvent être des lignes de courbure de surfaces algébriques.*

SÉANCE DU 1^{er} DÉCEMBRE 1886.

PRÉSIDENCE DE M. POINCARÉ.

Communications :

M. de Presle : *Sur le produit de deux déterminants.*

M. Weill : *Sur les figures symétriques.*

SÉANCE DU 15 DÉCEMBRE 1886.

PRÉSIDENCE DE M. FOURET.

Élections : M. Brunel, présenté par MM. Appell et Poincaré, M. Thewiss, présenté par MM. Neuberg et Lemoine, MM. Liouville et Baberena, présentés par MM. Poincaré et Humbert, sont élus à l'unanimité.

M. Caspary, professeur au Collège Humboldt, à Berlin, assiste à la séance.

Communications :

M. Catalan : *Sur le dernier théorème de Fermat. — Sur l'application de la perspective aux séries. — Sur la formule*

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{1 + X + \sqrt{X^2 + 1}} = a,$$
 où X est une fonction entière impaire de x.

M. Caspary : *Sur les surfaces podaires et directrices.*

SÉANCE DU 5 JANVIER 1887.

PRÉSIDENCE DE M. POINCARÉ.

La Société procède au renouvellement de son Bureau.

Communications :

M. Poincaré : *Sur le problème de la distribution électrique.*

SÉANCE DU 19 JANVIER 1887.

PRÉSIDENCE DE M. FOURET.

Communications :

M. Laisant : *Sur les transformations isogonales et non isogonales.*

M. Humbert : *Sur les intégrales algébriques.*

SÉANCE DU 2 FÉVRIER 1887.

PRÉSIDENCE DE M. FOURET.

Communications :

M. Neu, Élève à l'École Polytechnique : *Sur un appareil destiné à tracer la symétrie d'une courbe par rapport à un axe.*

M. Laisant : *Sur le théorème de d'Alembert.*

M. Perrin : *Sur la théorie des formes algébriques à p variables et en particulier sur le système de deux formes quadratiques ternaires.*

M. Simonnet : *Sur certaines questions de combinaisons.*

M. L. Lévy : *Sur les équations aux dérivées partielles de la forme $s + ap + bq + cz = 0$ et sur une application géométrique.*

SÉANCE DU 16 FÉVRIER 1887.

PRÉSIDENCE DE M. FOURET.

Élection : M. Caspary, présenté par MM. Fouret et Poincaré, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. de Presle : *Sur la résultante de deux forces égales.*

M. Humbert : *Sur les caustiques par réflexion des courbes algébriques.*

SÉANCE DU 2 MARS 1887.

PRÉSIDENCE DE M. FOURET.

La séance est consacrée à la discussion d'un projet de modification aux statuts de la Société, dans le but d'obtenir la reconnaissance d'utilité publique.

SÉANCE DU 16 MARS 1887.

PRÉSIDENCE DE M. FOURET.

Communications :

M. Humbert : *Sur les épicycloïdes.*

M. Caspary : *Sur les fonctions θ .*

M. Fouret : *Sur les épicycloïdes.*

SÉANCE DU 6 AVRIL 1887.

PRÉSIDENCE DE M. FOURET.

M. Carvalho, présenté par MM. Fouret et Humbert, est élu à l'unanimité.

M. Klein, Professeur à l'Université de Göttingue, assiste à la séance.

Communications :

M. Collignon : *Sur un procédé graphique d'évaluation des aires.*

M. Klein : *Sur la résolution de l'équation du vingt-septième degré dont dépendent les vingt-sept droites d'une surface du troisième ordre.*

M. Kœnigs : *Sur les coordonnées sphériques et les complexes linéaires de cercles.*

M. Humbert : *Sur certaines courbes gauches.*

M. Caspary : *Sur les tétraèdres desmiques.*

SÉANCE DU 20 AVRIL 1887.

PRÉSIDENTE DE M. FOURET.

Communications :

M. Caspary : *Sur un mode de génération des courbes dans l'espace.*

M. Vicaire : *Sur une propriété des trajectoires lumineuses dans un milieu hétérogène.*

M. Fouret : *Sur une Note insérée par lui au Bulletin, relative à certains déterminants. — Sur une Note de M. d'Ocagne relative à l'emploi d'un signe conventionnel nouveau en Algèbre. — Sur un problème de Mécanique.*

SÉANCE DU 4 MAI 1887.

PRÉSIDENTE DE M. FOURET.

Élection : M. Ibrahim-Effendi, présenté par MM. Lemoine et Humbert, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. Laisant : Présentation d'une Note de M. Laquière : *Sur la construction des points communs à une droite et à une conique.*

M. Humbert : *Sur les surfaces de direction.*

M. André : *Sur les aires des sections faites dans certaines surfaces par des plans parallèles.*

SÉANCE DU 18 MAI 1887.

PRÉSIDENCE DE M. FOURET.

Communications :

M. de Presle : *Sur la loi de l'inertie dans les formes quadratiques.*

M. Simonnet : *Sur la théorie de l'élimination.*

M. Fouret : *Sur les expressions de la forme $f(x)^{q(x)}$.*

SÉANCE DU 1^{er} JUIN 1887.

PRÉSIDENCE DE M. FOURET.

Communications :

M. André : *Sur la théorie des formes quadratiques.*

M. Humbert : *Sur les arcs des courbes planes et les aires des surfaces.*

M. Fouret : *Sur la pression exercée par un liquide sur un cylindre de révolution immergé.*

SÉANCE DU 13 JUIN 1887.

PRÉSIDENCE DE M. FOURET.

Élection : M. le général Teyfik-Pacha, présenté par MM. Lemoine et Collignon, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. Caspary : *Sur les invariants et covariants d'un système de formes. — Sur les cubiques gauches.*

M. Carvallo : *Sur la théorie du flux de chaleur.*

SÉANCE DU 6 JUILLET 1887.

PRÉSIDENTE DE M. ANDRÉ.

Communications :

M. Caspary : *Sur les cubiques gauches.*

SÉANCE DU 20 JUILLET 1887.

PRÉSIDENTE DE M. FOURET.

Élection : M. Ignacio Beyens présenté par MM. Picquet et André, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. Caspary : *Sur les principes généraux sur les unités et leur application à la démonstration de théorèmes de MM. André et Fouret.*

M. Carvallo : *Sur l'application de l'addition des vecteurs à la théorie des forces parallèles.*

Théorème sur les formes quadratiques;
par M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

(Séance du 1^{er} juin 1887.)

1. Nous considérons, dans le présent travail, une forme quadratique à n variables; nous supposons que cette forme soit la somme des carrés de p formes linéaires, indépendantes, des mêmes variables; et nous nous proposons de démontrer le théorème général suivant :

THÉORÈME. — *Si l'on considère, d'une part, le système des n équations linéaires et homogènes à n inconnues qu'on obtient en égalant à zéro les n dérivées partielles de la forme quadra-*

Réciproquement, toute solution du système (1) est une solution du système (2).

En effet, les valeurs des inconnues qui constituent cette solution du système (1), annulant les premiers membres des cinq identités (λ), annulent aussi les seconds, de telle sorte que, si l'on désigne par A_0, B_0, C_0 les valeurs que prennent A, B, C pour ces valeurs des cinq inconnues, ces trois valeurs A_0, B_0, C_0 constituent une solution du système des cinq équations linéaires et homogènes à trois inconnues

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 A + b_1 B + c_1 C = 0, \\ a_2 A + b_2 B + c_2 C = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots, \\ a_5 A + b_5 B + c_5 C = 0. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5, \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5, \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{array}$$
$$\begin{array}{lll} a_1 & b_1 & c_1, \\ a_2 & b_2 & c_2, \\ a_3 & b_3 & c_3, \\ a_4 & b_4 & c_4, \\ a_5 & b_5 & c_5 \end{array}$$

E

Donc, dans le système (3), le déterminant principal des coefficients des inconnues est d'un ordre juste égal au nombre de ces inconnues; donc ce système d'équations linéaires et homogènes

n'admet qu'une solution unique, composée d'éléments tous nuls; donc on a

$$A_0 = 0,$$

$$B_0 = 0,$$

$$C_0 = 0,$$

ce qui nous prouve bien que toute solution du système (1) est une solution du système (2).

Ainsi, les systèmes (1) et (2) ont exactement les mêmes solutions, c'est-à-dire sont équivalents.

4. On peut, de ce théorème, tirer de nombreux corollaires. Nous en citerons seulement deux : les deux qui nous paraissent les plus importants.

5. COROLLAIRE I. — *Le déterminant principal des dérivées d'une forme quadratique est d'un ordre égal au nombre des carrés indépendants à la somme desquels on peut réduire cette forme.*

En effet, les systèmes (1) et (2) étant équivalents, leur degré d'indétermination est le même. Nous savons, de plus, que ce degré est égal, pour chaque système, à l'excès du nombre des inconnues sur l'ordre du déterminant principal. Comme le nombre des inconnues est le même dans les deux systèmes, l'ordre est le même aussi; et comme, finalement, dans le système (2), l'ordre du déterminant principal est égal au nombre des carrés indépendants, notre premier corollaire se trouve démontré.

6. COROLLAIRE II. — *Pour qu'une forme quadratique F se réduise à la somme des carrés de p formes linéaires indépendantes, il faut et il suffit que, dans les dérivées partielles de F, le déterminant principal soit d'un ordre égal à p.*

D'abord, cette condition est nécessaire, car, si la forme F est la somme de p carrés indépendants, d'après le corollaire précédent le déterminant principal est d'un ordre égal à p.

Cette condition, d'ailleurs, est suffisante. Supposons, en effet, que le déterminant principal des dérivées soit d'un ordre égal à p.

Si la forme quadratique considérée peut se réduire à une somme de carrés indépendants, le nombre de ces carrés, d'après le corollaire précédent, ne peut être que p . Or cette réduction, on le sait, est toujours possible. Donc la condition énoncée est suffisante, et notre second corollaire se trouve démontré.

7. Le théorème et les corollaires qui précèdent ont été présentés, pour la première fois, à la Société philomathique de Paris, dans sa séance du 12 mars 1887. Nous ne prétendons point qu'ils ajoutent rien d'essentiel à la théorie des formes quadratiques; mais nous nous estimerions très heureux si l'on jugeait qu'ils peuvent être introduits dans l'exposition de cette théorie, et y apporter quelque abréviation ou simplification.

Sur le coefficient du terme général dans certains développements;
par M. A.-H. ANGLIN.

(Séance du 15 juin 1887.)

La présente Note a pour objet de compléter les résultats obtenus par l'auteur, dans un Mémoire *Sur le coefficient du terme général dans certains développements*, publié en 1886 dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*.

Rappelons sommairement un théorème obtenu dans ce Mémoire, et auquel on aura souvent à se reporter : ce théorème est exprimé par l'équation suivante

$$(1 + ax + \dots + a^n x^n)(1 + bx + \dots + b^n x^n)(1 + cx + \dots + c^n x^n) \\ = 1 + h_1 x + h_2 x^2 + \dots + h_n x^n + (h_{n+1} - s_{n+1})x^{n+1} \\ + (h_{n+2} - s_{n+1}h_1)x^{n+2} + \dots + (h_{n+m} - s_{n+1}h_{m-1})x^{n+m} + \dots,$$

où s_r représente la somme $a^r + b^r + c^r$, et h_n la somme des produits homogènes de degré n , des lettres a, b, c et de leurs puissances.

Le coefficient de x^{2n+p} dans ce développement peut être exprimé d'une autre manière plus commode : ce coefficient est en



effet celui de x^{2n+p} dans le produit de

$$a^n x^n (1 + a^{-1} x^{-1} + \dots + a^{-n} x^{-n})$$

par deux expressions analogues en b et c ; il est donc égal à $a^n b^n c^n$ multiplié par le coefficient de x^{2n+p} dans le produit

$$(1 + a^{-1} x^{-1} + \dots + a^{-n} x^{-n}) \times (1 + b^{-1} x^{-1} + \dots + b^{-n} x^{-n}) (1 + c^{-1} x^{-1} + \dots + c^{-n} x^{-n}),$$

c'est-à-dire finalement à $(abc)^n h'_{n-p}$, où h'_n est la somme des produits homogènes de degré n , de $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ et de leurs puissances.

Cela posé, considérons la formule démontrée dans le Mémoire précité

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)} = 1 + h_1 x + \dots + h_n x^n + h_{n+1} x^{n+1} + \dots$$

Dans ce Mémoire, nous avons obtenu, toutes les fois que n est multiple de m , la somme de la série

$$\dots h_n x^n + h_{n+m} x^{n+m} + \dots + h_{n+rm} x^{n+rm} + \dots$$

Nous allons donner un résultat analogue, quelle que soit la valeur de n , et en faire une application semblable à celle que nous avons faite dans le cas précité.

Proposons-nous, pour commencer, de trouver la somme de la série

$$\dots + h_n x^n + h_{n+3} x^{n+3} + \dots + h_{n+3r} x^{n+3r} + \dots$$

pour toutes les valeurs de n .

Dans l'équation

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)} = \dots + h_n x^n + h_{n+1} x^{n+1} + \dots,$$

remplaçons x par xy et supposons n de la forme $3m+s$. Nous avons

$$\frac{1}{y^s(1-axy)\dots} = \dots + h x^n y^{3m} + \dots + h_{n+3} x^{n+3} y^{3m+3} + \dots + h_{n+6} x^{n+6} y^{3m+6} + \dots;$$

d'où, faisant successivement y égal à α , β , γ (racines cubiques de l'unité), ajoutant les résultats et observant que $\alpha^r + \beta^r + \gamma^r = 0$, sauf quand r est un multiple de 3, auquel cas la valeur de cette

expression est 3, nous aurons

$$3(\dots + h_n x^n + h_{n+3} x^{n+3} + h_{n+6} x^{n+6} + \dots + h_{n+3r} x^{n+3r} + \dots) \\ = \frac{1}{\alpha^s(1-a\alpha x)\dots} + \frac{1}{\beta^s(1-a\beta x)\dots} + \frac{1}{\gamma^s(1-a\gamma x)\dots},$$

où l'exposant s représente 0, 1 ou 2 selon que n est de la forme $3m$, $3m+1$ ou $3m+2$.

Lorsque le second membre de cette équation est réduit, le dénominateur peut se mettre sous la forme

$$(1-a^3x^3)(1-b^3x^3)(1-c^3x^3)$$

et le numérateur est la somme de trois termes semblables, dont le premier est le produit de

$$\alpha^{-s}(1-a\beta x)(1-a\gamma x)$$

par deux expressions analogues où b et c remplacent a . Or on a

$$(1-a\beta x)(1-a\gamma x) = 1 + a\alpha x + a^2x^2\alpha^2;$$

le premier terme du numérateur peut donc s'écrire

$$\alpha^{-s}(1 + a\alpha x + a^2x^2\alpha^2)(1 + b\alpha x + b^2x^2\alpha^2)(1 + c\alpha x + c^2x^2\alpha^2)$$

ou

$$\alpha^{-s}(1 + A_1\alpha x + A_2x^2\alpha^2 + \dots + A_6x^6\alpha^6);$$

le deuxième et le troisième ne diffèrent du premier que par la substitution de β et γ à α .

Ajoutant ces trois termes et faisant successivement $s=0, 1$ et 2 , les valeurs correspondantes du numérateur deviennent

$$3(1 + A_3x^3 + A_6x^6), \quad 3(A_1x + A_4x^4) \quad \text{et} \quad 3(A_2x^2 + A_5x^5),$$

et l'on a ainsi

$$(F) \left\{ \begin{array}{l} \dots + h_n x^n + h_{n+3} x^{n+3} + h_{n+6} x^{n+6} + \dots + h_{n+3r} x^{n+3r} + \dots \\ = \frac{B_3}{(1-a^3x^3)(1-b^3x^3)(1-c^3x^3)}, \end{array} \right.$$

où, en vertu du lemme, B_3 représente

$$1 + (h_3 - s_3)x^3 + \mu^2x^6, \quad h_1x + \mu^2h'_2x^4 \quad \text{ou} \quad h_2x^2 + \mu^2h'_1x^5,$$

selon que n est de la forme

$$3m, \quad 3m+1 \quad \text{ou} \quad 3m+2,$$

μ désignant le produit abc .

On peut voir maintenant, comme dans le travail déjà cité, qu'en multipliant successivement chaque membre de l'équation fondamentale

$$a^{n+1}(b-c) + b^{n+1}(c-a) + c^{n+1}(a-b) = kh_n,$$

où k représente

$$a^1(b-c) + b^1(c-a) + c^1(a-b),$$

par

$$a^3 + b^3 + c^3 \quad \text{ou} \quad s_3,$$

on obtient l'équation

$$\begin{aligned} a^{n+1}(b^3 + c^3)^r(b-c) + b^{n+1}(c^3 + a^3)^r(c-a) + c^{n+1}(a^3 + b^3)^r(a-b) \\ = k(s_3 - 1)^r [h]_{n+3r}^n, \end{aligned}$$

où $(s_3 - 1)^r [h]_{n+3r}^n$ représente la suite

$$\begin{aligned} s_3^r h_n - r s_3^{r-1} h_{n+3} + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} s_3^{r-2} h_{n+6} \\ - \frac{r(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} s_3^{r-3} h_{n+9} + \dots + (-1)^r h_{n+3r}. \end{aligned}$$

Développant $(s_3 x^3 - 1)^r$, on voit, en s'appuyant sur la formule (F), que, pour toutes valeurs de n , la série précédente est le coefficient de x^{n+3r} dans le développement de

$$\frac{B_3(s_3 x^3 - 1)^r}{(1 - a^3 x^3)(1 - b^3 x^3)(1 - c^3 x^3)};$$

ce coefficient est donc égal à l'expression

$$\frac{a^{n+1}(b^3 + c^3)^r(b-c) + b^{n+1}(c^3 + a^3)^r(c-a) + c^{n+1}(a^3 + b^3)^r(a-b)}{a^1(b-c) + b^1(c-a) + c^1(a-b)}.$$

Arrivons maintenant au cas général; pour obtenir la somme des séries

$$\dots + h_n x^n + h_{n+m} x^{n+m} + \dots + h_{n+mr} x^{n+mr} + \dots$$

pour toutes valeurs de n , on remplace x par xy dans l'équation

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)} = \dots + h_n x^n + h_{n+1} x^{n+1} + h_{n+2} x^{n+2} + \dots,$$

et l'on suppose n de la forme

$$mp + s.$$

On a

$$\frac{1}{y^s(1-axy)\dots} = \dots + h_n x^n y^{mp} + \dots + h_{n+m} x^{n+m} y^{mp+m} + \dots \\ + h_{n+2m} x^{n+2m} y^{mp+2m} + \dots$$

Faisant ensuite y successivement égal à chacune des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, et ajoutant les résultats de ces substitutions, en observant que $\Sigma(\alpha_i^r) = 0$, sauf dans le cas où r est un multiple de m , auquel cas $\Sigma(\alpha_i^r) = m$, on obtient

$$m(\dots + h_n x^n + h_{n+m} x^{n+m} + \dots + h_{n+mr} x^{n+mr} + \dots) \\ = \frac{1}{\alpha_1^s(1-\alpha_1 x)\dots} + \frac{1}{\alpha_2^s(1-\alpha_2 x)\dots} + \dots + \frac{1}{\alpha_m^s(1-\alpha_m x)\dots};$$

l'indice s est égal à 0, 1, 2, ... ou $m-1$ selon que n est de la forme

$$mp, \quad mp+1, \quad mp+2, \quad \dots, \quad mp+m-1.$$

Le second membre de l'équation étant réduit au même dénominateur, ce dénominateur sera

$$(-1)^{(m-1)s}(1-a^m x^m)(1-b^m x^m)(1-c^m x^m);$$

et le numérateur se composera de la somme de m termes semblables, le premier étant le produit de

$$(-1)^{(m-1)s} \alpha_1^{-s} (1-a\alpha_1 x)(1-a\alpha_2 x)\dots(1-a\alpha_m x)$$

par deux autres expressions semblables où b et c remplacent a . On peut facilement montrer que

$$(1-a\alpha_2 x)(1-a\alpha_3 x)\dots(1-a\alpha_m x) \\ = 1 + ax\alpha_1 + a^2 x^2 \alpha_1^2 + \dots + (ax\alpha_1)^{m-1};$$

et ainsi le premier terme du numérateur est égal au produit de α_1^{-s} par les expressions

$$1 + ax\alpha_1 + a^2 x^2 \alpha_1^2 + a^3 x^3 \alpha_1^3 + \dots + (ax\alpha_1)^{m-1}, \\ 1 + bx\alpha_1 + b^2 x^2 \alpha_1^2 + b^3 x^3 \alpha_1^3 + \dots + (bx\alpha_1)^{m-1}, \\ 1 + cx\alpha_1 + c^2 x^2 \alpha_1^2 + c^3 x^3 \alpha_1^3 + \dots + (cx\alpha_1)^{m-1};$$

il est donc de la forme

$$\alpha_1^{-s} [1 + A_1 x\alpha_1 + A_2 x^2 \alpha_1^2 + A_3 x^3 \alpha_1^3 + \dots + A_{3m-3} (x\alpha_1)^{3m-3}],$$

tandis que le deuxième, le troisième, ..., le $m^{\text{ième}}$ terme du numérateur ont la même forme, en changeant seulement α_1 en $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$.

Ajoutant ces diverses expressions et faisant s successivement égal à 0, 1, 2, 3, ..., $m-1$, les valeurs correspondantes du numérateur complet deviennent pour $s=0, 1, \dots, m-3$

$$\begin{aligned} & m(1 + A_m x^m + A_{2m} x^{2m}), \\ & m(A_1 x + A_{m+1} x^{m+1} + A_{2m+1} x^{2m+1}), \\ & m(A_2 x^2 + A_{m+2} x^{m+2} + A_{2m+2} x^{2m+2}), \\ & \dots\dots\dots, \\ & m(A_{m-3} x^{m-3} + A_{2m-3} x^{2m-3} + A_{3m-3} x^{3m-3}), \end{aligned}$$

dont la dernière renferme la plus haute puissance possible de x ; tandis que les numérateurs correspondant aux deux dernières valeurs de s , soit $m-2$ et $m-1$, ont chacun seulement deux termes, soit

$$\begin{aligned} & m(A_{m-2} x^{m-2} + A_{2m-2} x^{2m-2}), \\ & m(A_{m-1} x^{m-1} + A_{2m-1} x^{2m-1}). \end{aligned}$$

Nous avons ainsi

$$(G) \left\{ \begin{aligned} & \dots + h_n x^n + h_{n+m} x^{n+m} + h_{n+2m} x^{n+2m} + \dots + h_{n+mr} x^{n+mr} + \dots \\ & = \frac{B_m}{(1 - a^m x^m)(1 - b^m x^m)(1 - c^m x^m)}, \end{aligned} \right.$$

où B_m représente

$$\begin{aligned} & 1 + (h_m - s_m) x^m + \mu^{m-1} h'_{m-3} x^{2m}, \\ & h_1 x + (h_{m+1} - s_m h_1) x^{m+1} + \mu^{m-1} h'_{m-4} x^{2m+1}, \\ & h_2 x^2 + (h_{m+2} - s_m h_2) x^{m+2} + \mu^{m-1} h'_{m-5} x^{2m+2}, \\ & \dots\dots\dots, \\ & h_{m-3} x^{m-3} + (h_{2m-3} - s_m h_{m-3}) x^{2m-3} + \mu^{m-1} h'_0 x^{3m-3}, \\ & \quad h_{m-2} x^{m-2} + \mu^{m-1} h'_{m-1} x^{2m-2} \quad (h'_0 \doteq 1), \\ & \quad h_{m-1} x^{m-1} + \mu^{m-1} h'_{m-2} x^{2m-1}, \end{aligned}$$

selon que n est de la forme

$$mp, \quad mp+1, \quad \dots, \quad mp+m-1.$$

On voit maintenant, comme plus haut, que l'on a

$$a^{n+2}(b^m + c^m)^r(b-c) + \dots = k(s_m - 1)^r [h]_{n+mr}^n,$$

où $(s_m - 1)^r [h]_{n+mr}^n$ représente la série

$$\begin{aligned} & s_m^r h_n - r s_m^{r-1} h_{n+m} + \frac{r(r-1)}{1.2} s_m^{r-2} h_{n+2m} \\ & - \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} s_m^{r-3} h_{n+3m} + \dots + (-1)^r h_{n+rm}. \end{aligned}$$

Si l'on développe $(s_m x^m - 1)^r$ on verra, en tenant compte de (G), que, pour toutes valeurs de n , la série précédente forme le coefficient de x^{n+mr} dans le développement de

$$\frac{B_m (s_m x^m - 1)^r}{(1 - a^m x^m)(1 - b^m x^m)(1 - c^m x^m)},$$

B_m représentant une des m expressions ci-dessus mentionnées et, par conséquent, ce coefficient est égal à l'expression

$$\frac{a^{n+1}(b^m + c^m)^r(b-c) + b^{n+1}(c^m + a^m)^r(c-a) + c^{n+1}(a^m + b^m)^r(a-b)}{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}.$$

Nous pouvons observer que, des précédentes expressions représentées par B_m , les deux dernières correspondent l'une à l'autre; tandis que des $m-2$ autres, la première et la dernière, la deuxième et l'avant-dernière, la troisième et l'antépénultième, etc., se correspondent respectivement, les indices de h et h' dans l'une étant les mêmes que ceux de h' et h dans l'autre.

Théorèmes de Trigonométrie; par M. C.-A. LAISANT.

(Séance du 2 novembre 1887.)

I. Si l'on a simultanément les deux relations linéaires suivantes, entre les cosinus d'autant d'arcs qu'on voudra

$$(1) \quad \begin{cases} A_1 \cos x_1 + A_2 \cos x_2 + \dots + A_n \cos x_n = 0, \\ A_1 \cos(x_1 + \alpha) + A_2 \cos(x_2 + \alpha) + \dots + A_n \cos(x_n + \alpha) = 0, \end{cases}$$

on aura aussi

$$(2) \quad A_1 \cos(x_1 + \theta) + A_2 \cos(x_2 + \theta) + \dots + A_n \cos(x_n + \theta) = 0,$$

θ étant une quantité arbitraire quelconque.

Il suffit, pour démontrer ce théorème, de remarquer que les relations (1), si l'on considère $A_1, A_2, \dots, A_n$ comme représentant des lignes droites, expriment que les projections d'un certain contour sur deux directions différentes sont nulles, et, par conséquent, que ce contour est fermé. Donc sa projection sur toute

autre direction est aussi nulle, et conséquemment on a la relation (2).

Il est à peine utile de faire remarquer que α doit différer de $k\pi$, k étant un nombre entier, sans quoi les relations (1) se réduiraient à une seule.

On a aussi

$$(3) \quad A_1 \sin(x_1 + \theta) + A_2 \sin(x_2 + \theta) + \dots + A_n \sin(x_n + \theta) = 0,$$

car il suffit de remplacer θ par $\frac{\pi}{2} + \theta$ dans la relation (2) pour obtenir ce résultat.

II. Si l'on a les deux relations

$$(4) \quad \begin{cases} A_1 \sin x_1 + A_2 \sin x_2 + \dots + A_n \sin x_n = 0, \\ A_1 \sin(x_1 + \alpha) + A_2 \sin(x_2 + \alpha) + \dots + A_n \sin(x_n + \alpha) = 0, \end{cases}$$

on aura aussi

$$(3) \quad A_1 \sin(x_1 + \theta) + A_2 \sin(x_2 + \theta) + \dots + A_n \sin(x_n + \theta) = 0,$$

$$(2) \quad A_1 \cos(x_1 + \theta) + A_2 \cos(x_2 + \theta) + \dots + A_n \cos(x_n + \theta) = 0.$$

En effet, les formules (4) peuvent s'écrire

$$A_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x_1\right) + \dots + A_n \cos\left(\frac{\pi}{2} + x_n\right) = 0,$$

$$A_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x_1 + \alpha\right) + \dots + A_n \cos\left(\frac{\pi}{2} + x_n + \alpha\right) = 0,$$

et il suffit d'appliquer le théorème précédent.

III. Si l'on a les deux relations

$$(5) \quad \begin{cases} A_1 \sin x_1 + A_2 \sin x_2 + \dots + A_n \sin x_n = 0, \\ A_1 \cos x_1 + A_2 \cos x_2 + \dots + A_n \cos x_n = 0, \end{cases}$$

elles subsisteront encore si l'on remplace $x_1, x_2, \dots, x_n$ par $x_1 + \theta, x_2 + \theta, \dots, x_n + \theta$.

Il suffit, dans le théorème II, de faire $\alpha = \frac{\pi}{2}$ pour obtenir le résultat énoncé.

IV. Il est possible que l'on ait dans chacune des deux relations du théorème III des sinus et des cosinus, sans que ce théorème cesse d'être applicable, au moyen d'une préparation conve-

nable. Si, par exemple, on a les deux termes correspondants $A_p \cos x_p$ et $A_p \sin x_p$, on peut respectivement les écrire

$$A_p \sin\left(\frac{\pi}{2} - x_p\right) \quad \text{et} \quad A_p \cos\left(\frac{\pi}{2} - x_p\right).$$

Si les signes diffèrent au lieu de se correspondre, comme, par exemple, dans $+A_p \sin x_p$ et $-A_p \cos x_p$, on écrira

$$-A_p \sin(-x_p) \quad \text{et} \quad -A_p \cos(-x_p).$$

Si enfin l'une des deux relations (5), dans le théorème III, a un second membre b et que l'autre ait pour second membre zéro, on pourra encore appliquer ce théorème en écrivant

$$b = b \sin \frac{\pi}{2} = b \cos 0,$$

$$0 = b \cos \frac{\pi}{2} = b \sin 0.$$

V. On remarquera que toutes les considérations qui précèdent et, conséquemment, les propositions I, II et III, ne s'appuient que sur la théorie des projections et sur la définition des lignes trigonométriques. On peut donc s'en servir pour établir, sans aucun cercle vicieux, certaines formules fondamentales de la Trigonométrie.

A titre d'exemple, nous allons donner ici, dans toute leur généralité, les formules qui fournissent le sinus et le cosinus de la somme de deux arcs. A cet effet, écrivons les deux identités $\sin x = \sin x$, $\cos x = \cos x$ sous la forme

$$1. \sin x = \sin x \sin \frac{\pi}{2} + \cos x \sin 0,$$

$$1. \cos x = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \cos 0,$$

Le théorème III s'applique, et, en remplaçant θ par y , on a

$$\sin(x+y) = \sin x \sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + \cos x \sin y,$$

$$\cos(x+y) = \sin x \cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + \cos x \cos y,$$

c'est-à-dire

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$\cos(x+y) = -\sin x \sin y + \cos x \cos y.$$

Voici une autre application. On a, dans un triangle, les relations

$$\begin{aligned} a \cos B + b \cos A &= c, \\ b \cos C + c \cos B &= a, \end{aligned}$$

que fournit la seule théorie des projections.

On peut les écrire

$$\begin{aligned} a \cos B + b \cos(-A) + c \cos(-\pi) &= 0, \\ a \cos \pi + b \cos C + c \cos(-B) &= 0, \end{aligned}$$

et sous cette forme on voit qu'elles rentrent dans l'énoncé du théorème I, car les différences des arcs sont

$$\pi - B = C + A = -B + \pi.$$

Donc

$$\begin{aligned} a \cos(B + \theta) + b \cos(\theta - A) + c \cos(\theta - \pi) &= 0, \\ a \sin(A + \theta) + b \sin(\theta - A) + c \sin(\theta - \pi) &= 0. \end{aligned}$$

En particulier, la dernière formule, si l'on fait $\theta = 0$, donne

$$a \sin B = b \sin A.$$

VI. On peut étendre aisément la plupart des considérations précédentes aux fonctions hyperboliques.

Si l'on a deux relations de la forme

$$(6) \quad \begin{cases} A_1 \operatorname{Ch} x_1 + A_2 \operatorname{Ch} x_2 + \dots + B_1 \operatorname{Sh} y_1 + B_2 \operatorname{Sh} y_2 + \dots = 0, \\ A_1 \operatorname{Sh} x_1 + A_2 \operatorname{Sh} x_2 + \dots + B_1 \operatorname{Ch} y_1 + B_2 \operatorname{Ch} y_2 + \dots = 0, \end{cases}$$

ces deux relations subsisteront lorsqu'on y remplacera les arcs $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ par $x_1 + \theta, x_2 + \theta, \dots, y_1 + \theta, y_2 + \theta, \dots$, θ étant une quantité arbitraire quelconque.

On le démontre en ajoutant, multipliant par e^θ , en soustrayant, multipliant par $e^{-\theta}$, puis en combinant par addition et soustraction les deux résultats.

De la sorte, on déduit immédiatement les formules d'addition des identités

$$\begin{aligned} 1. \operatorname{Sh} x &= \operatorname{Sh} x \operatorname{Ch} 0 + \operatorname{Ch} x \operatorname{Sh} 0, \\ 1. \operatorname{Ch} x &= \operatorname{Ch} x \operatorname{Sh} 0 + \operatorname{Ch} x \operatorname{Ch} 0; \end{aligned}$$

car, en ajoutant y , il vient

$$\begin{aligned}\text{Sh}(x+y) &= \text{Sh}y \text{Ch}y + \text{Ch}x \text{Sh}y, \\ \text{Ch}(x+y) &= \text{Sh}y \text{Sh}y + \text{Ch}x \text{Ch}y.\end{aligned}$$

Si deux termes sont de signes contraires, on les rendra de même signe comme ci-dessus en remplaçant $\text{Sh}x$ par $-\text{Sh}(-x)$ et $\text{Ch}x$ par $\text{Ch}(-x)$.

Si dans une relation il y a un second membre b et dans l'autre o , on écrira

$$b = b \cdot \text{Ch}o, \quad o = b \cdot \text{Sh}o,$$

ainsi qu'il a été fait dans l'exemple qui précède.

Enfin les théorèmes I et II s'appliquent, eux aussi, aux fonctions hyperboliques, et l'on obtient l'énoncé suivant :

Si l'on a simultanément les relations

$$(7) \quad A_1 \text{Ch}x_1 + A_2 \text{Ch}x_2 + \dots + B_1 \text{Sh}y_1 + B_2 \text{Sh}y_2 + \dots = o,$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 \text{Ch}(x_1 + \alpha) + A_2 \text{Ch}(x_2 + \alpha) + \dots \\ + B_1 \text{Sh}(y_1 + \alpha) + B_2 \text{Sh}(y_2 + \alpha) + \dots = o, \end{array} \right.$$

on aura aussi, θ étant quelconque,

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 \text{Ch}(x_1 + \theta) + A_2 \text{Ch}(x_2 + \theta) + \dots \\ + B_1 \text{Sh}(y_1 + \theta) + B_2 \text{Sh}(y_2 + \theta) + \dots = o, \end{array} \right.$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 \text{Sh}(x_1 + \theta) + A_2 \text{Sh}(x_2 + \theta) + \dots \\ - B_1 \text{Ch}(y_1 + \theta) + B_2 \text{Ch}(y_2 + \theta) + \dots = o. \end{array} \right.$$

En effet, si l'on multiplie la relation (7) par $\text{Ch}\alpha$, si l'on retranche de (8) et si l'on divise par $\text{Sh}\alpha$, on tombe sur la seconde des relations (6), et il n'y a plus qu'à appliquer le théorème précédent.

Ces diverses propositions peuvent être utilisées dans les calculs auxquels conduisent certaines questions de Géométrie analytique.

Sur les hypothèses fondamentales de la Géométrie;
par M. H. POINCARÉ.

(Séance du 2 novembre 1887.)

C'est surtout en logique que rien ne se tire de rien; dans toute démonstration, la conclusion suppose des prémisses. Les sciences mathématiques doivent donc reposer sur un certain nombre de propositions indémontrables. On peut discuter si l'on doit donner à ces propositions le nom d'*axiomes*, d'*hypothèses* ou de *postulat*, si l'on doit les considérer comme des faits expérimentaux, ou comme des jugements analytiques, ou encore comme des jugements synthétiques *a priori*; mais leur existence même n'est pas douteuse.

Nous sommes donc conduits à nous poser le problème suivant, intéressant au point de vue logique : quelles sont les prémisses de la Géométrie, les propositions indémontrables sur lesquelles repose cette science, en excluant, bien entendu, les propositions qui sont déjà nécessaires pour fonder l'Analyse? car nous regardons les résultats de l'Algèbre et de l'Analyse pure comme déjà connus au moment où l'on aborde l'étude de la Géométrie. Bien que ce problème ait depuis longtemps préoccupé les géomètres, la question ne saurait être regardée comme épuisée.

On a établi que le *postulatum* d'Euclide est indémontrable. Mais ce postulat ne peut être la proposition unique sur laquelle repose toute la Géométrie; car bien des résultats peuvent être démontrés sans lui.

On ne saurait se contenter non plus des propositions énoncées, sous le nom d'*axiomes*, au début des Traités de Géométrie. Si on les soumet à un examen sérieux, on reconnaîtra qu'aucun de ces axiomes ne doit prendre rang parmi les prémisses de la Géométrie. Les uns sont des propositions déjà nécessaires pour fonder l'Analyse, et, si ce sont des hypothèses (ce que l'on peut contester), ce ne sont certainement pas des hypothèses propres à la Géométrie; tel est, par exemple, l'axiome suivant : *Deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles*. D'autres axiomes ne sont que des définitions; d'autres enfin ne peuvent

être regardés comme indémontrables, tel est, par exemple, le suivant : *La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.*

Mais, en dehors des axiomes explicitement énoncés, il y a un grand nombre d'hypothèses que l'on fait implicitement au début de la démonstration des différents théorèmes.

Mais ces hypothèses échappent généralement au lecteur, à moins qu'il ne soit particulièrement attentif; car, bien qu'elles ne soient pas évidentes, au point de vue de la pure logique, elles nous semblent telles par suite d'habitudes invétérées de nos sens et de notre esprit.

D'ailleurs ces hypothèses explicites ou implicites ne sont pas toutes indépendantes les unes des autres; on pourrait se contenter d'en introduire un moins grand nombre et les autres s'en déduiraient comme des conséquences.

Nous sommes donc amenés à poser le problème en ces termes : énoncer toutes les hypothèses nécessaires et n'énoncer que celles-là. Je crois que ce problème n'est pas encore résolu et je cherche à contribuer à sa solution.

Nous n'envisageons d'abord que la géométrie à deux dimensions, ou géométrie plane.

Géométries quadratiques.

Nous connaissons déjà trois géométries à deux dimensions :

1° La géométrie euclidienne, où la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits;

2° La géométrie de Riemann, où cette somme est plus grande que deux droits;

3° La géométrie de Lobatchevski, où elle est plus petite que deux droits.

Ces trois géométries reposent sur les mêmes hypothèses fondamentales, si l'on excepte le *postulatum* d'Euclide que la première admet et que les deux autres rejettent. De plus, le principe, d'après lequel deux points déterminent complètement une droite, comporte une exception dans la géométrie de Riemann et n'en comporte aucune dans les deux autres.

Quand on se borne à deux dimensions, la géométrie de Rie-

mann est susceptible d'une interprétation très simple; elle ne diffère pas, comme on le sait, de la géométrie sphérique, pourvu que l'on convienne de donner le nom de *droites* aux grands cercles de la sphère.

Je vais commencer par généraliser cette interprétation de façon à pouvoir l'étendre à la géométrie de Lobatchevski.

Considérons une surface du second ordre quelconque. Nous conviendrons de donner le nom de *droites* aux sections planes diamétrales de cette surface et le nom de *circonférences* aux sections planes non diamétrales.

Il reste à définir ce que l'on doit entendre par l'angle de deux droites qui se coupent ou par la longueur d'un segment de droite.

Par un point pris sur la surface faisons passer deux sections planes diamétrales (que nous sommes convenus d'appeler *droites*). Envisageons alors les tangentes à ces deux sections planes et les deux génératrices rectilignes de la surface qui passent par le point envisagé. Ces quatre droites (au sens ordinaire du mot) ont un certain rapport anharmonique. L'angle que nous cherchons à définir sera alors le logarithme de ce rapport anharmonique si les deux génératrices sont réelles, c'est-à-dire si la surface est un hyperboloïde à une nappe; dans le cas contraire, notre angle sera ce même logarithme divisé par $\sqrt{-1}$.

Considérons un arc de conique faisant partie d'une section plane diamétrale (c'est ce que nous sommes convenus d'appeler un *segment de droite*). Les deux extrémités de l'arc et les deux points à l'infini de la conique ont un certain rapport anharmonique comme tout système de quatre points situés sur une conique. Nous conviendrons alors d'appeler *longueur du segment* considéré le logarithme de ce rapport si la conique est une hyperbole et ce même logarithme divisé par $\sqrt{-1}$ si la conique est une ellipse.

Il y aura, entre les angles et les longueurs ainsi définis, un certain nombre de relations, qui constitueront un ensemble de théorèmes analogues à ceux de la géométrie plane.

Cet ensemble de théorèmes peut prendre le nom de *géométrie quadratique*, puisque notre point de départ a été la considération d'une quadrique ou surface du second ordre fondamentale.

Il y a plusieurs géométries quadratiques, car il y a plusieurs espèces de surfaces du second ordre.

Si la surface fondamentale est un ellipsoïde, la géométrie quadratique ne diffère pas de la géométrie de Riemann.

Si la surface fondamentale est un hyperboloïde à deux nappes, la géométrie quadratique ne diffère pas de celle de Lobatchevski.

Si cette surface est un paraboloïde elliptique, la géométrie quadratique se réduit à celle d'Euclide; c'est un cas limite des deux cas précédents.

Il est clair que nous n'avons pas épuisé la liste des géométries quadratiques; car nous n'avons considéré, ni l'hyperboloïde à une nappe, ni ses nombreuses dégénérescences.

Nous pouvons donc dire qu'il y a trois géométries quadratiques principales, qui correspondent aux trois espèces de surfaces du second ordre à centre.

Nous devons y ajouter d'ailleurs les géométries qui correspondent aux cas limites et parmi lesquelles prendra rang la géométrie d'Euclide.

Comment se fait-il donc que la géométrie de l'hyperboloïde à une nappe ait jusqu'ici échappé aux théoriciens? C'est qu'elle entraîne les propositions suivantes :

1° La distance de deux points situés sur une même génératrice rectiligne de la surface fondamentale est nulle.

2° Il y a deux sortes de droites correspondant, les premières aux sections diamétrales elliptiques, les autres aux sections diamétrales hyperboliques; il est impossible, par aucun mouvement réel, de faire coïncider une droite de la première sorte avec une droite de la seconde.

3° Il est impossible de faire coïncider une droite avec elle-même par une rotation réelle autour d'un de ses points, ainsi que cela a lieu dans la géométrie d'Euclide quand on fait tourner une droite de 180° autour d'un de ses points.

Tous les géomètres ont implicitement supposé que ces trois propositions sont fausses, et vraiment ces trois propositions sont trop contraires aux habitudes de notre esprit pour qu'en les niant les fondateurs de la géométrie aient cru faire une hypothèse et aient songé à l'énoncer.

Applications de la théorie des groupes.

D'après ce qui précède, le problème que j'ai posé au début de ce travail se décompose en deux parties :

1° Quelles sont les hypothèses communes à toutes les géométries quadratiques?

2° Quelles sont les hypothèses qui distinguent la géométrie d'Euclide des autres géométries quadratiques?

La seconde partie du problème peut être regardée comme résolue; nous n'avons donc à nous occuper que de la première partie.

Il y a deux hypothèses que l'on est obligé de faire au début de toute géométrie à deux dimensions et que l'on peut énoncer ainsi :

A. Le plan a deux dimensions.

B. La position d'une figure plane dans son plan est déterminée par trois conditions.

Les personnes peu familières avec les travaux récents des géomètres trouveront extraordinaire qu'on puisse tirer de pareilles prémisses des conclusions précises.

Mais ce résultat n'étonnera pas les mathématiciens qui ont lu les remarquables travaux de M. Sophus Lie sur la théorie des groupes. M. Lie démontre en effet un résultat, très surprenant au premier abord, et qui peut se traduire ainsi dans le langage géométrique :

Si la position d'une figure plane dans son plan dépend d'un nombre fini de conditions, le nombre de ces conditions ne peut surpasser huit.

Nous ferons d'ailleurs dans la suite de fréquents emprunts au Mémoire du savant norvégien.

Nous allons chercher quelles conséquences il est permis de tirer des deux hypothèses A et B.

Le plan ayant deux dimensions, la position d'un point dans son plan est déterminée par deux coordonnées x et y . Nous ne faisons, pour le moment, aucune hypothèse sur le choix du système des coordonnées; mais nous nous réservons de le déterminer plus complètement dans la suite.

Supposons qu'une figure plane se déplace; soient x, y les coordonnées primitives d'un point de cette figure; et x_1, y_1 les coordonnées de ce même point après le déplacement. On aura

$$\begin{aligned}x_1 &= \varphi(x, y, \alpha, \beta, \gamma), \\y_1 &= \psi(x, y, \alpha, \beta, \gamma),\end{aligned}$$

où φ et ψ sont deux fonctions de x et de y , et de trois paramètres α, β, γ , il y aura trois paramètres, puisque la position de la figure dépend de trois conditions.

L'opération

$$[x, y; \varphi(x, y, \alpha, \beta, \gamma), \psi(x, y, \alpha, \beta, \gamma)]$$

définira l'un des mouvements possibles d'une figure plane et l'ensemble de ces opérations ou mouvements devra former un *groupe*. Ce groupe, d'après le langage de M. Lie, sera continu et d'ordre 3, puisque les opérations dépendent de trois paramètres.

Parmi les opérations du groupe, on devra trouver l'opération identique. Par conséquent, pour certaines valeurs des paramètres α, β, γ , on devra avoir

$$\varphi = x, \quad \psi = y.$$

Nous pouvons toujours supposer que cela ait lieu pour

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Nous appellerons alors opération infinitésimale (ou mouvement infinitésimal) une opération par laquelle α, β, γ ont des valeurs infiniment petites et que nous pourrions écrire

$$\left(x, y; x + \alpha \frac{d\varphi}{d\alpha} + \beta \frac{d\varphi}{d\beta} + \gamma \frac{d\varphi}{d\gamma}; y + \alpha \frac{d\psi}{d\alpha} + \beta \frac{d\psi}{d\beta} + \gamma \frac{d\psi}{d\gamma}\right):$$

Dans cette expression on suppose, bien entendu, que, dans les dérivées $\frac{d\varphi}{d\alpha}, \frac{d\varphi}{d\beta}, \dots$, on a fait $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

M. Lie représente une pareille opération par la notation suivante

$$S = p \left(\alpha \frac{d\varphi}{d\alpha} + \beta \frac{d\varphi}{d\beta} + \gamma \frac{d\varphi}{d\gamma} \right) + q \left(\alpha \frac{d\psi}{d\alpha} + \beta \frac{d\psi}{d\beta} + \gamma \frac{d\psi}{d\gamma} \right),$$

de telle façon que, si l'on pose

$$A = p \frac{d\varphi}{d\alpha} + q \frac{d\psi}{d\alpha}, \quad B = p \frac{d\varphi}{d\beta} + q \frac{d\psi}{d\beta}, \quad C = p \frac{d\varphi}{d\gamma} + q \frac{d\psi}{d\gamma},$$

on ait, pour une opération infinitésimale quelconque,

$$S = \alpha A + \beta B + \gamma C.$$

A, B, C et S sont donc des fonctions de x , de y , de p et de q .

Les opérations A, B, C peuvent s'appeler les *substitutions fondamentales* et toute opération infinitésimale n'en est qu'une combinaison linéaire; le choix des substitutions fondamentales reste d'ailleurs arbitraire dans une certaine mesure; car on peut remplacer ces trois opérations A, B, C par trois quelconques de leurs combinaisons linéaires.

M. Lie a fait voir que, si l'on pose

$$[A, B] = \frac{dA}{dp} \frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dx} \frac{dB}{dp} + \frac{dA}{dq} \frac{dB}{dy} - \frac{dA}{dy} \frac{dB}{dq}$$

et si α et β sont deux quantités infiniment petites quelconques, l'opération

$$(\alpha A)(\beta B)(\alpha A)^{-1}(\beta B)^{-1},$$

qui fait forcément partie du groupe, est une substitution infinitésimale du second ordre, qui peut s'écrire

$$\alpha\beta[A, B].$$

Il résulte de là que $[A, B]$, $[A, C]$ et $[B, C]$ sont des combinaisons linéaires de A, B et C, et que l'on a

$$(1) \quad \begin{cases} [A, B] = \lambda A + \mu B + \nu C, \\ [A, C] = \lambda' A + \mu' B + \nu' C, \\ [B, C] = \lambda'' A + \mu'' B + \nu'' C. \end{cases}$$

Les coefficients λ, μ, ν sont des constantes; mais ils ne sont pas quelconques; car on doit avoir identiquement

$$(2) \quad [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

Ce qui précède contient le point de départ de toute la discussion, mais cette discussion peut être considérablement simplifiée:

1° Par un choix convenable du système des coordonnées x et y ;

2° Par un choix convenable des trois substitutions fondamentales A, B et C.

On peut d'abord choisir les substitutions fondamentales de telle

façon que

$$\lambda = \nu = 0$$

ou que

$$[A, B] = \mu B.$$

On peut ensuite choisir le système de coordonnées, de telle sorte que A se réduise à p , et par conséquent que l'on ait

$$[A, B] = \frac{dB}{dx} = \mu B.$$

Nous en déduirons pour B la forme suivante

$$B = e^{\mu x} [h \theta_1(y) + q \theta_2(y)].$$

Nous avons fait tout à l'heure une hypothèse sur le choix du système des coordonnées; mais cette hypothèse ne détermine pas complètement ce système.

Nous pouvons encore, sans que A cesse de se réduire à p , remplacer y par une fonction arbitraire de y et ajouter à x une fonction arbitraire de y .

Nous pouvons faire ce nouveau changement de coordonnées de façon à simplifier l'expression de B. Si θ_2 n'est pas nul, nous pouvons le faire de façon que $\theta_2 = 1$, $\theta_1 = 0$. Si θ_2 est nul, il restera nul après le changement de coordonnées, mais on pourra réduire θ_1 , soit à y , soit à 1. Nous sommes donc amenés à l'une des trois hypothèses suivantes :

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 1; \quad \theta_1 = 1, \quad \theta_2 = 0; \quad \theta_1 = y, \quad \theta_2 = 0.$$

Nous pouvons distinguer deux cas :

1° Ou bien μ est nul, ce qui signifie que les deux substitutions A et B sont permutables. (Remarquons en passant que l'hypothèse qu'il existe deux mouvements permutables peut être regardée comme un des énoncés du *postulatum* d'Euclide.)

On a alors, soit

$$A = p, \quad B = q;$$

soit

$$A = p, \quad B = yp.$$

2° Ou bien μ n'est pas nul. On a alors, soit

$$A = p, \quad B = qe^{\mu x},$$

soit

$$A = p, \quad B = pe^{\mu x}.$$

soit

$$A = p, \quad B = pye^{\mu x}.$$

Examinons successivement ces cinq cas :

Premier cas :

$$A = p, \quad B = q.$$

Les équations (1) se réduisent alors à

$$\frac{dC}{dx} = \lambda' p + \mu' q + \nu' C,$$

$$\frac{dC}{dy} = \lambda'' p + \mu'' q + \nu'' C.$$

Si ν' et ν'' ne sont pas nuls à la fois, les équations ne seront compatibles que si l'on a

$$\frac{\lambda'}{\lambda''} = \frac{\mu'}{\mu''} = \frac{\nu'}{\nu''}.$$

Il est permis alors de supposer que

$$\lambda' = \mu' = \lambda'' = \mu'' = 0,$$

d'où

$$C = e^{\nu'x + \nu''y}(ap + bq),$$

a et b étant deux constantes.

Le groupe

$$A = p, \quad B = q, \quad C = e^{\nu'x + \nu''y}(ap + bq)$$

définit une géométrie entièrement nouvelle. Pourquoi Euclide ne l'a-t-il pas rencontrée? ou plutôt quelle est l'hypothèse qu'il a faite implicitement et qui l'a empêché de rencontrer cette géométrie?

Une substitution infinitésimale quelconque a pour expression

$$\alpha p + \beta q + \gamma e^{\nu'x + \nu''y}(ap + bq).$$

Quels sont les points que cette substitution laisse immobiles? Ces points sont donnés par les équations

$$e^{\nu'x + \nu''y} = -\frac{\alpha}{\gamma a} = -\frac{\beta}{\gamma b},$$

d'où cette conclusion : si l'on n'a pas $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b}$, aucun point ne reste

immobile. Si l'on a $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b}$, une infinité de points demeurent immobiles.

Or il est bien aisé de se rendre compte qu'Euclide fait à chaque instant, sans l'énoncer, l'hypothèse suivante :

Si une figure plane ne quitte pas son plan et si deux de ses points restent immobiles, elle reste tout entière immobile.

C'est cette hypothèse qui nous forcera à rejeter la géométrie particulière qui est fondée sur la considération du groupe dont je viens de parler.

Si $\nu' = \nu'' = 0$, on trouve

$$C = p(\lambda'x + \lambda''y) + q(\mu'x + \mu''y),$$

et le groupe dérivé de A, B et C nous conduit à la géométrie d'Euclide.

Deuxième cas :

$$A = p, \quad B = yp.$$

On trouve alors, dans le cas le plus général,

$$C = [ax + f(y)]p + bq,$$

a et b étant des constantes et $f(y)$ une fonction arbitraire de y que l'on peut d'ailleurs supposer nulle si l'on choisit convenablement le système des coordonnées.

Une substitution infinitésimale quelconque s'écrit

$$(\alpha + \beta y + a\gamma x)p + (\gamma b)q.$$

Ce groupe doit encore être rejeté en vertu de l'hypothèse faite plus haut.

En effet, si γb n'est pas nul, aucun point ne reste immobile ; si au contraire γb est nul, tous les points qui satisfont à l'équation

$$\alpha + \beta y + a\gamma x = 0$$

restent immobiles.

Troisième cas :

$$A = p, \quad B = p\gamma e^{\mu x}.$$

On trouve

$$C = -\frac{p}{\gamma} + q.$$

Les substitutions A et C sont permutables; on est donc ramené à l'un des deux cas précédents.

Quatrième cas :

$$A = p, \quad B = pe^{\mu x}.$$

On trouve encore une substitution C permutable à A et l'on est ramené par conséquent aux deux premiers cas.

Cinquième cas :

$$A = p, \quad B = qe^{\mu x},$$

On trouve ici pour C quatre formes différentes :

$$1^{\circ} \quad C = e^{\nu x} [ap + \mu(ay + b)q], \quad (a, b \text{ et } c \text{ étant des constantes}).$$

$$2^{\circ} \quad C = [ap + (by + c)q],$$

$$3^{\circ} \quad C = e^{\mu x} [ap + (bx - a\mu y + c)q],$$

$$4^{\circ} \quad C = e^{-\mu x} \left[(ay + b)p + \mu q \left(\frac{a}{2} y^2 + by + c \right) \right],$$

La première forme doit être rejetée parce que B et C sont permutables; la deuxième parce que A et C sont permutables, la troisième parce que B et C sont permutables. Si l'on adoptait l'une de ces trois formes, on serait donc toujours ramené à l'un des deux premiers cas.

Il reste la quatrième forme, qui nous conduit aux géométries quadratiques.

Le même résultat pourrait être obtenu en discutant les trois relations qui lient les neuf coefficients λ , μ , ν et que l'on peut déduire de l'identité (2).

Conclusions.

Nous pouvons donc énoncer ainsi les hypothèses qui sont nécessaires et suffisantes pour servir de prémisses à la Géométrie plane.

A. Le plan a deux dimensions.

B. La position d'une figure plane dans son plan est déterminée par trois conditions.

Ces deux premières hypothèses nous laissent le choix entre les diverses géométries quadratiques et les deux géométries caractérisées par les deux groupes suivants :

$$[p, q, e^{\nu x + \nu'' q} (ap + bq)]$$

et

$$(p, yp, axp + bq).$$

Ces deux géométries sont exclues si l'on fait encore l'hypothèse suivante :

C. Quand une figure plane ne quitte pas son plan et que deux de ses points restent immobiles, la figure tout entière reste immobile.

Nous n'avons plus alors que le choix entre les diverses géométries quadratiques.

Faisons encore les deux hypothèses suivantes :

D. La distance de deux points ne peut être nulle que si ces deux points coïncident;

E. Lorsque deux droites se coupent, on peut faire tourner l'une d'elles autour du point d'intersection de façon à la faire coïncider avec l'autre.

Ces deux hypothèses sont liées nécessairement l'une à l'autre; il suffit d'admettre l'une d'elles pour être obligé d'admettre l'autre et d'exclure la géométrie de l'hyperboloïde à une nappe.

Introduisons encore l'hypothèse suivante :

F. Deux droites ne peuvent se couper qu'en un point,
et la Géométrie sphérique se trouvera exclue à son tour.

Il ne reste plus qu'à introduire le *postulatum* d'Euclide :

G. La somme des angles d'un triangle est une constante.

Nous pouvons remarquer que ce *postulatum* nous dispense des hypothèses D, E et F qui en sont des conséquences nécessaires.

Remarques diverses.

Le lecteur qui aura bien voulu me suivre jusqu'ici ne manquera pas de se reporter au célèbre Mémoire de Riemann (*Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*) et de remarquer certaines différences entre les méthodes et les résultats. Riemann caractérise une géométrie par l'expression de l'élément d'arc en fonction des coordonnées. Il est ainsi conduit à un très grand nombre de géométries logiquement possibles et dont je n'ai pas même parlé. Cela tient à ce que j'ai pris pour point de départ la possibilité du mouvement ou plutôt l'existence d'un groupe de mouvements qui n'altèrent pas les distances.

On peut se demander maintenant ce que sont ces hypothèses.

Sont-ce des faits expérimentaux, des jugements analytiques ou synthétiques *a priori*? Nous devons répondre négativement à ces trois questions. Si ces hypothèses étaient des faits expérimentaux, la Géométrie serait soumise à une incessante revision, ce ne serait pas une science exacte; si elles étaient des jugements synthétiques *a priori*, ou à plus forte raison des jugements analytiques, il serait impossible de s'y soustraire et de rien fonder sur leur négation.

On peut montrer que l'Analyse repose sur un certain nombre de jugements synthétiques *a priori*; mais il n'en est pas de même de la Géométrie.

Que devons-nous donc penser des prémisses de la Géométrie? En quel sens peut-on, par exemple, dire que le *postulatum* d'Euclide soit vrai?

D'après ce que nous venons de voir, la Géométrie n'est autre chose que l'étude d'un groupe et, en ce sens, on pourrait dire que la vérité de la géométrie d'Euclide n'est pas incompatible avec celle de la géométrie de Lobatchevski, puisque l'existence d'un groupe n'est pas incompatible avec celle d'un autre groupe.

Nous avons choisi, parmi tous les groupes possibles, un groupe particulier pour y rapporter les phénomènes physiques, comme nous choisissons trois axes de coordonnées pour y rapporter une figure géométrique.

Maintenant qu'est-ce qui a déterminé ce choix : c'est d'abord la simplicité du groupe choisi; mais il y a une autre raison : il existe dans la nature des corps remarquables qu'on appelle les *solides* et l'expérience nous apprend que les divers mouvements possibles de ces corps sont liés à fort peu près par les mêmes relations que les diverses opérations du groupe choisi.

Ainsi les hypothèses fondamentales de la Géométrie ne sont pas des faits expérimentaux; c'est cependant l'observation de certains phénomènes physiques qui les fait choisir parmi toutes les hypothèses possibles.

D'autre part, le groupe choisi est seulement plus commode que les autres et l'on ne peut pas plus dire que la géométrie euclidienne est vraie et la géométrie de Lobatchevski fausse, qu'on ne pourrait dire que les coordonnées cartésiennes sont vraies et les coordonnées polaires fausses.

Je n'insiste pas davantage; car le but de ce travail n'est pas le développement de ces vérités qui commencent à devenir banales.

Développement en produit des fonctions Θ et H de Jacobi et recherche des valeurs de ces fonctions quand les périodes sont divisées par un nombre entier; par M. DE PRESLE.

(Séance du 16 novembre 1887.)

1. — Développement en produit des fonctions Θ et H .

La méthode que nous allons employer est celle de M. Weierstrass pour le développement en produit des fonctions holomorphes, modifiée en ce sens, qu'au lieu de ranger les zéros par ordre de modules croissants, nous les classerons par ordre de valeurs croissantes de l'un des paramètres qui les déterminent, l'autre étant supposé constant; et que, ensuite, nous disposerons par ordre de valeurs croissantes du second paramètre les fonctions ainsi obtenues. Nous ne développerons de cette manière que la fonction $\Theta_1(x)$, et nous déduirons de ce développement celui des autres fonctions. Toutefois, la même méthode s'applique aux quatre fonctions de Jacobi, et de chacun des développements on peut déduire tous les autres.

Nous désignerons par K et K' les intégrales

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}},$$

k et k' étant le module ordinaire et le module complémentaire de l'intégrale elliptique de première espèce; nous désignerons par q

la quantité $e^{-\frac{\pi K'}{K}}$.

1. *Développement de $\Theta_1(x)$.* — Considérons la somme double :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}(2m+1)K - (2n+1)K'};$$

si, dans la première somme, on groupe les termes par valeurs égales et de signe contraire du paramètre $2m + 1$, n étant supposé constant, on obtient des fonctions de n ; et si, pour obtenir la seconde somme, on groupe ces fonctions par valeurs égales et de signe contraire de $2n + 1$, on obtient une série convergente, dont les termes sont des dérivées logarithmiques.

On a, en effet,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[x - (2n+1)K'i] - (2m+1)K} \\ &= -\frac{\pi}{2K} \frac{\pi[x - (2n+1)K'i]}{2K} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)\pi^2 - \frac{\pi^2[x - (2n+1)K'i]^2}{4K^2}} \\ &= -\frac{\pi}{2K} \operatorname{tang} \frac{\pi[x - (2n+1)K'i]}{2K}. \end{aligned}$$

On a, d'autre part,

$$\begin{aligned} & -\frac{\pi}{2K} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{tang} \frac{\pi[x - (2n+1)K'i]}{2K} \\ &= -\frac{\pi}{2K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \sin \frac{\pi x}{2K} \cos \frac{\pi x}{2K}}{\cos^2 \frac{(2n+1)\pi K'i}{2K} - \sin^2 \frac{\pi x}{2K}} \\ &= -\frac{\pi}{2K} \sin \frac{\pi x}{K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cos \frac{(2n+1)\pi K'i}{K} + \cos \frac{\pi x}{K}}, \end{aligned}$$

série convergente; le dernier membre peut s'écrire

$$\sum_{n=0}^{\infty} D \log \left[\cos \frac{(2n+1)\pi K'i}{K} + \frac{\cos \pi x}{K} \right].$$

Cela posé, on reconnaîtra, comme dans la démonstration du théorème de M. Weierstrass relatif à la décomposition des fonctions holomorphes en facteurs primaires (¹), qu'en désignant par $G(x)$ une fonction holomorphe, on a

$$\frac{\theta'_1(x)}{\theta_1(x)} + \frac{\pi}{K} \sin \frac{\pi x}{K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cos \frac{(2n+1)\pi K'i}{K} + \cos \frac{\pi x}{K}} = G(x),$$

(¹) Voir le Cours de M. Hermite, professé à la Faculté des Sciences, 3^e édition, page 78.

les zéros de $\Theta_1(x)$ étant de la forme

$$(2m+1)K + (2n+1)K'i;$$

d'où

$$D \log \Theta_1(x) = G(x) - \frac{\pi}{K} \sin \frac{\pi x}{K} \sum_0^\infty \frac{1}{\cos \frac{(2n+1)\pi K'i}{K} + \cos \frac{\pi x}{K}}.$$

Intégrons, déterminons les constantes d'intégration par la valeur 0 de x , et passons des logarithmes aux quantités

$$\Theta_1(x) = \Theta_1(0) e^{\int_0^x G(x) dx} \prod_0^\infty \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi K'i}{K} + \cos \frac{\pi x}{K}}{1 + \cos \frac{(2n+1)\pi K'i}{K}};$$

mais on a

$$\cos \frac{(2n+1)\pi K'i}{K} = \frac{q^{(2n+1)} + q^{-(2n+1)}}{2};$$

donc

$$\Theta_1(x) = \frac{\Theta_1(0) e^{\int_0^x G(x) dx}}{\prod_0^\infty (1 + q^{2n+1})^2} \prod_0^\infty \left[1 + 2q^{2n+1} \cos \frac{\pi x}{K} + q^{2 \cdot 2n+1} \right],$$

et, en désignant par $I(x)$ une autre fonction holomorphe de x ,

$$\Theta_1(x) = e^{I(x)} \prod_0^\infty \left(1 + q^{2n+1} e^{\frac{\pi x}{K}} \right) \left(1 + q^{2n+1} e^{-\frac{\pi x}{K}} \right),$$

Considérons $\Theta_1(x)$ et le second membre de l'équation précédente divisé par le facteur $e^{I(x)}$; si l'on augmente x de K , ces quantités sont égales et de signe contraire; si l'on augmente x de $K'i$, ces quantités sont multipliées par un même facteur exponentiel; donc $e^{I(x)}$ et, par suite, $I(x)$ admet les périodes K et $K'i$, et se réduit à une constante, puisqu'elle est holomorphe; on peut donc écrire, P étant une constante,

$$\Theta_1(x) = P \prod_0^\infty \left(1 + q^{2n+1} e^{\frac{\pi x}{K}} \right) \left(1 + q^{2n+1} e^{-\frac{\pi x}{K}} \right).$$

2. Développement de $\Pi_1(x)$. — Dans l'équation précédente,

augmentons x de $K'i$, on a

$$H_1(x) = 2\sqrt[4]{q} P \cos \frac{\pi x}{2K} \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + q^{2(n+1)} e^{\frac{\pi x i}{K}} \right] \left[1 + q^{2(n+1)} e^{-\frac{\pi x i}{K}} \right].$$

3-4. *Développements de $\Theta(x)$, $H(x)$.* — Dans les deux dernières équations, augmentons x de K , nous aurons

$$\Theta(x) = P \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - q^{2n+1} e^{\frac{\pi x i}{K}} \right) \left(1 - q^{2n+1} e^{-\frac{\pi x i}{K}} \right),$$

$$H(x) = 2\sqrt[4]{q} P \sin \frac{\pi x}{2K} \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 - q^{2(n+1)} e^{\frac{\pi x i}{K}} \right] \left[1 - q^{2(n+1)} e^{-\frac{\pi x i}{K}} \right].$$

On a

$$P = \prod_{n=0}^{\infty} [1 - q^{2(n+1)}].$$

II. — Recherche des valeurs des fonctions Θ et H quand les périodes sont divisées par un nombre entier.

Nous nous servirons des relations que nous avons établies dans la première partie de ce travail avant d'arriver au développement en facteurs. Pour cette raison, nous allons étudier la division des périodes dans $\Theta_1(x)$, et nous déduirons des résultats obtenus la division des périodes dans les autres fonctions. Toutefois, si l'on cherche pour les autres fonctions de Jacobi les relations analogues à celles que nous avons exposées pour la fonction $\Theta_1(x)$, on peut leur appliquer la même méthode pour la division des périodes, et des résultats obtenus pour chacune de ces fonctions déduire les formules qui concernent toutes les autres.

Nous désignerons par $2p+1$ et $2p$ les nombres impair et pair servant de diviseurs aux périodes.

1. DIVISION DES PÉRIODES DANS $\Theta_1(x)$.

1° Première période.

1° *Division par un nombre impair.* — Considérons la somme double

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x - \frac{(2m+1)K}{2p+1} - (2n+1)K'i}.$$

Remarquons qu'un nombre impair quelconque peut se mettre sous la forme $(2s+1)(2p+1) + 2r$, s variant de $-\infty$ à $+\infty$ et r de $-p$ à $+p$; la somme précédente peut s'écrire

$$\sum_{-p}^{+p} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left[\left(x - \frac{2rK}{2p+1} \right) - (2n+1)K'i \right] - (2s+1)K},$$

donc

$$\begin{aligned} & \theta_1 \left(x, \frac{K}{2p+1}, K'i \right) \\ &= \frac{\theta_1 \left(0, \frac{K}{2p+1}, K'i \right)}{\prod_{-p}^{+p} \theta_1 \left(\frac{2rK}{2p+1}, K, K'i \right)} \prod_{-p}^{+p} \theta_1 \left(x + \frac{2rK}{2p+1}, K, K'i \right). \end{aligned}$$

2° *Division par un nombre pair.* — Considérons la somme double

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x - \frac{(2m+1)K}{2p} - (2n+1)K'i}.$$

Remarquons qu'un nombre impair quelconque peut se mettre sous la forme $(2s+1)2p + 2r - 1$, s variant de $-\infty$ à $+\infty$ et r de $-(p-1)$ à $+p$; la somme précédente peut s'écrire

$$\sum_{-(p-1)}^{+p} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left[\left(x - \frac{2r-1}{2p} K \right) - (2n+1)K'i \right] - (2s+1)K} :$$

donc

$$\begin{aligned} & \theta_1 \left(x, \frac{K}{2p}, K'i \right) \\ &= \frac{\theta_1 \left(0, \frac{K}{2p}, K'i \right)}{\prod_{-(p-1)}^{+p} \theta_1 \left(\frac{2r-1}{2p} K, K, K'i \right)} \prod_{-(p-1)}^{+p} \theta_1 \left(x + \frac{2r-1}{2p} K, K, K'i \right). \end{aligned}$$

2° Seconde période.

1° Division par un nombre impair. — Considérons la somme

$$- \frac{\pi}{2K} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{tang} \pi \left[x - \frac{(2n+1)K'i}{2p+1} \right].$$

Nous aurons, en remplaçant $2n+1$ par $(2s+1)(2p+1)+2r$,

$$- \frac{\pi}{2K} \sum_{r=-p}^{+p} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \operatorname{tang} \frac{\pi \left[\left(x - \frac{2rK'i}{2p+1} \right) - (2s+1)K'i \right]}{2K};$$

donc

$$\begin{aligned} \theta_1 \left(x, K, \frac{K'i}{2p+1} \right) \\ = \frac{\theta_1 \left(0, K, \frac{K'i}{2p+1} \right)}{\prod_{r=-p}^{+p} \theta_1 \left(\frac{2rK'i}{2p+1}, K, K'i \right)} \prod_{r=-p}^{+p} \theta_1 \left(x + \frac{2rK'i}{2p+1}, K, K'i \right). \end{aligned}$$

2° Division par un nombre pair. — Considérons la somme

$$- \frac{\pi}{2K} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{tang} \frac{\pi \left[x - \frac{(2n+1)K'i}{2p} \right]}{2K}.$$

Nous aurons, en remplaçant $2n+1$ par $(2s+1)2p+2r-1$,

$$- \frac{\pi}{2K} \sum_{r=-(p-1)}^{+p} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \operatorname{tang} \frac{\pi \left[\left(x - \frac{2r-1}{2p} K'i \right) - (2s+1)K'i \right]}{2K};$$

donc

$$\begin{aligned} \theta_1 \left(x, K, \frac{K'i}{2p} \right) \\ = \frac{\theta_1 \left(0, K, \frac{K'i}{2p} \right)}{\prod_{r=-(p-1)}^{+p} \theta_1 \left(\frac{2r-1}{2p} K'i, K, K'i \right)} \prod_{r=-(p-1)}^{+p} \theta_1 \left(x + \frac{2r-1}{2p} K'i, K, K'i \right). \end{aligned}$$

2. DIVISION DES PÉRIODES DANS $H_1(x)$.

Dans les valeurs obtenues par $\Theta_1(x)$ augmentons x respectivement de $K'i$, $K'i$, $K'i$, $\frac{(2p+1)K'i}{2p}$, nous obtiendrons

$$H_1\left(x, \frac{K}{2p+1}, K'i\right), \quad H_1\left(x, \frac{K}{2p}, K'i\right), \quad H_1\left(x, K, \frac{K'i}{2p+1}\right), \quad H_1\left(x, K, \frac{K'i}{2p}\right).$$

3-4. DIVISION DES PÉRIODES DANS $\Theta(x)$, $H(x)$.

Dans les valeurs de $\Theta_1(x)$ et $H_1(x)$, augmentons x respectivement de K , $\frac{(2p+1)K}{2p}$, K , K ; nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \Theta\left(x, \frac{K}{2p+1}, K'i\right), \quad \Theta\left(x, \frac{K}{2p}, K'i\right), \quad \Theta\left(x, K, \frac{K'i}{2p+1}\right), \quad \Theta\left(x, K, \frac{K'i}{2p}\right), \\ H\left(x, \frac{K}{2p+1}, K'i\right), \quad H\left(x, \frac{K}{2p}, K'i\right), \quad H\left(x, K, \frac{K'i}{2p+1}\right), \quad H\left(x, K, \frac{K'i}{2p}\right). \end{aligned}$$

Nous avons cru ne devoir qu'indiquer le moyen d'obtenir les valeurs de H_1 , Θ , H , afin d'éviter un trop long développement, les calculs n'offrant d'ailleurs aucune difficulté. On trouvera les expressions des fonctions Θ et H , quand les périodes sont divisées par des nombres entiers, dans le *Traité des fonctions elliptiques* de Briot et Bouquet (p. 540 et suiv.).

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XV.

	Pages
État de la Société mathématique de France au commencement de l'année 1887.....	5
Statuts de la Société.....	15
Règlement administratif.....	16
Sur le développement des fonctions en séries par la formule de Maclaurin, dans le cas d'une variable réelle; par M. O. CALLANDREAU.....	23
Rectifications.....	33
Sur la courbure totale des surfaces; par M. DEMARTRES.....	34
Sur le rapport anharmonique d'une courbe du troisième ordre; par M. JAXET.....	35
Des rayons de courbure dans les transformations isogonales; par M. A.-C. LAISANT.....	39
Démonstration nouvelle du théorème fondamental de la théorie des équations; par C.-A. LAISANT.....	42
Système articulé pour tracer la courbe symétrique par rapport à un axe d'une courbe donnée; par M. L. NEU.....	44
Sur le système de quatre formes binaires simultanées (deux linéaires et deux quadratiques); par M. R. PERRIN.....	45
Mémoire sur la théorie algébrique des équations; par M. A.-E. PELLET.....	61
Sur les transformations planes non isogonales; par M. C.-A. LAISANT.....	103
Note sur quelques intégrales pseudo-elliptiques; par M. E. GOURSAT.....	106
Théorèmes sur les déterminants; par M. A.-H. ANGLIN.....	120
Sur un point de la théorie des surfaces; par M. DEMARTRES.....	129
Sur une source d'identités; par M. MAURICE D'OCAGNE.....	133
Intégration d'une suite récurrente qui se présente dans une question de probabilités; par M. MAURICE D'OCAGNE.....	143
Une méthode graphique de quadrature; par M. ED. COLLIGNON.....	145
Remarque sur certains déterminants numériques; par M. G. FOURET.....	146
Sur les fonctions hyperfuchsienues provenant des séries hypergéométriques de deux variables; par M. ÉMILE PICARD.....	148
Remarque sur les groupes linéaires d'ordre fini à trois variables; par M. E. PICARD.....	152
Sur une notation utile en Algèbre et en Analyse; par M. MAURICE D'OCAGNE.....	156
Exposition d'une méthode de M. Caspary pour l'étude des courbes gauches; par M. CARVALLO.....	161
Note sur les expressions obtenues par Duhamel et par Lamé pour le flux de chaleur dans les solides non isotropes; par M. CARVALLO.....	167
Démonstration nouvelle de la propriété fondamentale de l'intégrale eulé-	

224 -

	Pages
rienne de premiere espece; par M. LEBEN.....	173
Démonstration de la loi d'inertie des formes quadratiques; par M. DE PREST.....	179
Lettre de M. Tisserand sur une Note insérée au Bulletin.....	181
Extraits des procès-verbaux.....	183
Théorème sur les formes quadratiques; par M. DESHAYES.....	188
Sur le coefficient du terme général dans certains développements; par M. A. H. ANGLAIS.....	192
Théorèmes de Trigonometrie; par M. C. A. LAISANT.....	198
Sur les hypotheses fondamentales de la Geometrie; par M. H. POINCARÉ.....	203
Développement en produit des fonctions θ et H de Jacobi et recherche des valeurs de ces fonctions quand les périodes sont divisées par un nombre entier; par M. DE PREST.....	216

FIN DE LA TABLE DU TOME XV.



PARIS — IMPRIMERIE CATHOLIC-VEILLER, RUE DE L'ANGLOIS, 55.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

(Reconnue d'utilité publique par décret en date du 11 février 1888)

PUBLIE
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME SEIZIÈME.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS. 7.

1888



BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

COMMISSION D'IMPRESSION.

(ART. 20 DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.)

MM. HUMBERT,	}	Secrétaires de la Société.
WEILL,		
COLLIGNON,	}	Membres du Conseil.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE,		
JORDAN,		
MANNHEIM.		

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME SEIZIÈME. — ANNÉE 1887-88.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1888

STATIQUE DE FRANCE

LISTE DE L'ANNÉE 1888 (*).

Les S. P. désignent les Sociétaires perpétuels.

Président.....	MM. LAISANT.
Vice-Présidents.....	{ ANDRÉ. COLLIGNON. PICQUET. VICAIRE.
Secrétaires.....	{ HUMBERT. WEILL.
Vice-Secrétaires.....	{ KOENIGS. RAFFY.
Archiviste.....	PRESLE (DE).
Trésorier.....	CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil.....	{ APPELL. CLAYEUX. COMBEROUSSE (DE). DARBOUX. FOURET. HALPHEN. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. JORDAN. MANNHEIM. PICARD. POINCARÉ. FOUCHÉ.
Membres du Conseil non résidents..	{ CREMONA. GENTY. MATHIEU. TCHÉBICHEFF.

(*) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1888 (').

Les initiales S. P. désignent les Sociétaires perpétuels.

Président.....	MM. LAISANT.
Vice-Présidents	{ ANDRÉ. COLLIGNON. PICQUET. VICAIRE.
Secrétaires	{ HUMBERT. WEILL.
Vice-Secrétaires.....	{ KOENIGS. RAFFY.
Archiviste.....	PRESLE (DE).
Trésorier.....	CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil	{ APPELL. CLAYEUX. COMBEROUSSE (DE). DARBOUX. FOURET. HALPHEN. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. JORDAN. MANNHEIM. PICARD. POINCARÉ. FOUCHÉ.
Membres du Conseil non résidents..	{ CREMONA. GENTY. MATHIEU. TCHÉBICHEFF.

(') MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

Date
de
l'admission.

1872. **ACHARD**, directeur-adjoint de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de Chabrol, 40, à Paris.
1887. **ALBEGGIANI** (M.-L.), professeur à l'Université, 4, Salita Banditore, à Palerme (Italie).
1881. **AMIGUES**, professeur au lycée, boulevard du Musée, 66, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1872. **ANDRÉ** (Désiré), docteur ès Sciences, place de la Sorbonne, 5, à Paris.
1879. **APPELL**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Soufflot, 22, à Paris.
1884. **ARNAUD**, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Nice (Alpes-Maritimes).
1872. **ARON** (Henri), banquier, rue Taitbout, 34, à Paris.
1881. **ASTOR**, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard de Bonne, à Grenoble (Isère).
1882. **AUTONNE**, ingénieur des Ponts et Chaussées, place d'Helvétie, 7, à Lyon (Rhône).
1886. **BARBERENA**, ingénieur topographe, à San-Salvador.
1874. **BENOIST** (Adolphe), docteur en droit, place du Châtelet, 3, à Chalon-sur-Saône (Saône-et-Loire), S. P.
1875. **BERDELLÉ**, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
1873. **BERTRAND** (Joseph), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue de Tournon, 4, à Paris.
1887. **BEYENS** (Ignacio), capitaine du Génie, 5, Santa Inès, à Cadix (Espagne).
1875. **BISCHOFFSHEIM**, banquier, rue Taitbout, 3, à Paris, S. P.
1872. **BIENAYMÉ** (Arthur), directeur des Constructions navales, à Toulon (Var).
1872. **BIENAYMÉ**, membre de l'Institut (décédé), S. P.
1881. **BONCOMPAGNI** (le prince Balthasar), place Colonna, palais Piombino, à Rome (Italie).
1873. **BOYNET** (Ossian), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Écoles, 42, à Paris.
1879. **BORCHARDT**, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé), S. P.
1876. **BOUCHER**, ancien directeur de l'École préparatoire des Sciences et Lettres, rue Appert, 9, à Angers (Maine-et-Loire).
1873. **BOULANGER**, professeur de Mathématiques, 116, rue Trallier, maison Deloncle, à Mustapha inférieur (Algérie).
1886. **BRAULT** (A.), négociant à Pons (Charente-Inférieure).
1874. **BRIOSCHI**, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École Polytechnique, à Milan (Italie).
1872. **BRISSE** (Ch.), répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Bécon, 55, à Courbevoie (Seine).
1873. **BROCARD**, major du 4^e régiment du Génie, à Grenoble (Isère).
1886. **BRUNEL**, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1885. **CARON**, professeur de Géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 82, à Paris.
1887. **CARVALLO**, professeur au lycée de Versailles, 19, villa Saïd, Passy.
1884. **CASEY** (John), professeur à l'Université catholique de Dublin, Stephens Green, 84, à Dublin (Grande-Bretagne).
1887. **CASPARY**, professeur au Collège Humboldt, Luisenstrasse, 2, à Berlin (Allemagne).
1873. **CATALAN**, professeur émérite à l'Université, 21, rue des Éburons, à Liège (Belgique).
1887. **CERRUTI**, professeur à l'Université, à Rome (Italie).
1872. **CHASLES**, membre de l'Institut (décédé), S. P.
1881. **CHEMIN**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, rue de Rennes, 73, à Paris.
1881. **CHRYSTAL**, professeur à l'Université, à Edimbourg (Écosse).
1873. **CIVIALE**, rue de la Tour-des-Dames, 2, à Paris.

100.

- CLAYEUX, intendant divisionnaire en retraite, avenue de Clichy, 52, à Paris.
- CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris, S. P.
- COLLIGNON, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, rue des Saints-Pères, 28, à Paris.
- COMBEROUSSE (de), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École Centrale, rue Saint-Lazare, 94, à Paris.
- COURCELLES, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, 36, rue Gay-Lussac, à Paris.
- CRAIG (Thomas), professeur à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
- CREMONA, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome (Italie).
- CRETIN, professeur au lycée Saint-Louis, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
- DABDOUX, professeur à la Faculté des Sciences, membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
- DAUTHEVILLE, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
- DAVID, lieutenant-colonel d'Artillerie en retraite, place de l'École d'Artillerie, 42, à Toulouse (Haute-Garonne).
- DEFFORGES, capitaine d'infanterie, attaché à l'Etat-major du Ministre de la Guerre, rue de Grenelle Saint-Germain, 123, à Paris.
- DELANNOY, sous-intendant militaire, à Orléans (Loiret).
- DEMARTRES, professeur à la Faculté des Sciences, à Lille (Nord).
- DERUYTS, docteur ès sciences, chargé de Cours à l'Université de Liège (Belgique).
- DEWULF, colonel du Génie, à Bayonne (Basses-Pyrénées).
- DUNCAN, assistant à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
- DURRANDE, doyen de la Faculté des Sciences, à Poitiers (Vienne).
- DYCK WALTHER, professeur au Polytechnicum, à Munich (Bavière).
- ESCARY, professeur au Prytanée militaire, à la Flèche (Sarthe).
- FABRE, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Trudaine, 26, à Paris.
- FIELDS (John), professeur à Hamilton (Canada).
- FERRAZ, professeur au Lycée, à Toulouse (Haute-Garonne).
- FLEUREAU, ingénieur des Ponts et Chaussées, au Puy (Haute-Loire).
- FLOQUET, professeur à la Faculté des Sciences, rue Saint-Lambert, 17, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
- FLYE SAINTE-MARIE, répétiteur à l'École Polytechnique, rue du Sommerard, 12, à Paris.
- FONTÈS, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Toulouse (Haute-Garonne).
- FOURET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Washington, 16, à Paris, S. P.
- GABRIEL, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, agrégé de la Faculté de Médecine, rue Jouffroy, 39, à Paris.
- GAUTHIER-VILLARS, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris, S. P.
- GENOCCHI, professeur à l'Université, rue du Pô, 38, à Turin (Italie).
- GENTY, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Oran (Algérie).
- GERONO, rue Hallé, 32 et 34, à Paris.
- GIROD (A.), ingénieur des Manufactures de l'État, 63, quai d'Orsay, à Paris.
- GOFFART, 53, rue Nollet, à Paris.
- COURSAT, maître de Conférences à l'École Normale supérieure, 83, rue Denfert-Rochereau, à Paris.

Date
de
l'admission.

1872. **GRAINDORGE**, professeur à l'Université, rue Paradis, 92, à Liège (Belgique).
1881. **GRUEY**, directeur de l'Observatoire, à Besançon (Doubs).
1880. **GUCCIA** (Jean), via Ruggiero Settimo, 28, à Palerme (Sicile).
1881. **GUNTHER** (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. **GUYON**, lieutenant de vaisseau, 13, rue de l'Université, à Paris.
1873. **HAAG**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 1, à Paris.
1882. **HABICH**, directeur de l'École des Mines, à Lima (Pérou).
1872. **HALPHEN**, membre de l'Institut, chef d'escadron d'Artillerie, rue Sainte-Sophie, 17, à Versailles (Seine-et-Oise). S. P.
1886. **HAUPTMANN**, ingénieur attaché aux chemins de fer russes, rue Bichat, 30, à Paris.
1872. **HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, membre de l'Institut, inspecteur général des Mines, directeur de l'École des Mines, 60, boulevard Saint-Michel, à Paris, S. P.
1884. **HENRIOT**, ingénieur des Mines, à Reims (Marne).
1872. **HENRY**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Privas (Ardèche).
1882. **HENRY** (Charles), bibliothécaire à la Sorbonne, rue Berthollet, 22, à Paris.
1872. **HERMARY**, chef d'escadron au 17^e régiment d'Artillerie, à Douai (Nord).
1873. **HERMITE**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris, S. P.
1875. **HIRST**, Athenæum Club, Londres (Angleterre), S. P.
1879. **HOLST** (Elling), stipendiat de l'Université, Pilestrade, 49, à Christiania (Norvège).
1872. **HOUBIGANT**, chef de bataillon du Génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris.
1872. **HUGO** (Comte L.), traducteur au Ministère des Travaux publics, rue des Saints-Pères, 14, à Paris.
1880. **HUMBERT**, ingénieur des Mines, répétiteur à l'École Polytechnique, 161, boulevard Haussmann, à Paris.
1887. **IBRAHIM EFFENDI**, professeur de Mathématiques à l'École impériale civile de Médecine, à Constantinople (Turquie).
1881. **IMBER**, répétiteur à l'École Centrale, boulevard Beaumarchais, 109, à Paris.
1887. **ISSALY** (l'abbé), boulevard de Caudéran, 365, à Bordeaux (Gironde).
1886. **JABLONSKI**, professeur au lycée Charlemagne, 40, boulevard Saint-Germain, à Paris.
1873. **JANIN**, chef d'escadron au 17^e régiment d'Artillerie, à la Fère (Aisne).
1872. **JAVARY**, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris.
1872. **JORDAN**, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique, rue de Varenne, 48, à Paris, S. P.
1872. **JOUFFRET**, chef d'escadron d'Artillerie, à Palaiseau (Seine-et-Oise).
1875. **JUNG**, professeur à l'Institut technique supérieur, 7, via Principe Umberto, à Milan (Italie).
1880. **KœNIGS**, maître de conférences à l'École Normale supérieure, boulevard de Port-Royal, 72, à Paris.
1882. **KOSTEVEC** (Antoine), professeur au lycée communal, à Prague (Bohème).
1882. **KOVALEWSKY** (M^{me} de), professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1882. **KRONECKER** (Dr Léopold), professeur à l'Université, Bellevuestrasse, 13, à Berlin (Allemagne).
1881. **LACON**, professeur de Mathématiques, rue Sainte-Beuve, 6, à Paris.
1872. **LAFFON DE LADÉBAT**, amiral (décédé). S. P.

Date
de
l'admission.

- 1873. LAISANT, député, docteur ès sciences, avenue Victor Hugo, 162, à Paris.
- 1875. LAQUIÈRE, administrateur de la commune mixte de Tababort [Constantine (Algérie)].
- 1873. LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
- 1881. LAVEISSIÈRE, rue de la Verrerie, 58, à Paris.
- 1880. LÉAUTÉ, directeur des études à l'école Monge, 141, boulevard Malesherbes, à Paris.
- 1872. LEMOINE (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, rue Littré, 5, à Paris.
- 1879. LE PAIGE, professeur à l'Université, rue des Anges, 21, à Liège (Belgique).
- 1882. LE PONT, quai de Paris, 30, à Cherbourg (Manche).
- 1872. LESPIAULT, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
- 1882. LÉVY (Léon), ingénieur des Mines, rue de Logelbach, 9, à Paris.
- 1882. LÉVY (Lucien), directeur des Études de l'École préparatoire de Sainte-Barbe, rue Valette, à Paris.
- 1872. LÉVY (Maurice), membre de l'Institut, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur au Collège de France, boulevard Saint-Germain, 258, à Paris.
- 1875. LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
- 1873. LIGUINE, professeur à l'Université, à Odessa (Russie).
- 1877. LINDEMANN, professeur à l'Université, Fragheimer-Pulverplatz, 5, à Königsberg (Allemagne).
- 1886. LIOUVILLE, ingénieur des poudres, répétiteur à l'École Polytechnique, rue des Écoles, 6 bis, à Paris.
- 1880. LORIN, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Faubourg-Saint-Honoré, 186, à Paris.
- 1872. LUCAS (Édouard), professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, 1, rue Boutarel, à Paris.
- 1886. LYON, étudiant en Mathématiques, boulevard Arago, 39, à Paris.
- 1882. MACÉ DE LÉPINAY, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV, boulevard Saint-Michel, 14, à Paris.
- 1872. MALEYX, professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs, 44, à Paris.
- 1875. MALLOIZEL, professeur de Mathématiques, rue de l'Estrapade, 17, à Paris.
- 1872. MANNHEIM, colonel d'Artillerie, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris-Passy, S. P.
- 1884. MARCHAND, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de Poissy, 13, à Paris.
- 1872. MARSILLY (le général de), rue Chante-Pinot, à Auxerre (Yonne).
- 1884. MARTIN (Artemas), U. S. Coast and geodesic Survey Office, Washington D. C. (États-Unis d'Amérique).
- 1873. MATHIEU (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, rue du Faubourg-Saint-Jean, 22, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
- 1886. MAXIMOVITCH (Vladimir), professeur à l'Université de Kasan (Russie).
- 1884. MERCEREAU, licencié ès-sciences, rue Gay-Lussac, 38, à Paris.
- 1873. MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
- 1872. MOUTARD, inspecteur général des Mines, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
- 1885. NEUBERG, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).
- 1882. OCAGNE (n'), ingénieur des Ponts et Chaussées, rue des Fonderies, 8, à Rochefort-sur-Mer (Charente-Inférieure).
- 1873. OVIDIO (Enrico n'), professeur à l'Université, piazza Statuto, 17, à Turin (Italie).
- 1882. PANEK (Auguste), professeur au lycée communal, à Prague (Bohême).

Date
de
l'admission.

1884. **PARAF**, agrégé des Sciences mathématiques, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue de la Pépinière, 22, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1872. **PARENTIER** (le général), rue du Cirque, 5, à Paris.
1872. **PARRAN**, ingénieur en chef des Mines, rue des Saints-Pères, 56, à Paris.
1882. **PATURET**, ancien élève de l'École Polytechnique, à Valegnat, par Bellenaves (Allier).
1881. **PAUTONNIER** (l'abbé), professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs, 19, à Paris.
1881. **PELLET**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Blatin, 51, à Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme).
1883. **PELLETREAU**, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Constantine (Algérie).
1874. **PERCIN**, chef d'escadron d'Artillerie, commandant le 4^e bataillon de forteresse, à Verdun (Meuse).
1881. **PEROTT** (Joseph), à Port-Navalo, par Arzon (Morbihan), S. P.
1873. **PERRIN**, ingénieur en chef des Mines, rue Erpell, 5, au Mans (Sarthe), S. P.
1887. **PEZZO** (DEL), professeur à l'Université, 75, via Gennaro Serra, à Naples (Italie).
1873. **PHILIPPON**, secrétaire de la Faculté des Sciences, à la Sorbonne, à Paris.
1879. **PICARD** (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris.
1872. **PICQUET**, chef de bataillon du Génie, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Michel, 73, à Paris.
1882. **POINCARÉ**, membre de l'Institut, ingénieur des Mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63, à Paris, S. P.
1882. **POKORNY** (Martin), directeur du lycée communal, à Prague (Bohême).
1872. **POLIGNAC** (prince C. DE), villa Jessie, route de Grasse, à Cannes (Alpes-Maritimes), S. P.
1877. **POUSSET**, professeur au lycée, à Poitiers (Vienne).
1877. **PRESLE** (DE), sous-intendant militaire en retraite, rue Monge, 82, à Paris.
1884. **PUCCIARELLI**, répétiteur au lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, 44, à Paris.
1872. **PUTZ** (le général), rue Saint-Méry, 98, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
1872. **RADAU**, rue de Tournon, 12, à Paris.
1883. **RAFFY**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, boulevard Saint-Michel, 99, à Paris.
1873. **RANCY** (DE), administrateur de la Compagnie d'assurances *le Soleil*, boulevard Malesherbes, 84, à Paris.
1874. **REINACH** (baron DE), banquier, rue de la Bourse, 4, à Paris.
1875. **REY** (Casimir), professeur à l'École du Génie, boulevard de la Reine, 25, à Versailles (Seine-et-Oise).
1872. **RIBAUCOUR**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Philippeville (Algérie).
1881. **RIBOT**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, rue Jacotot, 1, à Dijon (Côte-d'Or).
1872. **RODET**, ingénieur à la Manufacture des tabacs, quai d'Orsay, 63, à Paris.
1872. **ROUART**, ingénieur civil, boulevard Voltaire, 137, à Paris.
1872. **ROUCHÉ** (Eugène), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.
1885. **ROUQUET**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, à Toulouse (Haute-Garonne).
1872. **ROUSSELIN**, professeur au lycée Fontanes, boulevard Pereire, 124, à Paris.
1888. **RUSSO** (Giovanni), professeur à Catanzaro (Italie).

Date
de
l'admission.

- 1881. SAINT-PAUL (Ducq DE), chef d'état-major de l'artillerie du 10^e corps, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
- 1872. SARRAU, membre de l'Institut, ingénieur en chef des Poudres, professeur à l'École Polytechnique, avenue Daumesnil, 9 *bis*, à Saint-Mandé (Seine).
- 1872. SARTIAUX, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, chef adjoint de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
- 1885. SAUVAGE, professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
- 1881. SCHLEGEL (D^r Victor), à Hagen (Allemagne).
- 1881. SCHOUTE, professeur à l'Université de Groningue (Hollande).
- 1876. SCHUBERT, professeur, Steindamm, 107, à Hambourg (Allemagne).
- 1877. SÉGUY, rue Pascal, 2, à Paris.
- 1882. SÉLIVANOFF, attaché à l'Université, à Saint-Petersbourg (Russie).
- 1883. SIMART, lieutenant de vaisseau, examinateur d'admission à l'École navale, rue de Miroménil, 70, à Paris.
- 1884. SIMONNET, chef d'escadron d'artillerie, à Versailles (Seine-et-Oise).
- 1881. SONINE (Nicolas), professeur à l'Université, à Varsovie (Russie).
- 1881. STARKOFF (Alexis), professeur à l'École de Commerce, rue Forgowaja, 49, à Odessa (Russie).
- 1879. STEPHANOS (D^r Cyparissos), professeur à l'Université, à Athènes (Grèce).
- 1886. STIELTJES, professeur à la Faculté des Sciences, rue d'Alsace-Lorraine, 48, à Toulouse (Haute-Garonne).
- 1873. STUDNICKA, professeur à l'Université, à Prague (Bohême).
- 1872. SYLOW, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norwège), S. P.
- 1872. TANNERY (Paul), directeur de la Manufacture des Tabacs, à Tonneins (Lot-et-Garonne), S. P.
- 1875. TANNERY (Jules), sous-directeur de l'École Normale supérieure, 45, rue d'Ulm, à Paris.
- 1882. TARRY (Gaston), receveur des Contributions diverses, rue Clauzel, à Alger (Algérie), S. P.
- 1882. TCHÉBICHEFF, membre de l'Académie des Sciences, à Saint-Petersbourg (Russie), S. P.
- 1887. TEVFIK PACHA (le général), aide-de-camp de S. M. I. le Sultan, lieutenant-général d'Artillerie, à Constantinople (Turquie).
- 1886. THEWISS, docteur ès sciences de l'Université de Liège, rue Casimir-Delavigne, 3, à Paris.
- 1872. TERRIER, professeur de Mathématiques, rue Monsieur-le-Prince, 18, à Paris.
- 1873. TISSOT, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Voreppe (Isère).
- 1872. TISSERAND, membre de l'Institut, avenue de l'Observatoire, 5, à Paris.
- 1872. TRESCA, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, château de Courtozé, par Vendôme (Loir-et-Cher).
- 1872. VACQUANT, inspecteur général de l'Université, boulevard Saint-Michel, 12, à Paris.
- 1884. VANDAME, ancien officier d'Artillerie, rue de la Vignette, 65, à Lille (Nord).
- 1880. VÁNEČEK (J.-S.), professeur au lycée, à Jičín (Bohême).
- 1885. VÁNEČEK (M.-M.), répétiteur à l'École Polytechnique tchèque, à Prague (Bohême).
- 1876. VICAIRE, ingénieur en chef des Mines, rue Gay-Lussac, 30, à Paris.
- 1882. VIELLARD, manufacturier, décédé, S. P.
- 1880. WALCKENAEER, ingénieur des Mines, 9, rue Bayard, à Paris.
- 1879. WEILL, professeur de Mathématiques au collège Chaptal et à l'école Monge, 19, rue Thiers, au Vésinet (Seine-et-Oise).

Date
de
l'admission.

1873. WEYR (Dr Édouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohême).
1872. WEYR (Dr Émile), professeur à l'Université, Hauptstrasse, 109, à Vienne (Autriche).
1882. WILSON, député, 2, avenue d'Iéna, à Paris.
1878. WORMS DE ROMILLY, ingénieur en chef des Mines, rue Balzac, 7, à Paris.
1882. ZABOUDSKY, capitaine de l'Artillerie russe, professeur à l'École d'Artillerie, à Saint-Petersbourg (Russie).
1882. ZELLER (Charles), recteur du séminaire, à Markgrœningen (Wurtemberg).
1881. ZEUTHEN, professeur à l'Université, Citadelsvej, 9, à Copenhague (Danemark).
-

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

BENOIST, docteur en droit.
BISCHOFFSHEIM, banquier.
BIENAYMÉ, membre de l'Institut (décédé).
BORCHARDT, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé).
BROCARD, chef de bataillon du Génie.
CHASLES, membre de l'Institut (décédé).
CLAUDE-LAFONTAINE, banquier.
FOURET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique.
GAUTHIER-VILLARS, éditeur.
HALPHEN, membre de l'Institut.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut.
HERMITE, membre de l'Institut.
HIRST, directeur des études de l'École navale de Greenwich.
JORDAN, membre de l'Institut.
LAFFON DE LADÉBAT, amiral (décédé).
MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique.
PEROTT (Joseph).
PERRIN, ingénieur en chef des Mines.
POINCARÉ, membre de l'Institut.
POLIGNAC (prince C. DE).
RAFFY, maître de conférences à la Faculté des Sciences.
SYLOW, professeur à l'Université, à Frederikshald.
TANNERY (Paul), ingénieur des manufactures de l'État.
TARRY, receveur des Contributions diverses.
TCHÉBICHEFF, membre de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg.
VIELLARD, manufacturier (décédé).

Modifications survenues depuis le commencement de 1887.

NOUVEAUX MEMBRES.

ALBEGGIANI (M.-L.), professeur à l'Université de Palerme.
BEYENS (Ignacio), capitaine du Génie, à Cadix.
CARVALLO, professeur au lycée de Versailles.
CERRUTI, professeur à l'Université de Rome.
IBRAHIM EFFENDI, professeur à Constantinople.
PEZZO (DEL), professeur à l'Université de Naples.
RUSSO (Giovanni), professeur à Catanzaro.
TEVFIK PACHA, aide-de-camp de S. A. I. le Sultan, à Constantinople.

DÉCÉDÉ.

GUÉLOT, colonel d'infanterie, à Bayonne.

**Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.**

Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.
Académie des Sciences de Berlin.
Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.
Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, à Bruxelles.
Académie des Arts et des Sciences du Connecticut (Etats-Unis d'Amérique).
Académie des Sciences de Munich.
Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.
Académie des Sciences de Paris.
Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg.
Académie des Sciences de Prague.
Académie Royale des *Lincei*, à Rome.
Académie Impériale des Sciences de Vienne.
Acta Mathematica (rédacteur M. Mittag-Leffler, à Stockholm).
American Journal of Mathematics, publié par l'Université de John Hopkins, à Baltimore (rédacteur M. Thomas Craig, à Baltimore).
Annales de l'École Normale supérieure.
Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.
Annali di Matematica (rédacteur M. Brioschi, à Milan).
Archiv for Mathematik og Naturvidenskab (rédacteurs MM. S. Lie et W. Muller, à Christiania).
Archiv für Mathematik und Physik (rédacteur D^r Hoppe, Prinzenstrasse, 69, à Berlin, S. W.).
Association française pour l'avancement des Sciences, à Paris.
Bulletin des Sciences mathématiques (rédacteurs MM. Darboux et J. Tannery).

- Casopis pro pěstování matematiky a fysiky* (rédacteur M. Eduard Weyr, à Prague).
Circolo Matematico, à Palerme.
École Royale Normale supérieure de Pise.
Giornale di Matematiche (rédacteur M. Battaglini, à Rome).
Institut Royal de Luxembourg.
Institut Royal lombard des Sciences et Lettres, à Milan.
Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts, à Venise.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, à Berlin.
Jornal de Sciencias matematicas e astronomicas (rédacteur M. Gomes Teixeira, à Coïmbre).
Journal de l'École Polytechnique.
Journal für die reine und angewandte Mathematik (rédacteurs MM. Kronecker et Weierstrass, à Berlin).
Mathematische Annalen (rédacteur M. Felix Klein, à Göttingen).
Mathesis (rédacteurs MM. Mansion, à Gand, et Neuberg, à Liège).
Meteorologische Zeitschrift.
Société mathématique d'Amsterdam.
Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.
Société philosophique de Cambridge.
Société Royale d'Édimbourg.
Société des Sciences de Finlande, à Helsingfors.
Société Royale des Sciences de Goettingue.
Société mathématique de Hambourg.
Société hollandaise des Sciences, à Harlem (Hollande).
Société mathématique de Kharkoff (Russie).
Société astronomique de Londres.
Société mathématique de Londres.
Société Royale de Londres.
Société mathématique de Moscou.
Société mathématique d'Odessa (Russie).
Société philomathique de Paris.
Société mathématique de Prague.
Société Royale des Sciences de Saxe, à Leipzig.
Société Royale des Sciences d'Upsal (Suède).
Société des Sciences naturelles de Zurich.
Société scientifique de Bruxelles.
Sociedad científica « Antonio Alzate », Mexico.
Université Royale de Pise.
Tidsskrift for Mathematik (rédacteur M. Zeuthen, à Copenhague).
Tijdschrift voor Wiskunde, rekenkunde en de beginselen der Fysica (rédacteur M. Versluys, à Amsterdam).
Zeitschrift für Mathematik und Physik (rédacteur Dr Oscar Schlömilch, à Dresde).
-

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Le lieu des pôles d'un plan fixe par rapport aux coniques tracées sur une surface de Steiner est une autre surface de Steiner; par M. G. KOENIGS, maître de conférences à l'École Normale supérieure.

(Séance du 5 novembre 1887).

1. Les coordonnées homogènes x, y, z, t d'un point d'une surface de Steiner sont, comme on sait, proportionnelles à des formes quadratiques de trois variables indépendantes,

$$(1) \quad \begin{cases} \rho x = \varphi(\xi, \eta, \zeta) = a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\eta\xi + \dots, \\ \rho y = \psi(\xi, \eta, \zeta) = b_{11}\xi^2 + 2b_{12}\eta\xi + \dots, \\ \rho z = \chi(\xi, \eta, \zeta) = c_{11}\xi^2 + 2c_{12}\eta\xi + \dots, \\ \rho t = \omega(\xi, \eta, \zeta) = e_{11}\xi^2 + 2e_{12}\eta\xi + \dots \end{cases}$$

La section de la surface par le plan

$$(2) \quad Ax + By + Cz + Et = 0$$

est représentée par l'équation

$$(3) \quad f(\xi, \eta, \zeta) = A\varphi(\xi, \eta, \zeta) + B\psi + C\chi + E\omega = 0.$$

Si le plan n'est pas tangent, une transformation linéaire des va-

riables ξ, η, ζ permet toujours de ramener f à la forme

$$(f_1) \quad \xi^2 - \eta\zeta = 0;$$

si le plan est tangent, on peut ramener f à la forme

$$(f_2) \quad \eta\zeta = 0,$$

et, enfin, si le plan est un des quatre qui sont tangents en chaque point d'une conique, à la forme

$$(f_3) \quad \zeta^2 = 0.$$

Je rappelle encore que, lorsque les équations d'une conique ont été mises sous la forme

$$\rho x_i = \alpha_i \lambda^2 + \beta_i \lambda + \gamma_i,$$

où λ est un paramètre qui fixe chaque point de la conique, les points α, β, γ , dont les coordonnées sont $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$, offrent la disposition suivante : α et γ sont deux points de la conique et β est le pôle de la droite $\alpha\gamma$.

Ajoutons aussi que les équations (1) réalisent une représentation de la surface de Steiner sur un plan où ξ, η, ζ seraient des coordonnées ponctuelles, et que les droites de ce plan et les coniques de la surface se correspondent.

2. Ceci posé, soient α, γ les points où une conique C de la surface coupe le plan (2),

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \text{correspondra à des valeurs} & \xi', \eta', \zeta', \\ \beta & \text{»} & \xi'', \eta'', \zeta'' \end{array}$$

des paramètres ξ, η, ζ , et, par suite, si, dans les formules (1), on pose

$$\begin{aligned} \xi &= \xi' \lambda + \xi'', \\ \eta &= \eta' \lambda + \eta'', \\ \zeta &= \zeta' \lambda + \zeta'', \end{aligned}$$

ces équations (1) représenteront précisément la conique C de la surface qui passe par α, γ ; nous aurons donc la représentation de C

$$\rho x = \varphi(\xi', \eta', \zeta') \lambda^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi'} \xi' + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta'} \eta' + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta'} \zeta' \right) \lambda + \varphi(\xi'', \eta'', \zeta'').$$

et de même pour y, z, t .

D'après la remarque déjà faite, le pôle de $\alpha\gamma$ par rapport à cette conique, ou le pôle du plan (2), a pour coordonnées

$$(4) \quad 2\rho x = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi'} \xi'' + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta'} \eta'' + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta'} \zeta'',$$

et de même pour y, z, t , en prenant ψ, χ, ω au lieu de φ .

Maintenant, si nous nous plaçons dans le cas (f_1), nous devons avoir

$$\begin{aligned} \xi'^2 - \eta' \zeta' &= 0, \\ \xi''^2 - \eta'' \zeta'' &= 0; \end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'on peut poser, p, q étant deux paramètres,

$$\begin{aligned} \xi' &= p, & \eta' &= 1, & \zeta' &= p^2, \\ \xi'' &= q, & \eta'' &= 1, & \zeta'' &= q^2; \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \rho x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi'} \xi'' + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta'} \eta'' + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta'} \zeta'' \right) \\ &= a_{11} \xi' \xi'' + a_{22} \eta' \eta'' + a_{33} \zeta' \zeta'' + a_{12} (\xi' \eta'' + \xi'' \eta') \\ &\quad + a_{13} (\xi' \zeta'' + \xi'' \zeta') + a_{23} (\eta' \zeta'' + \eta'' \zeta') \\ &= a_{11} p q + a_{22} + a_{33} p^2 q^2 + a_{12} (p + q) + a_{13} (p + q) p q + a_{23} (p^2 + q^2). \end{aligned}$$

Posons alors

$$p q = \frac{Z}{H}, \quad p + q = \frac{2\Xi}{H};$$

il viendra, en chassant H^2 et le faisant rentrer dans ρ ,

$$\rho x = 4a_{33}\Xi^2 + a_{22}H^2 + a_{33}Z^2 + 2a_{12}\Xi H + 2a_{13}\Xi Z + (a_{11} - 2a_{23})HZ.$$

Le lieu du pôle est donc la surface de Steiner (1) représentée

(1) En supposant que le plan (2) soit pris pour plan de l'infini, on peut donner à ce théorème la forme suivante :

Le lieu des centres des coniques tracées sur une surface de Steiner est une surface de Steiner.

J'ajoute que les quatre plans tangents doubles de la surface (1) sont des plans tangents simples de la surface (5). Si, en effet, $x = 0$ est un plan tangent double de (1), φ est un carré parfait, et peut être réduit à ξ^2 : tous les a_{ik} sont nuls sauf a_{11} , et la première des formules (5) donne

$$\rho x = a_{11} Z \Xi,$$

ce qui prouve bien que le plan $x = 0$ est tangent à la surface (5).

Les deux surfaces coupent le plan considéré (2) suivant la même courbe du quatrième ordre, etc.

par les équations suivantes, où Ξ , H , Z sont les paramètres

$$(5) \quad \begin{cases} \rho x = 4 a_{23} \Xi^2 + a_{12} H^2 + a_{33} Z^2 + 2 a_{12} \Xi H + 2 a_{13} \Xi Z + (a_{11} - 2 a_{23}) HZ, \\ \rho y = 4 b_{23} \Xi^2 + \dots\dots\dots, \\ \rho z = 4 c_{23} \Xi^2 + \dots\dots\dots, \\ \rho t = 4 e_{23} \Xi^2 + \dots\dots\dots \end{cases}$$

3. Supposons maintenant que le plan (2) soit tangent à la surface. Dans les formules (4) il faudra supposer que

$$\eta' \zeta' = 0, \quad \eta'' \zeta'' = 0.$$

On ne peut avoir en même temps $\eta' = 0$, $\eta'' = 0$ (ou $\zeta' = 0$, $\zeta'' = 0$), car deux coniques d'une surface de Steiner n'ont qu'un seul point commun, à moins d'être dans un même plan tangent, ce qui n'est pas le cas. Soit donc $\eta' = 0$, $\zeta'' = 0$, il vient

$$\rho x = a_{11} \xi' \xi'' + a_{12} \xi' \eta'' + a_{13} \xi'' \zeta' + a_{23} \eta'' \zeta',$$

ou, en divisant par $\eta'' \zeta'$, posant $\frac{\xi'}{\zeta'} = \frac{p}{r}$, $\frac{\xi''}{\eta''} = \frac{q}{r}$ et faisant rentrer $\frac{r^2}{\zeta' \eta''}$ dans ρ ,

$$\rho x = a_{11} pq + a_{12} pr + a_{13} qr + a_{23} r^2.$$

On trouve donc ici une surface représentée par les équations

$$\begin{aligned} \rho x &= a_{11} pq + a_{13} qr + a_{12} pr + a_{23} r^2, \\ \rho y &= b_{11} pq + \dots\dots\dots, \\ \rho z &= c_{11} pq + \dots\dots\dots, \\ \rho t &= e_{11} pq + \dots\dots\dots \end{aligned}$$

et qui n'est autre qu'une quadrique.

4. Le cas où le plan considéré est un plan tangent double ne donne rien d'intéressant, car les coniques de la surface lui sont toutes tangentes au point où chacune vient rencontrer la conique de contact.

Nouveaux principes de la théorie des congruences de droites;
par M. l'abbé ISSALY.

(Séance du 5 novembre 1887.)

Le but principal de ce Mémoire est de montrer comment on peut, par une voie nouvelle et très simple, faire dériver les propriétés les plus importantes des surfaces et des lignes que l'on peut tracer sur elles de celles dont jouissent spécialement les systèmes généraux rectilignes doublement indéterminés ou congruences.

La méthode adoptée nous permettra incidemment de mettre en lumière ce fait remarquable que, dans tout calcul relatif au sujet qui va nous occuper, on peut et l'on doit faire abstraction des paramètres différentiels E , F , G de Gauss.

Et en effet, outre que notre étude sera, par elle seule, une démonstration permanente de cette assertion, plusieurs exemples que l'on trouvera indiqués dans nos derniers paragraphes feront voir clairement que, si ces paramètres laissent aux formules une simplicité apparente, ils les surchargent, en réalité, de facteurs inutiles qui disparaissent d'eux-mêmes lorsqu'on a soin de donner à ces formules toute la simplicité qu'elles comportent.

Pour atteindre ce résultat, nous prendrons, dès le début, comme lignes coordonnées, une double série de courbes fonctions du temps, variant d'une façon continue de forme et de position, et ne se coupant entre elles qu'aux infiniment petits du second ordre près.

On verra que, malgré cette condition, de tels réseaux peuvent, par le simple jeu des coordonnées, c'est-à-dire par la variation arbitraire du rapport de leurs arcs infinitésimaux, engendrer des lignes ou trajectoires de toute nature.

Après avoir établi trois catégories de formules fondamentales d'une grande généralité, nous étudierons en détail les courbures de divers ordres de ces trajectoires.

C'est en s'annulant que les plus simples de ces courbures produisent les lignes si remarquables que nous qualifions, par analogie, de lignes *géodésiques*, lignes *asymptotiques*, etc., en atta-

chant toutefois à ces dénominations un sens plus large que s'il s'agissait des lignes de même nom situées sur une surface.

Après une exposition sommaire des principales propriétés de ces lignes, nous abordons celles que l'on connaît déjà sur les pinceaux ou congruences élémentaires de droites, en les faisant dépendre, pour la plupart, de théorèmes généraux qui ne paraissent pas avoir été encore signalés.

C'est là surtout que nos coordonnées obliques, dont l'introduction peut ne sembler tout d'abord qu'une complication stérile, nous permettent de pénétrer avec succès dans l'étude si intéressante des foyers et des plans focaux.

Après Malus, Sturm, Dupin, Hamilton, A. Serret, MM. Bertrand, O. Bonnet, Mannheim et autres géomètres célèbres qui ont enrichi la Science de leurs découvertes en cette matière, nous citerons spécialement la première Théorie générale des congruences de M. E. Kummer, dont la traduction par M. Dewulf fut presque aussitôt insérée (1862) dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

On remarquera avec quelle netteté, absolument exempte de tout élément parasite, les belles recherches de l'habile géomètre allemand se déduisent de nos propres formules.

Quant aux travaux des Plücker, Klein, Lie, que M. Königs a si bien résumés dans la Thèse qu'il a présentée à la Sorbonne en 1882, nous ne saurions les mentionner ici, attendu que le point de vue auquel ces auteurs se sont placés doit nous rester étranger, la géométrie euclidienne et l'espace à trois dimensions devant suffire pleinement à toutes nos investigations.

I.

Préliminaires.

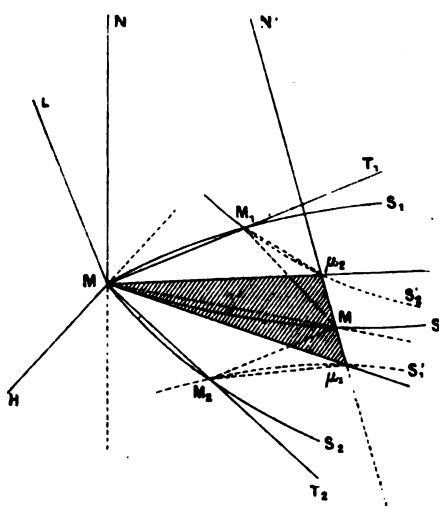
1. Les coordonnées d'un point quelconque M d'une surface donnée $F(x, y, z) = 0$ pouvant être considérées comme des fonctions de deux paramètres variables u_1 et u_2 , la surface elle-même, on le sait, peut être regardée comme engendrée par un double système de courbes S_1 et S_2 se coupant en chacun de ses points.

Soient $MM_1 = ds_1$ et $MM_2 = ds_2$ deux arcs infiniment petits

de ces lignes; MT_1 , MT_2 leurs tangentes respectives en M ; le plan T, MT_2 sera, en ce dernier point, le plan tangent à la surface F .

En devenant S'_1 et S'_2 , après leur variation, les génératrices S_1 et S_2 se coupent toujours rigoureusement en un nouveau point M' ; mais, si l'on conçoit que la surface éprouve, tout autour du point M , une déformation infiniment petite suivant une loi

Fig. 1.



donnée, puis que l'on prenne S'_1 , par exemple, sur la surface primitive, et S'_2 sur la surface déformée, ces courbes n'auront pas, en général, de point commun.

Désignons par μ_1 et μ_2 le point M' d'intersection ainsi dédoublé. La ligne de jonction $\mu_1\mu_2$, sans être, dans le cas général, normale à aucune des deux surfaces, aura cependant une direction bien déterminée. Nous dirons qu'elle est une *pseudo-normale*, en faisant voir toutefois qu'elle n'est autre que la *verticale* au plan *horizontal* T, MT_2 dans sa position infiniment voisine.

Rien n'empêche, du reste, pour le calcul, de substituer aux points μ_1 et μ_2 le pied M' de cette verticale, puisque ces deux premiers points sont généralement distants d'un infiniment petit

du second ordre du plan horizontal primitif. Entre autres avantages, nous y trouverons celui de pouvoir remplacer par l'aire du quadrilatère infinitésimal fermé $MM_1M_2M_3$ la somme des aires des deux triangles *non contigus* $MM_1\mu_2$ et $MM_2\mu_1$, éléments de ce que, par un néologisme un peu hardi, on pourrait, ce nous semble, qualifier de *pseudo-surface*.

Quoi qu'il en soit, il importe d'observer que notre manière nouvelle d'envisager les congruences de droites sera plus générale que la méthode ordinaire, puisque, en nous donnant une condition de plus, nous serons conduits aux surfaces proprement dites et non pas seulement aux surfaces réglées.

2. *Définitions et notations.* — Désignons par (a_1, b_1, c_1) , (a_2, b_2, c_2) les cosinus directeurs de MT_1 et MT_2 par rapport à trois axes rectangulaires donnés. Soient $\frac{1}{r_1}$ et $\frac{1}{r_2}$ les premières courbures des lignes S_1 et S_2 au point M , courbures que nous supposerons portées, comme les rayons r_1 et r_2 eux-mêmes, sur les normales principales correspondantes et qui, par conséquent, seront respectivement situées dans les plans normaux perpendiculaires aux tangentes MT_1 et MT_2 . Soient enfin $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ les angles de contingence, on aura les relations bien connues

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= \frac{d\sigma_1}{ds_1}, & \frac{\cos(r_1, x)}{r_1} &= \frac{da_1}{ds_1}, \\ \frac{1}{r_2} &= \frac{d\sigma_2}{ds_2}, & \frac{\cos(r_2, x)}{r_2} &= \frac{da_2}{ds_2}. \end{aligned}$$

Si maintenant on pose, par analogie,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} &= \frac{d\zeta_1}{ds_1}, & \frac{\cos(\rho_1, x)}{\rho_1} &= \frac{da_2}{ds_1}, \\ \frac{1}{\rho_2} &= \frac{d\zeta_2}{ds_2}, & \frac{\cos(\rho_2, x)}{\rho_2} &= \frac{da_1}{ds_2}, \end{aligned}$$

les nouvelles courbures $\frac{1}{\rho_1}$ et $\frac{1}{\rho_2}$ qui empruntent, pour leur formation, l'arc à une série et l'angle de contingence à l'autre, recevront convenablement le nom de courbures *corrélatives* ou *alternantes* des lignes associées S_1 , S_2 , que nous considérerons comme lignes coordonnées.

On voit, en effet, que $\frac{1}{\rho_1}$ est le rapport à l'arc ds_1 de l'angle de contingence $d\zeta_1$ que font entre elles les tangentes menées aux courbes S_1 et S'_1 aux points infiniment voisins M et M_1 situés sur S_1 , la seconde tangente pouvant, si l'on veut, être transportée parallèlement à elle-même en M ; d'autre part, $\frac{1}{\rho_2}$ est le rapport à l'arc ds_2 de l'angle $d\zeta_2$ que font les tangentes aux courbes S_1 et S'_2 aux points M et M_2 situés sur S_2 .

Mais, disons-le de suite, il est bien plus avantageux d'introduire dans les formules les *projections* de ces courbures sur le plan horizontal et sur la verticale ou, autrement dit, leurs *composantes* horizontales et verticales.

Pour distinguer ces composantes, nous conviendrons, dès à présent, d'affecter les premières d'un seul accent, et les secondes de deux.

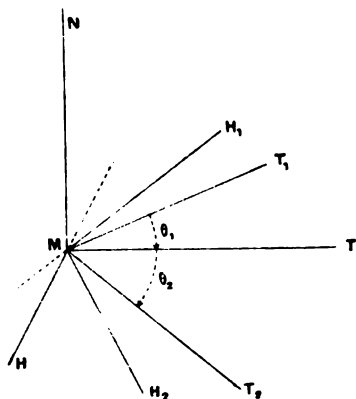
II.

Relations de première espèce.

(Valeurs finies.)

3. Prenons MT_1 , MT_2 (*fig. 2*) et MN pour axes des X , des Y et

Fig. 2.



des Z , et appelons θ l'angle T, MT_2 . Soit MT une semi-droite quelconque située dans le plan des XY , et faisant avec MX et MY des angles respectivement égaux à θ_1 , et à θ_2 .

Soit aussi MH la perpendiculaire élevée *dans le sens direct*, sur MT dans ce même plan T_1MT_2 ; on aura pour coordonnées du point pris à l'unité de distance sur chacune de ces directions

$$\frac{X'}{\sin \theta_2} = \frac{Y'}{\sin \theta_1} = \frac{1}{\sin \theta},$$

$$\frac{X''}{\cos \theta_2} = \frac{Y''}{\cos \theta_1} = \frac{1}{\sin \theta}.$$

Cela posé, si l'on rapporte ces deux points aux axes rectangulaires Mx, My, Mz de même origine, dont il a été question précédemment, et qu'on représente par $(a, b, c), (\alpha, \beta, \gamma)$ les cosinus directeurs de MT et de MH sur lesquels ils sont situés, on aura d'abord les formules de transformation

$$x = a_1 X + a_2 Y,$$

$$y = b_1 X + b_2 Y,$$

$$z = c_1 X + c_2 Y$$

et, par suite,

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{a_1 \sin \theta_2 + a_2 \sin \theta_1} = \frac{b}{b_1 \sin \theta_2 + b_2 \sin \theta_1} = \frac{c}{c_1 \sin \theta_2 + c_2 \sin \theta_1} = \frac{1}{\sin \theta} \\ \frac{\alpha}{-a_1 \cos \theta_2 + a_2 \cos \theta_1} = \frac{\beta}{-b_1 \cos \theta_2 + b_2 \cos \theta_1} = \frac{\gamma}{-c_1 \cos \theta_2 + c_2 \cos \theta_1} = \frac{1}{\sin \theta} \end{array} \right.$$

4. *Cas particuliers.* — 1° Lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, il vient simplement

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = a_1 \cos \theta_1 + a_2 \sin \theta_1, \\ \alpha = -a_1 \sin \theta_1 + a_2 \cos \theta_1, \end{array} \right.$$

et ainsi des autres.

2° Si l'on pose $\theta_1 = 0, \theta_2 = \theta$, MH coïncidera avec MH_2 , et la seconde des équations (1) nous donnera pour les cosinus de cette dernière direction

$$(3) \quad \frac{\alpha_2}{a_2 - a_1 \cos \theta} = \frac{\beta_2}{b_2 - b_1 \cos \theta} = \frac{\gamma_2}{c_2 - c_1 \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta}.$$

3° On obtiendra de même les cosinus $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ de MH_1 en posant $\theta_1 = \theta, \theta_2 = 0$. Toutefois, pour que les deux trièdres MNT_1T_2 et MNH_1H_2 soient supplémentaires, et aussi pour que nos formules ultérieures y gagnent en symétrie, nous prendrons pour MH_1 le sens opposé à celui que la construction de MH lui assignerait, et nous aurons ainsi, pour les cosinus de ce prolon-

gement,

$$(4) \quad \frac{\alpha_1}{a_1 - a_2 \cos \theta} = \frac{\beta_1}{b_1 - b_2 \cos \theta} = \frac{\gamma_1}{c_1 - c_2 \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta}.$$

Toutes les formules que nous venons d'établir, que θ soit aigu ou obtus, et que $\theta = \theta_1 + \theta_2$ soit une somme arithmétique ou algébrique, seront générales, pourvu que l'angle θ_2 soit consécutif de θ_1 , c'est-à-dire, que son premier côté soit le second côté de l'angle θ_1 .

III.

Relations de deuxième espèce.

(Dérivées partielles.)

5. 1° *Dérivées partielles relatives aux lignes coordonnées S_1 et S_2 .* — L'angle $T_1 MT_2$ ayant été déjà désigné par θ , on a d'abord

$$\cos \theta = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2.$$

Différentions par rapport à s_1 et à s_2 qui sont les arcs des courbes S_1 et S_2 en prenant ces arcs comme variables indépendantes; nous aurons

$$\begin{aligned} -\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial s_1} &= \sum a_2 \frac{\partial a_1}{\partial s_1} + \sum a_1 \frac{\partial a_2}{\partial s_1}, \\ -\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial s_2} &= \sum a_2 \frac{\partial a_2}{\partial s_1} + \sum a_1 \frac{\partial a_2}{\partial s_2}. \end{aligned}$$

Or, si l'on désigne par (a_3, b_3, c_3) les cosinus directeurs de MN, par $(l_1, m_1, n_1), \dots, (\lambda_1, \mu_1, \nu_1), \dots$ ceux des rayons de courbure absolus et corrélatifs des lignes S_1 et S_2 , le théorème des projections joint aux formules (3) et (4) nous permet d'écrire (n° 2)

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial s_1} = \frac{l_1}{r_1} = \frac{a_2}{r'_1} + \frac{a_3}{r''_1} = -\frac{a_1}{r'_1} \cot \theta + \frac{a_2}{r'_1} \operatorname{cosec} \theta + \frac{a_3}{r''_1}, \\ \frac{\partial a_2}{\partial s_1} = \frac{\lambda_1}{\rho_1} = \frac{a_1}{\rho'_1} + \frac{a_3}{\rho''_1} = \frac{a_1}{\rho'_1} \operatorname{cosec} \theta - \frac{a_2}{\rho'_1} \cot \theta + \frac{a_3}{\rho''_1}, \\ \frac{\partial a_2}{\partial s_2} = \frac{l_2}{r_2} = \frac{a_1}{r'_2} + \frac{a_3}{r''_2} = \frac{a_1}{r'_2} \operatorname{cosec} \theta - \frac{a_2}{r'_2} \cot \theta + \frac{a_3}{r''_2}, \\ \frac{\partial a_1}{\partial s_2} = \frac{\lambda_2}{\rho_2} = \frac{a_2}{\rho'_2} + \frac{a_3}{\rho''_2} = -\frac{a_1}{\rho'_2} \cot \theta + \frac{a_2}{\rho'_2} \operatorname{cosec} \theta + \frac{a_3}{\rho''_2}. \end{cases}$$

Substituant, on obtient les identités

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{1}{r'_1} + \frac{1}{\rho'_1} + \frac{\partial \theta}{\partial s_1} = 0, \\ \frac{1}{r'_2} + \frac{1}{\rho'_2} + \frac{\partial \theta}{\partial s_2} = 0, \end{cases}$$

ou bien, en introduisant les angles de contingence,

$$(6') \quad \begin{cases} d\sigma'_1 + d\zeta'_1 + d_1\theta = 0, \\ d\sigma'_2 + d\zeta'_2 + d_2\theta = 0, \end{cases}$$

relations importantes que l'abbé Aoust a signalées le premier, bien que leur haute généralité lui ait complètement échappé.

Il est à remarquer que du système (5) on tire pour les composantes verticales ces valeurs simples

$$\begin{aligned} \frac{1}{r'_1} &= \sum a_3 \frac{\partial a_1}{\partial s_1} = - \sum a_1 \frac{\partial a_3}{\partial s_1}, \\ \frac{1}{\rho'_1} &= \sum a_3 \frac{\partial a_2}{\partial s_1} = - \sum a_2 \frac{\partial a_3}{\partial s_1}, \\ \frac{1}{r'_2} &= \sum a_3 \frac{\partial a_2}{\partial s_2} = - \sum a_2 \frac{\partial a_3}{\partial s_2}, \\ \frac{1}{\rho'_2} &= \sum a_3 \frac{\partial a_1}{\partial s_2} = - \sum a_1 \frac{\partial a_3}{\partial s_2}. \end{aligned}$$

2° *Dérivées partielles relatives aux trajectoires orthogonales des lignes coordonnées.* — L'angle H_1MH_2 de ces trajectoires étant égal à $\pi - \theta$, on a

$$-\cos \theta = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2.$$

Différentiant, par rapport à s_1 et à s_2 , on trouve

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_1} = -\frac{\alpha_1}{r'_1} + \frac{\alpha_3}{\sin \theta} \left(\frac{1}{\rho'_1} - \frac{\cos \theta}{r'_1} \right), \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_1} = -\frac{\alpha_2}{\rho'_1} + \frac{\alpha_3}{\sin \theta} \left(\frac{1}{r'_1} - \frac{\cos \theta}{\rho'_1} \right), \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_2} = -\frac{\alpha_2}{r'_2} + \frac{\alpha_3}{\sin \theta} \left(\frac{1}{\rho'_2} - \frac{\cos \theta}{r'_2} \right), \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_2} = -\frac{\alpha_1}{\rho'_2} + \frac{\alpha_3}{\sin \theta} \left(\frac{1}{r'_2} - \frac{\cos \theta}{\rho'_2} \right). \end{cases}$$

On en déduit, pour les composantes horizontales,

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_1'} &= -\sum a_1 \frac{\partial x_2}{\partial s_1} = \sum \alpha_2 \frac{\partial a_1}{\partial s_1}, \\ \frac{1}{\rho_1'} &= -\sum a_2 \frac{\partial x_1}{\partial s_1} = \sum \alpha_1 \frac{\partial a_2}{\partial s_1}, \\ \frac{1}{r_2'} &= -\sum a_2 \frac{\partial x_1}{\partial s_2} = \sum \alpha_1 \frac{\partial a_2}{\partial s_2}, \\ \frac{1}{\rho_2'} &= -\sum a_1 \frac{\partial x_2}{\partial s_2} = \sum \alpha_2 \frac{\partial a_1}{\partial s_2}.\end{aligned}$$

Il résulte de nos formules que toute fonction des courbures horizontales et verticales de S_1 et S_2 , et notamment celles-ci

$$\frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{\rho_1'' \rho_2''}, \quad \frac{1}{r_1' r_2'} - \frac{1}{\rho_1' \rho_2'},$$

peut s'exprimer au moyen des cosinus (a_1, b_1, c_1) , (a_2, b_2, c_2) et des variations de ces cosinus.

3° *Dérivée partielle relative à la verticale MN.* — Nous partons de ces formules connues

$$\frac{a_1}{b_1 c_2 - c_1 b_2} = \frac{b_1}{c_1 a_2 - a_1 c_2} = \frac{c_1}{a_1 b_2 - b_1 a_2} = \frac{1}{\sin \theta}.$$

En différenciant la première, par exemple, on trouve, à l'aide des relations (5) et (6),

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_3}{\partial s_1} \sin \theta + a_3 \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial s_1} &= -\frac{a_1}{r_1''} - \frac{a_2}{\rho_1''} - a_3 \cos \theta \left(\frac{1}{\rho_1'} + \frac{1}{r_1'} \right), \\ \frac{\partial a_3}{\partial s_2} \sin \theta + a_3 \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial s_2} &= -\frac{a_1}{\rho_2''} - \frac{a_2}{r_2''} - a_3 \cos \theta \left(\frac{1}{\rho_2'} + \frac{1}{r_2'} \right).\end{aligned}$$

Or, les deux derniers termes se détruisent dans les deux membres, en vertu des identités (6), et l'on a finalement

$$(8) \quad \begin{cases} -\frac{\partial a_3}{\partial s_1} \sin^2 \theta = \left(\frac{1}{r_1''} - \frac{\cos \theta}{\rho_1''} \right) a_1 + \left(\frac{1}{\rho_1''} - \frac{\cos \theta}{r_1''} \right) a_2, \\ -\frac{\partial a_3}{\partial s_2} \sin^2 \theta = \left(\frac{1}{\rho_2''} - \frac{\cos \theta}{r_2''} \right) a_1 + \left(\frac{1}{r_2''} - \frac{\cos \theta}{\rho_2''} \right) a_2. \end{cases}$$

Application. — Si l'on compare l'aire $d\Omega$ du triangle infinitésimal $MM_1 M_2$ à l'aire $d\omega$ de son image $mm_1 m_2$ sur la sphère

dont le rayon est égal à l'unité, on aura

$$k = \frac{d\omega}{d\Omega} = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial a_3}{\partial s_1} & \frac{\partial a_3}{\partial s_2} \\ \frac{\partial b_3}{\partial s_1} & \frac{\partial b_3}{\partial s_2} \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right| = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{\rho_1'' \rho_2''} \right).$$

C'est le rapport *généralisé* de Gauss relatif à la courbure des surfaces.

IV.

Relations de troisième espèce.

(Dérivées totales.)

6. *Dérivées totales relatives aux lignes coordonnées.* — Remarquons d'abord que l'arc MM' ou ds (*fig. 1*) est fonction des deux variables indépendantes s_1 et s_2 , car l'un quelconque des deux triangles dans lesquels se décompose le quadrilatère infinitésimal fermé MM₁M'M₂ donne

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{ds_1}{\sin \theta_2} = \frac{ds_2}{\sin \theta_1} = \frac{ds}{\sin \theta}, \\ ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + 2ds_1 ds_2 \cos \theta. \end{array} \right.$$

D'après cela, on a

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{da_1}{ds} = \frac{\partial a_1}{\partial s_1} \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta} + \frac{\partial a_1}{\partial s_2} \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta}, \\ \frac{da_2}{ds} = \frac{\partial a_2}{\partial s_1} \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta} + \frac{\partial a_2}{\partial s_2} \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta}. \end{array} \right.$$

Or, si l'on remplace les dérivées partielles du second membre par leurs valeurs (5) et que l'on pose, pour abréger,

$$(10') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin \theta_2}{r_1'} + \frac{\sin \theta_1}{\rho_2'} + \frac{\sin \theta}{L_{1,2}'}, \\ \frac{\sin \theta_1}{r_2'} + \frac{\sin \theta_2}{\rho_1'} + \frac{\sin \theta}{L_{2,1}'}; \end{array} \right.$$

$$(10'') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin \theta_2}{r_1''} + \frac{\sin \theta_1}{\rho_2''} + \frac{\sin \theta}{L_{1,2}''}, \\ \frac{\sin \theta_1}{r_2''} + \frac{\sin \theta_2}{\rho_1''} + \frac{\sin \theta}{L_{2,1}''}. \end{array} \right.$$

il viendra, en se bornant aux premiers indices, qui peuvent suffire,

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{da_1}{ds} = -\frac{a_1}{L'_1} \cot \theta + \frac{a_2}{L'_1} \operatorname{cosec} \theta + \frac{a_3}{L'_1}, \\ \frac{da_2}{ds} = \frac{a_1}{L'_2} \operatorname{cosec} \theta - \frac{a_2}{L'_2} \cot \theta + \frac{a_3}{L'_2}, \end{cases}$$

expressions de même forme que la première et la troisième des formules (5).

On en tire comme corollaire

$$\begin{aligned} \frac{1}{L'_1} &= \Sigma a_2 \frac{da_1}{ds} = -\Sigma a_1 \frac{da_2}{ds}, \\ \frac{1}{L'_2} &= \Sigma a_3 \frac{da_2}{ds} = -\Sigma a_2 \frac{da_3}{ds}. \end{aligned}$$

Identité. — Comme application des formules (11), différentiations par rapport à s la valeur

$$\cos \theta = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2;$$

nous aurons

$$-\sin \theta \frac{d\theta}{ds} = \Sigma a_2 \frac{da_1}{ds} + \Sigma a_1 \frac{da_2}{ds}.$$

Substituant, on obtient l'identité

$$(12) \quad \frac{1}{L'_1} + \frac{d\theta_1}{ds} = -\left(\frac{1}{L'_2} + \frac{d\theta_2}{ds} \right),$$

que l'on peut aussi écrire

$$(12') \quad \frac{1}{L'_1} + \frac{1}{L'_2} + \frac{d\theta}{ds} = 0;$$

c'est la généralisation des relations (6).

3° *Dérivées totales relatives aux trajectoires orthogonales des lignes coordonnées.* — En suivant la même marche que ci-dessus, on trouvera

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{dx_2}{ds} = -\frac{a_1}{L'_1} + \frac{a_3}{\sin \theta} \left(\frac{1}{L'_2} - \frac{\cos \theta}{L'_1} \right), \\ \frac{dx_1}{ds} = -\frac{a_2}{L'_2} + \frac{a_3}{\sin \theta} \left(\frac{1}{L'_1} - \frac{\cos \theta}{L'_2} \right), \end{cases}$$

d'où l'on conclut

$$\begin{aligned}\frac{1}{L'_1} &= -\Sigma a_1 \frac{da_2}{ds} = \Sigma a_2 \frac{da_1}{ds}, \\ \frac{1}{L'_2} &= -\Sigma a_2 \frac{da_1}{ds} = \Sigma a_1 \frac{da_2}{ds}.\end{aligned}$$

3° *Dérivée totale relative à la verticale MN.* — Puisqu'on a

$$\frac{da_1}{ds} = \frac{\partial a_1}{\partial s_1} \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta} + \frac{\partial a_1}{\partial s_2} \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta},$$

il vient immédiatement, au moyen des formules (8),

$$(14) \quad -\frac{da_2}{ds} \sin^2 \theta = \left(\frac{1}{L'_1} - \frac{\cos \theta}{L'_2} \right) a_1 + \left(\frac{1}{L'_2} - \frac{\cos \theta}{L'_1} \right) a_2.$$

On parviendrait du reste à ce même résultat en différentiant par rapport à s la formule

$$a_3 \sin \theta = b_1 c_2 - c_1 b_2,$$

et tenant compte, dans le calcul, de l'identité (12').

V.

Application des relations précédentes à l'analyse des premières courbures composées ou déviations d'une ligne quelconque.

7. En devenant $M'T'$, la tangente MT à la courbe produite S détermine les variations simultanées $M'N'$ et $M'H'$ de la verticale MN et de la tangente MH à la trajectoire orthogonale de S ; mais il est à remarquer que de ces trois semi-droites MT varie seule dans la direction de l'arc élémentaire ds .

Désignons par $d\tau$, $d\omega$, $d\varepsilon$ les angles de contingence engendrés et posons

$$\frac{1}{r} = \frac{d\tau}{ds}, \quad \frac{1}{u} = \frac{d\omega}{ds}, \quad \frac{1}{v} = \frac{d\varepsilon}{ds}.$$

Dans $\frac{1}{r}$ on reconnaît la première courbure proprement dite de la ligne S . Nous l'appellerons plus spécialement ici la *dévi*ation *initiale* ou *donnée*.

Quant aux deux autres courbures, nous les qualifierons respectivement de *dévi*ation *horizontale* et de *dévi*ation *verticale* de

cette même ligne S, à cause du lien de dépendance qui les rattache à la tangente MT.

Il s'agit de calculer ces trois déviations :

1° *Déviatiôn initiale ou donnée.* — Soient $(a_\sigma, b_\sigma, c_\sigma)$ les cosinus directeurs de la normale principale ML de la courbe S (*fig. 1*); nous avons les relations connues

$$\frac{a_\sigma}{da} = \frac{b_\sigma}{db} = \frac{c_\sigma}{dc} = \frac{1}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}} = \frac{1}{d\sigma} = \frac{r}{ds},$$

ce qui nous conduit à calculer $\frac{da}{ds}$, par exemple.

Or, d'après (1),

$$a = a_1 \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta} + a_2 \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta};$$

par conséquent (1), substituant à $\frac{da_1}{ds}$ et $\frac{da_2}{ds}$ leurs valeurs (11), et développant les deux dernières dérivées, on trouve, eu égard à l'identité (12),

$$\frac{da}{ds} = a \left(\frac{1}{L_1'} + \frac{d\theta_1}{ds} \right) + \frac{a_2}{\sin \theta} \left(\frac{\sin \theta_2}{L_1''} + \frac{\sin \theta_1}{L_2''} \right).$$

Posons

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{1}{r'} = \frac{1}{L_1'} + \frac{d\theta_1}{ds}, \\ \frac{1}{r''} = \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\sin \theta_2}{L_1''} + \frac{\sin \theta_1}{L_2''} \right); \end{cases}$$

il viendra

$$\frac{da}{ds} = \frac{a}{r'} + \frac{a_2}{r''}$$

et, par suite,

$$\Sigma \left(\frac{da}{ds} \right)^2 = \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)^2 = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r''^2}.$$

(1) Bien que les dérivées totales $\frac{da_1}{ds}$, $\frac{da_2}{ds}$ (n° 6) deviennent ici des dérivées partielles, par rapport à $\frac{da}{ds}$, nous avons cru devoir leur conserver la caractéristique d .

$$\frac{da}{ds} = \frac{da_1}{ds} \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta} + \frac{da_2}{ds} \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta} + a_1 \frac{d}{ds} \left(\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta} \right) + a_2 \frac{d}{ds} \left(\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta} \right).$$

Ainsi, par les formules (15) nous connaissons les expressions générales des deux composantes horizontale et verticale de la déviation donnée $\frac{1}{r}$.

Comme corollaire, on voit que l'on a aussi

$$\begin{aligned}\frac{1}{r'} &= \Sigma \alpha \frac{d\alpha}{ds} = - \Sigma \alpha \frac{d\alpha}{ds}, \\ \frac{1}{r''} &= \Sigma \alpha_3 \frac{d\alpha}{ds} = - \Sigma \alpha \frac{d\alpha_3}{ds}.\end{aligned}$$

2° *Déviation horizontale.* — Soit MU la direction du rayon u de cette courbure nécessairement située dans le plan normal NMT. Représentons par (a_v, b_v, c_v) ses cosinus directeurs.

Comme ceux de MH sont (α, β, γ) , nous aurons

$$\frac{a_v}{d\alpha} = \frac{b_v}{d\beta} = \frac{c_v}{d\gamma} = \frac{1}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}} = \frac{1}{dv} = \frac{u}{ds}.$$

Calculons $\frac{d\alpha}{ds}$.

D'après (1),

$$\alpha = -a_1 \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta} + a_2 \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta};$$

différentiant, on trouve, après réduction,

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\alpha \left(\frac{1}{L_1'} + \frac{d\theta_1}{ds} \right) - \frac{a_3}{\sin \theta} \left(\frac{\cos \theta_2}{L_1''} - \frac{\cos \theta_1}{L_2} \right).$$

Posons, en vue de ce qui doit suivre,

$$(16) \quad \frac{1}{r_0} = -\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\cos \theta_2}{L_1''} - \frac{\cos \theta_1}{L_2} \right),$$

il viendra

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{\alpha}{r'} + \frac{a_3}{r_0};$$

et, par suite,

$$\Sigma \left(\frac{d\alpha}{ds} \right)^2 = \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = \frac{1}{u^2} = \frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r_0^2}.$$

On en déduit aussi

$$\begin{aligned}\frac{1}{r'} &= -\Sigma \alpha \frac{d\alpha}{ds} = \Sigma \alpha \frac{d\alpha}{ds}, \\ \frac{1}{r_0} &= \Sigma \alpha_3 \frac{d\alpha}{ds} = -\Sigma \alpha \frac{d\alpha_3}{ds}.\end{aligned}$$

3° *Déviatiou verticale.* — Désignons par MV la direction du rayon ν de cette courbure, et soient (a_z, b_z, c_z) ses cosinus directeurs.

Nous savons que ceux de MN sont (a_3, b_3, c_3) ; donc, on a

$$\frac{a_z}{da_3} = \frac{b_z}{db_3} = \frac{c_z}{dc_3} = \frac{1}{\sqrt{da_3^2 + db_3^2 + dc_3^2}} = \frac{1}{d\varepsilon} = \frac{\nu}{ds}.$$

Ici nous n'avons pas à calculer $\frac{da_3}{ds}$, car il nous est donné directement par la formule (14). En y remplaçant θ par sa valeur $\theta_1 + \theta_2$, on peut l'écrire

$$-\frac{da_3}{ds} = \frac{a}{\sin \theta} \left(\frac{\sin \theta_2}{L_1'} + \frac{\sin \theta_1}{L_2'} \right) - \frac{\alpha}{\sin \theta} \left(\frac{\cos \theta_2}{L_1'} - \frac{\cos \theta_1}{L_2'} \right),$$

ou bien, d'après (15) et (16),

$$-\frac{da_3}{ds} = \frac{a}{r'} + \frac{\alpha}{r_0}.$$

On en déduit

$$\Sigma \left(\frac{da_3}{ds} \right)^2 = \left(\frac{d\varepsilon}{ds} \right)^2 = \frac{1}{\nu^2} = \frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r_0^2},$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{1}{r'} &= -\Sigma a \frac{da_3}{ds} = \Sigma a_3 \frac{da}{ds}, \\ \frac{1}{r_0} &= -\Sigma \alpha \frac{da_3}{ds} = \Sigma \alpha_3 \frac{d\alpha}{ds}. \end{aligned}$$

En résumé, si l'on observe que la composante $\frac{1}{r'}$ est une courbure de niveau, $\frac{1}{r'}$ une courbure de profil et $\frac{1}{r_0}$ une courbure de front, on peut dire :

1° La déviation initiale est la résultante orthogonale de la première courbure de niveau et de la première courbure de profil.

2° La déviation horizontale est la résultante orthogonale de la première courbure de niveau et de la première courbure de front.

3° La déviation verticale est la résultante orthogonale de la première courbure de profil et de la première courbure de front.

8. Donnons, en terminant, quelques autres expressions fort utiles de ces courbures *élémentaires* que nos calculs viennent de mettre en évidence.

A cet effet, représentons par φ l'angle aigu du plan osculateur TML de la ligne S et du plan de profil ; par ϖ l'angle aigu du plan HML de la déviation horizontale et du plan de front ; par ω l'angle aigu du plan NMV de la déviation verticale et du plan de profil, nous pourrons, comme conséquence des valeurs trouvées, écrire les trois systèmes suivants :

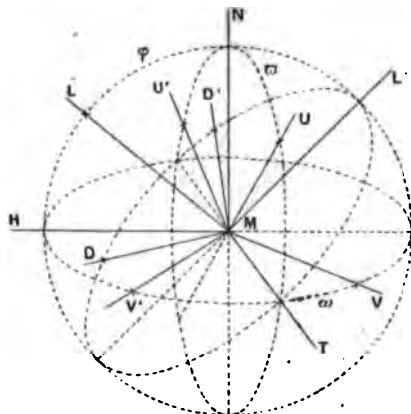
$$(17) \quad \begin{cases} \frac{1}{r'} = \frac{\sin \varphi}{r}, & \frac{1}{r'} = -\frac{\sin \varpi}{u}, & \frac{1}{r'} = -\frac{\cos \omega}{\rho}, \\ \frac{1}{r^2} = \frac{\cos \varphi}{r}, & \frac{1}{r_0} = \frac{\cos \varpi}{u}, & \frac{1}{r_0} = \frac{\sin \omega}{\rho}, \end{cases}$$

et par suite les trois équations

$$(17') \quad \begin{cases} \sin \varphi \, d\sigma = -\sin \varpi \, dv, \\ -\cos \omega \, dz = \cos \varphi \, d\sigma, \\ \cos \varpi \, dv = \sin \omega \, dz; \end{cases}$$

d'où l'on voit que, puisque les angles φ , ϖ , ω ont été choisis aigus, il est nécessaire que les quantités $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{\rho}$, dv , dz soient désormais considérées comme implicitement *négatives*.

Fig. 3.



Des formules précédentes nous déduisons cette relation fort simple

$$(18) \quad \tan \varphi = \tan \varpi \tan \omega,$$

qui donne lieu à l'énoncé suivant :

THÉOREME. — *En tout point d'une courbe quelconque tangente à l'une des arêtes d'un trièdre trirectangle dont l'une des faces adjacentes est prise pour plan horizontal : 1° le plan horizontal et le plan de la déviation donnée; 2° le plan de front et le plan de la déviation horizontale; 3° le plan de profil et le plan de la déviation verticale forment entre eux trois angles tels que, si dans chaque couple on prend l'angle aigu correspondant, le produit de leurs tangentes trigonométriques est toujours égal à l'unité (1).*

Corollaire. — Des trois systèmes (17) on peut déduire aussi l'expression de chacune des différentielles $d\varphi$, $d\varpi$, $d\omega$ en fonction des trois courbures élémentaires $\frac{1}{r'}$, $\frac{1}{r''}$, $\frac{1}{r_0}$ et de leurs variations. On a, en effet,

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{1}{r^2} d\varphi = \frac{1}{r''} d\left(\frac{1}{r'}\right) - \frac{1}{r'} d\left(\frac{1}{r''}\right), \\ \frac{1}{u^2} d\varpi = \frac{1}{r'} d\left(\frac{1}{r_0}\right) - \frac{1}{r_0} d\left(\frac{1}{r'}\right), \\ \frac{1}{v^2} d\omega = \frac{1}{r_0} d\left(\frac{1}{r''}\right) - \frac{1}{r''} d\left(\frac{1}{r_0}\right), \end{cases}$$

d'où

$$\frac{r' r''}{r^2} d\varphi + \frac{r' r_0}{u^2} d\varpi + \frac{r'' r_0}{v^2} d\omega = 0$$

ou bien

$$\frac{d\varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{d\varpi}{\sin 2\varpi} + \frac{d\omega}{\sin 2\omega},$$

relation différentielle qu'on peut, comme vérification, déduire directement de l'équation (18).

(1) Quant à la disposition de ces plans, on peut ajouter que, dans tous les cas, le *symétrique* du second plan de chaque groupe pris par rapport à son conjugué coupe les deux autres seconds plans suivant une même droite.

VI.

De quelques formes remarquables de la déviation verticale.

9. Il résulte du paragraphe précédent que l'on a

$$(20) \quad \begin{cases} -\frac{\cos \omega}{\varphi} = \frac{1}{r'} = \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\sin \theta_1}{L_1'} + \frac{\sin \theta_2}{L_2'} \right), \\ \frac{\sin \omega}{\varphi} = \frac{1}{r_0} = -\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\cos \theta_1}{L_1'} + \frac{\cos \theta_2}{L_2'} \right). \end{cases}$$

On en tire

$$(21) \quad \frac{\sin^2 \theta}{\varphi^2} = \frac{1}{L_1'^2} + \frac{1}{L_2'^2} - 2 \frac{\cos \theta}{L_1' L_2'}.$$

C'est une première expression générale de la déviation verticale.

Quand les lignes coordonnées sont rectangulaires, elle se réduit à

$$(21') \quad \frac{1}{\varphi^2} = \left(\frac{\cos \theta_1}{r_1'} + \frac{\sin \theta_1}{\rho_1} \right)^2 + \left(\frac{\sin \theta_1}{r_1'} + \frac{\cos \theta_1}{\rho_1} \right)^2.$$

Faisons, dans la formule (21), $(\theta_1 = 0, \theta_2 = \theta)$, puis $(\theta_1 = \theta, \theta_2 = 0)$; nous obtiendrons les déviations verticales relatives aux lignes coordonnées, savoir

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{\sin^2 \theta}{\varphi_1^2} = \frac{1}{r_1'^2} + \frac{1}{\rho_1^2} - 2 \frac{\cos \theta}{r_1' \rho_1}, \\ \frac{\sin^2 \theta}{\varphi_2^2} = \frac{1}{r_2'^2} + \frac{1}{\rho_2^2} - 2 \frac{\cos \theta}{r_2' \rho_2}; \end{cases}$$

et, comme l'angle des directions φ_1 et φ_2 est égal à $\theta + (\omega_1 - \omega_2)$, on en conclut cette seconde expression de $\frac{1}{\varphi^2}$

$$(21'') \quad \frac{\sin^2 \theta}{\varphi^2} = \frac{\sin^2 \theta_1}{\varphi_1^2} + \frac{\sin^2 \theta_2}{\varphi_2^2} - 2 \frac{\sin \theta_1 \sin \theta_2}{\varphi_1 \varphi_2} \cos(\varphi_1, \varphi_2).$$

Il est facile de dégager les courbures de front qui entrent dans les formules (22) et de fixer leur signe; il suffit pour cela de remonter à la valeur (16) de $\frac{1}{r_0}$ et d'y introduire les hypothèses ci-

dessus. On trouve ainsi

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin \theta}{r_{0,1}} = \frac{1}{\rho_1''} - \frac{\cos \theta}{r_{0,1}''}, \\ -\frac{\sin \theta}{r_{0,2}} = \frac{1}{\rho_2''} - \frac{\cos \theta}{r_{0,2}''}, \end{array} \right.$$

et l'on vérifie aisément que l'on a bien

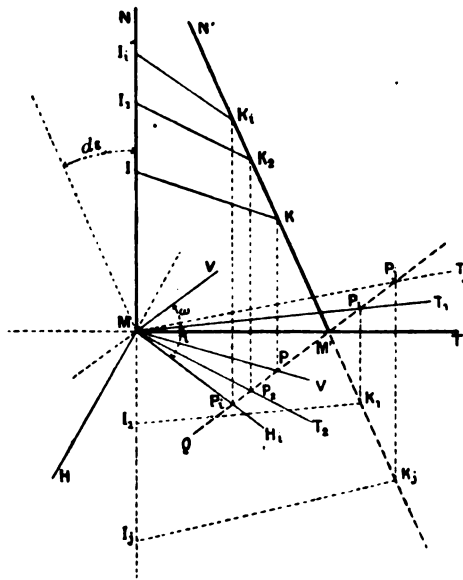
$$\frac{1}{\nu_1^2} = \frac{1}{r_1'^2} + \frac{1}{r_{0,1}^2},$$

$$\frac{1}{\nu_2^2} = \frac{1}{r_2'^2} + \frac{1}{r_{0,2}^2}.$$

Cherchons, enfin, une troisième expression générale de la déviation $\frac{1}{\nu}$ qui, dans la suite, ne nous offrira pas moins d'avantages que les précédentes.

A cet effet, observons d'abord que la projection $M'Q$ (*fig. 4*)

Fig. 4.



de la pseudo-normale (n° 1) $M'N'$ sur le plan horizontal est une droite parallèle à MV . Abaissons sur elle la perpendiculaire MV'

et soit P leur point de rencontre ; MP sera la projection de la plus courte distance IK des deux droites MN et M'N'.

Soient K₁, K₂ les traces de M'N' sur les plans normaux NMT₁, NMT₂, menés suivant les tangentes aux lignes coordonnées. Désignons par P₁, P₂ les projections sur le plan horizontal de ces traces et posons K₁P₁ = ζ₁, K₂P₂ = ζ₂.

Des triangles M'K₁P₁, M'MP₁ on tire, en valeur et en signe (n° 8),

$$M'P_1 = \zeta_1 ds = \zeta_1 \frac{ds}{\rho} = \frac{\sin \theta_1 ds}{\sin(\omega - \theta_1)}$$

et, par suite,

$$\frac{\sin(\omega - \theta_1)}{\rho} = \frac{\sin \theta_1}{\zeta_1}.$$

On obtiendrait de même

$$\frac{\sin(\omega + \theta_2)}{\rho} = -\frac{\sin \theta_2}{\zeta_2},$$

ζ₂ étant positif et ζ₁ négatif implicitement.

Cela posé, les formules (20) nous donnent

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\omega - \theta_1)}{\rho} &= \frac{\sin \theta_1}{r'} + \frac{\cos \theta_1}{r_0} = \frac{\sin \theta_1}{\zeta_1}, \\ \frac{\sin(\omega + \theta_2)}{\rho} &= -\frac{\sin \theta_2}{r'} + \frac{\cos \theta_2}{r_0} = -\frac{\sin \theta_2}{\zeta_2}; \end{aligned}$$

d'où, par une combinaison évidente,

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{\sin \theta_1}{\zeta_1} = \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{1}{L_2''} - \frac{\cos \theta}{L_1''} \right), \\ \frac{\sin \theta_2}{\zeta_2} = \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{1}{L_1''} - \frac{\cos \theta}{L_2''} \right). \end{cases}$$

D'autre part, la formule (14), pouvant s'écrire

$$-\frac{\sin \theta}{\rho} a_z = \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{1}{L_1''} - \frac{\cos \theta}{L_2''} \right) a_1 + \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{1}{L_2''} - \frac{\cos \theta}{L_1''} \right) a_2,$$

revient à

$$-\frac{\sin \theta}{\rho} a_z = \frac{\sin \theta_2}{\zeta_2} a_1 + \frac{\sin \theta_1}{\zeta_1} a_2.$$

On en tire immédiatement l'expression cherchée

$$(21'') \quad \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} = \frac{\sin^2 \theta_1}{\zeta_1^2} + \frac{\sin^2 \theta_2}{\zeta_2^2} + 2 \frac{\sin \theta_1 \sin \theta_2}{\zeta_1 \zeta_2} \cos \theta.$$

VII.

Des composantes générales de la déviation verticale et de leurs propriétés.

11. Soit MH_i une semi-droite menée par le point M dans le plan horizontal et faisant, dans le sens direct, avec MT un angle quelconque i consécutif de ω ; le système (20) nous donne

$$(25) \quad -\frac{\cos(\omega + i)}{\nu} = \frac{\cos i}{r''} + \frac{\sin i}{r_0} = \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\sin(\theta_2 - i)}{L_1''} + \frac{\sin(\theta_1 + i)}{L_2''} \right].$$

Si maintenant on remplace dans cette formule i par $i - \frac{\pi}{2}$, ce qui revient à considérer une seconde droite MT_j , telle que MH soit élevée par rapport à elle dans le sens direct, on trouve

$$(26) \quad -\frac{\sin(\omega + i)}{\nu} = \frac{\sin i}{r''} - \frac{\cos i}{r_0} = \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\cos(\theta_2 - i)}{L_1''} - \frac{\cos(\theta_1 + i)}{L_2''} \right].$$

On est ainsi conduit à poser

$$\frac{\cos(\omega + i)}{\nu} = \frac{1}{\nu_i}, \quad \frac{\sin(\omega + i)}{\nu} = \frac{1}{\nu_j},$$

puisque'il est évident que ces quantités ne sont autres que les projections positives ou négatives (selon la valeur qu'on attribue à i) de $\frac{1}{\nu}$ sur MH_i et MT_j .

Leur variation est facile à suivre; car si, parmi les valeurs que l'on peut attribuer à i , on choisit les suivantes

$$-\frac{\pi}{2}, \quad -\omega, \quad 0, \quad \frac{\pi}{2} - \omega, \quad \frac{\pi}{2},$$

qui correspondent aux directions — MH , MV , MT , MV' , MH , les projections $\frac{1}{\nu_i}$, $\frac{1}{\nu_j}$ prendront les valeurs simultanées

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{r_0}, & \frac{1}{\nu}, & -\frac{1}{r''}, & 0, & -\frac{1}{r_0}, \\ \frac{1}{r''}, & 0, & \frac{1}{r_0}, & \frac{1}{\nu}, & -\frac{1}{r''}. \end{array}$$

12. *Propriétés de ces composantes.* — 1° Si, dans l'équation (25), on remplace successivement i par $i - \theta_1$ et $i + \theta_2$, puis, qu'on multiplie la première des équations ainsi formées par

$\sin \theta_2$, la seconde par $\sin \theta_1$, et qu'on les ajoute, on obtiendra pour résultat une expression du second degré homogène en $\sin \theta_1$ et $\sin \theta_2$, ou bien en ds_1 et ds_2 , que nous retrouverons, du reste, un peu plus tard :

$$(25') \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{\sin^2 \theta}{v_i} &= \left[\frac{\sin i}{\rho_1^2} + \frac{\sin(\theta - i)}{r_1^2} \right] \sin^2 \theta_2 \\ &+ \left\{ \left[\frac{\sin i}{r_2^2} + \frac{\sin(\theta - i)}{\rho_2^2} \right] - \left[\frac{\sin i}{r_1^2} - \frac{\sin(\theta + i)}{\rho_1^2} \right] \right\} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ &- \left[\frac{\sin i}{\rho_2^2} - \frac{\sin(\theta + i)}{r_2^2} \right] \sin^2 \theta_1. \end{aligned} \right.$$

On en déduirait immédiatement l'expression correspondante de $\frac{1}{v_j}$ en changeant i en $i - \frac{\pi}{2}$; elle est de même forme que la précédente.

2° Menons les plans normaux NMH_i et NMT_j . Soient K_i, K_j les traces de la pseudo-normale $M'N'$ sur ces plans et P_i, P_j les projections horizontales de ces traces. On obtiendra, ou par la considération de nouveaux triangles, ou bien en posant simplement dans les valeurs trouvées au n° 10 : $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - i$ et $\theta_2 = i$, les formules

$$(25'') \quad -\frac{\cos(\omega + i)}{v} = \frac{\cos i}{r''} + \frac{\sin i}{r_0} = \frac{\cos i}{\zeta_j} = -\frac{1}{v_i},$$

$$(26'') \quad \frac{\sin(\omega + i)}{v} = -\frac{\sin i}{r''} + \frac{\cos i}{r_0} = -\frac{\sin i}{\zeta_i} = \frac{1}{v_j},$$

dans lesquelles ζ_i et ζ_j sont les deux ordonnées $K_i P_i$ et $K_j P_j$ construites dans les mêmes conditions que ζ_2 et ζ_1 respectivement.

3° Du système (24) on tire

$$(27) \quad \begin{cases} \frac{\sin \theta}{L_1''} = \frac{\sin \theta_1}{\zeta_1} \cos \theta + \frac{\sin \theta_2}{\zeta_2}, \\ \frac{\sin \theta}{L_2''} = \frac{\sin \theta_1}{\zeta_1} + \frac{\sin \theta_2}{\zeta_2} \cos \theta. \end{cases}$$

Or, si l'on substitue ces expressions dans les formules (20), on trouve

$$(25''') \quad -\frac{\sin \theta}{v_i} = -\frac{\cos i}{\zeta_j} \sin \theta = \frac{\sin \theta_1}{\zeta_1} \cos(\theta_2 - i) + \frac{\sin \theta_2}{\zeta_2} \cos(\theta_1 + i),$$

$$(26''') \quad \frac{\sin \theta}{v_j} = -\frac{\sin i}{\zeta_i} \sin \theta = \frac{\sin \theta_1}{\zeta_1} \sin(\theta_2 - i) - \frac{\sin \theta_2}{\zeta_2} \sin(\theta_1 + i),$$

ce qui montre que $\frac{1}{\zeta_i}$ et $\frac{1}{\zeta_j}$ s'expriment *linéairement* en $\frac{1}{\zeta_1}$ et $\frac{1}{\zeta_2}$.

VIII.

Secondes courbures ou flexions d'une ligne quelconque.

(Méthode géométrique.)

13. Soient MTLL', MHUU', MNVV' les trièdres trirectangles relatifs aux trois déviations (*fig. 4*). Afin d'obtenir des résultats plus symétriques, nous supposerons que dans le second la disposition des arêtes est inverse, ainsi que la figure l'indique d'ailleurs.

Désignons par $(a'_\sigma, b'_\sigma, c'_\sigma)$, (a'_ν, b'_ν, c'_ν) , $(a'_\epsilon, b'_\epsilon, c'_\epsilon)$ les cosinus directeurs des trois arêtes ML', MU', MV' de ces trièdres. D'après ce qu'on a vu au n° 10, nous pouvons écrire

$$(28) \quad \begin{cases} \cos(N, L') = a_3 a'_\sigma + b_3 b'_\sigma + c_3 c'_\sigma = \sin \varphi, \\ \cos(N, U') = a_3 a'_\nu + b_3 b'_\nu + c_3 c'_\nu = \sin \varpi, \\ \cos(T, V') = a_3 a'_\epsilon + b_3 b'_\epsilon + c_3 c'_\epsilon = \sin \omega, \end{cases}$$

avec les conditions que nous fournit la théorie des courbes gauches :

$$\begin{aligned} da &= a_\sigma d\sigma, & da'_\sigma &= a_\sigma d\tau, \\ dx &= a_\nu d\nu, & da'_\nu &= a_\nu d\delta, \\ da_3 &= a_\epsilon d\epsilon, & da'_\epsilon &= a_\epsilon d\eta, \end{aligned}$$

et où l'on a représenté par $d\tau$, $d\delta$, $d\eta$ les angles de contingence relatifs aux variations des troisièmes arêtes des trièdres.

D'autre part, la Trigonométrie sphérique nous donne

$$\begin{aligned} \cos(V, L') &= \cos \varphi \sin \omega, \\ \cos(V, U') &= -\cos \varpi \cos \omega, \\ \cos(L, V') &= \sin \varphi \cos \omega. \end{aligned}$$

Différentiant les formules (18), il vient

$$(29) \quad \begin{cases} d\tau = d\varphi - \sin \omega d\epsilon, \\ d\delta = d\varpi - \cos \varphi d\sigma, \\ d\eta = d\omega - \sin \varphi d\sigma, \end{cases}$$

ou bien, en introduisant les rayons de courbure

$$(29') \quad \begin{cases} \frac{1}{t} = \frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r_0}, \\ \frac{1}{m} = \frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r^2}, \\ \frac{1}{w} = \frac{d\omega}{ds} = \frac{1}{r^2}. \end{cases}$$

Nous donnerons à ces nouvelles courbures les noms respectifs de *flexions* : 1° de front; 2° de profil; 3° de niveau, parce qu'elles sont situées, comme les courbures élémentaires correspondantes $\frac{1}{r_0}, \frac{1}{r'}, \frac{1}{r''}$, dans les plans de même désinence.

IX.

Expressions analytiques des trois flexions et de leurs composantes orthogonales.

14. 1° *Flexion de front (ou torsion) de la ligne S.* — Nous commençons par cette seconde courbure, parce que, à la manière de la déviation initiale, elle est *intrinsèque* à la ligne S et n'est pas, comme les deux autres flexions, introduite par le système que définissent les variations du trièdre MNT, T₂.

Soient donc $(a_\sigma, b_\sigma, c_\sigma)$ et $(a'_\sigma, b'_\sigma, c'_\sigma)$ les cosinus directeurs de la normale principale ML et de l'axe ML' du plan osculateur de S. D'après les formules préliminaires (1'), on a, dans le plan normal NMH,

$$\begin{aligned} a'_\sigma &= -\alpha \cos \varphi + a_2 \sin \varphi, \\ a_\sigma &= \alpha \sin \varphi + a_2 \cos \varphi, \end{aligned}$$

et par suite, d'après (1) et (17),

$$\begin{aligned} \frac{a'_\sigma}{r} &= \frac{a_1}{r'} \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta} - \frac{a_2}{r'} \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta} + \frac{a_3}{r'}, \\ \frac{t}{r} \frac{da'_\sigma}{ds} &= \frac{a_\sigma}{r} = -\frac{a_1}{r'} \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta} + \frac{a_2}{r'} \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta} + \frac{a_3}{r'}. \end{aligned}$$

Différentiant la première, nous connaissons deux valeurs identiques de $\frac{1}{r} \frac{da'_\sigma}{ds}$. Égalant entre eux les coefficients de a_3 , la question se trouve résolue, car cette condition d'égalité revient à

$$\frac{1}{t} = \frac{r'}{r} \frac{d}{ds} \left(\frac{r}{r'} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\cos \theta_2}{L'_1} - \frac{\cos \theta_1}{L'_2} \right).$$

Ajoutons que si, après avoir formé deux équations, analogues pour les coefficients de a_1 et a_2 , on multipliait la première par $\sin \theta_1$, la seconde par $\sin \theta_2$ et qu'on les ajoutât, on trouverait, comme seconde expression de l'inconnue $\frac{1}{t}$,

$$\frac{1}{t} = -\frac{r'}{r} \frac{d}{ds} \left(\frac{r}{r'} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\cos \theta_2}{L'_1} - \frac{\cos \theta_1}{L'_2} \right).$$

On constate l'identité de ces deux valeurs en différentiant les relations

$$r = r' \sin \varphi = r'' \cos \varphi,$$

ce qui mène à cette troisième forme que nous avons surtout en vue de retrouver :

$$(30) \quad \frac{1}{t} = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\cos \theta_2}{L_1''} - \frac{\cos \theta_1}{L_2''} \right)$$

ou enfin

$$\frac{1}{t} = \frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r_0}.$$

Il importe de remarquer ici que les rayons de torsion t et de déviation initiale r coïncident, en direction, suivant ML, puisqu'on a

$$\begin{aligned} a_\sigma &= r \frac{da}{ds} = \cos(r, x), \\ a_\sigma &= t \frac{da'_\sigma}{ds} = \cos(t, x), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

On en conclut ces relations, souvent utiles, entre leurs composantes de même nom :

$$\frac{r}{t} = \frac{r'}{t'} = \frac{r''}{t''}.$$

2° *Flexion de profil.* — Les cosinus directeurs de MU et de MU étant respectivement (a_u, b_u, c_u) et (a'_u, b'_u, c'_u) , la formule (1'), appliquée à ces directions dans le plan normal NMT, nous donne

$$\begin{aligned} a'_u &= -a \cos \varpi + a_3 \sin \varpi, \\ a_u &= a \sin \varpi + a_3 \cos \varpi, \end{aligned}$$

et, par suite, on a

$$\begin{aligned} -\frac{a'_u}{u} &= \frac{a_1}{r_0} \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta} + \frac{a_2}{r_0} \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta} + \frac{a_3}{r'}, \\ \frac{m}{u} \frac{da'_u}{ds} = \frac{a_u}{u} &= -\frac{a_1}{r'} \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta} - \frac{a_2}{r'} \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta} + \frac{a_3}{r_0}. \end{aligned}$$

Différentiant la première et égalant entre eux, ici encore, les coefficients de a_3 dans les deux expressions de $\frac{1}{u} \frac{da'_u}{ds}$, on trouve immédiatement

$$\frac{1}{m} = -\frac{r_0}{u} \frac{d}{ds} \left(\frac{u}{r'} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\sin \theta_2}{L_1''} + \frac{\sin \theta_1}{L_2''} \right).$$

Une combinaison convenable des deux conditions relatives à α_1 et α_2 donnerait

$$\frac{1}{m} = \frac{r'}{u} \frac{d}{ds} \left(\frac{u}{r_0} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\sin \theta_2}{L_1''} + \frac{\sin \theta_1}{L_2''} \right),$$

et, comme on a (17)

$$u = r_0 \cos \varpi = -r' \sin \varpi,$$

on en conclut

$$(31) \quad \frac{1}{m} = \frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\sin \theta_2}{L_1''} + \frac{\sin \theta_1}{L_2''} \right)$$

ou enfin

$$\frac{1}{m} = \frac{d\varpi}{dt} - \frac{1}{r''},$$

comme précédemment.

Quant aux composantes suivant MN et — MT, la coïncidence, en direction, des rayons u et m suivant MU permet d'écrire

$$\frac{u}{m} = \frac{u''}{m''} = \frac{u'''}{m'''},$$

avec $u'' = r_0$ et $u''' = -r'$.

3° *Flexion de niveau ou courbure pseudo-conjuguée.* — Il nous faut partir ici des cosinus directeurs $(a_\varepsilon, b_\varepsilon, c_\varepsilon)$ de MV et $(a'_\varepsilon, b'_\varepsilon, c'_\varepsilon)$ de MV'. On a

$$\begin{cases} a'_\varepsilon = \alpha \cos \omega + a \sin \omega, \\ a_\varepsilon = -\alpha \sin \omega + a \cos \omega \end{cases}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{a'_\varepsilon}{v} &= \frac{a_1}{r''} \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta} - \frac{a_2}{r''} \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta} + \frac{a}{r_0}, \\ \frac{v}{v} \frac{da'_\varepsilon}{ds} &= \frac{a_\varepsilon}{v} = \frac{a_1}{r_0} \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta} - \frac{a_2}{r_0} \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta} - \frac{a}{r''}. \end{aligned}$$

Si l'on différentie la première et qu'on égale les coefficients de α_3 , on retombe simplement sur la valeur connue (16) de $\frac{1}{r_0}$. Il devient donc nécessaire et non plus facultatif, comme dans les deux premiers cas, de combiner entre elles les conditions qu'on obtient en égalant entre eux les coefficients de α_1 et de α_2 . On trouvera ainsi

$$(32) \quad \frac{1}{w} = \frac{v^2}{\sin^2 \theta} \left\{ \left[\frac{1}{L_2''} \left(\frac{1}{L_2''} - \frac{\cos \theta}{L_1''} \right) - \frac{\sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin \theta} \left(\frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{\rho_1'' \rho_2''} \right) \right] \frac{d\theta_1}{ds} \right. \\ \left. - \left[\frac{1}{L_1''} \left(\frac{1}{L_1''} - \frac{\cos \theta}{L_2''} \right) - \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2}{\sin \theta} \left(\frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{\rho_1'' \rho_2''} \right) \right] \frac{d\theta_2}{ds} \right\} - \left(\frac{1}{L_1'} + \frac{d\theta_1}{ds} \right),$$

d'où l'on voit que, pour que la concordance de nos formules soit manifeste, il nous reste à faire voir que cette dernière revient à

$$\frac{1}{w} = \frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{r'}.$$

A cet effet, remarquons d'abord qu'en désignant par θ'_1 et θ'_2 les angles que MV' fait avec les axes coordonnés, on a, dans les conditions de figure où nous nous sommes placés (n° 8),

$$(33) \quad \begin{cases} \theta'_1 = \theta_1 + \left(\frac{\pi}{2} - \omega\right), \\ \theta'_2 = \theta_2 - \left(\frac{\pi}{2} - \omega\right); \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} d\theta'_1 &= d\theta_1 - d\omega, \\ d\theta'_2 &= d\theta_2 + d\omega, \end{aligned}$$

double système dont chacun ne fournit plus qu'une équation lorsqu'on suppose les coordonnées rectangulaires.

D'autre part, pour ce même cas d'orthogonalité, l'équation (32) se réduit à

$$\frac{1}{w} = \left[1 - v^2 \left(\frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{\rho_1'' \rho_2''}\right)\right] \frac{d\theta_1}{ds} - \frac{1}{r'},$$

v étant alors donné par la formule

$$\frac{1}{v^2} = \left(\frac{\cos \theta_1}{r_1''} + \frac{\sin \theta_1}{\rho_2''}\right)^2 + \left(\frac{\sin \theta_1}{r_2''} + \frac{\cos \theta_1}{\rho_1''}\right)^2.$$

La question est donc ramenée à prouver que l'on a identiquement

$$\frac{d\omega}{ds} = \left[1 - v^2 \left(\frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{\rho_1'' \rho_2''}\right)\right] \frac{d\theta_1}{ds},$$

ou mieux encore

$$d\theta'_1 = v^2 \left(\frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{\rho_1'' \rho_2''}\right) d\theta_1.$$

Or, si l'on intègre cette expression, on trouve

$$(34) \quad \frac{1}{r_1''} + \left(\frac{\tan \theta_1}{\rho_2''} + \frac{\tan \theta'_1}{\rho_1''}\right) + \frac{\tan \theta_1 \tan \theta'_1}{r_2''} = 0,$$

relation que nous reconnaitrons plus tard être celle qui lie les directions *pseudo-conjuguées* MT et MV' . Elle exprime que ces deux semi-droites sont deux directions *homologues* dans deux faisceaux

homographiques. La propriété des *tangentes conjuguées* dans les surfaces n'en est qu'un cas particulier correspondant à l'hypothèse $\frac{1}{\rho_1''} = \frac{1}{\rho_2''}$, mais nous ne saurions insister davantage, en ce moment, sur ce point.

Quant aux composantes orthogonales de $\frac{1}{\omega}$, observons qu'à cause des relations connues (17)

$$v = r_0 \sin \omega = -r' \cos \omega$$

on a d'abord

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{r_0}{v} \frac{d}{ds} \left(\frac{v}{r'} \right) = -\frac{r''}{v} \frac{d}{ds} \left(\frac{v}{r_0} \right),$$

puis, en vertu de la coïncidence suivant MV des rayons v et ω ,

$$\frac{v}{\omega} = \frac{v'}{\omega'} = \frac{v'''}{\omega'''},$$

en posant $v' = r_0$ et $v''' = -r''$.

X.

Troisièmes courbures ou courbures rectifiantes.

12. Troisième courbure absolue. — La théorie des courbes gauches nous fournit d'elle-même les trois relations suivantes :

$$(35) \quad \frac{da}{ds} = \frac{a_\sigma}{r}, \quad \frac{da'_\sigma}{ds} = \frac{a_\sigma}{t}, \quad \frac{da_\sigma}{ds} = -\frac{a}{r} - \frac{a'_\sigma}{t}.$$

Jusqu'ici nous n'avons utilisé que les deux premières. Considérons actuellement la troisième. La courbure qu'elle définit est relative à la variation de la normale principale, ML, c'est-à-dire, de la direction commune des rayons r et t .

Comme on a manifestement

$$\Sigma \left(\frac{da_\sigma}{ds} \right)^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{t^2} = \frac{1}{p^2},$$

on nomme $\frac{1}{p}$ la troisième courbure absolue de la ligne S.

Soit MD (*fig. 3*) la direction du rayon p . Élevons sur le plan LMD la perpendiculaire MD' du côté de MN; nous obtiendrons la droite rectifiante (absolue) de la ligne S en M. Il s'agit d'évaluer les cosinus directeurs de MD et de MD'.

Pour cela, remarquons que le trièdre trirectangle MLDD' est dans les mêmes conditions que le trièdre MTL L'; les formules (35) lui sont donc applicables. Or de la première on tire

$$\frac{\cos(D, x)}{p} = \frac{da_{\sigma}}{ds};$$

d'où l'on conclut, d'après la troisième,

$$(36) \quad \frac{\cos(D, x)}{p} = -\frac{a}{r} - \frac{a'_{\sigma}}{t}.$$

Quant à MD', on a pour déterminer $\cos(D', x)$, par exemple :

$$\frac{\cos(D', x)}{p} = b_{\sigma} \frac{dc_{\sigma}}{ds} - c_{\sigma} \frac{db_{\sigma}}{ds} = -\left(\frac{c}{r} + \frac{c'_{\sigma}}{t}\right) b_{\sigma} + \left(\frac{b}{r} + \frac{b'_{\sigma}}{t}\right) c_{\sigma},$$

d'où

$$(37) \quad \frac{\cos(D', x)}{p} = \frac{a'_{\sigma}}{r} - \frac{a}{t}.$$

16. Propriétés. — On sait que les deux droites MD et MD' sont situées dans le plan *rectifiant*, c'est-à-dire dans le plan de la tangente MT et de l'axe ML' du plan osculateur.

A cette propriété nous adjoindrons celles que renferme le tableau suivant :

$\cos(D, L') = -\frac{p}{t},$	$\cos(D', L') = \frac{p}{r},$
$\cos(D, T) = -\frac{p}{r},$	$\cos(D', T) = -\frac{p}{t},$
$\cos(D, N) = -\frac{p}{t'},$	$\cos(D', N) = \frac{p}{r'},$
$\cos(D, H) = \frac{p}{t''},$	$\cos(D', H) = -\frac{p}{r''}.$
$\cos(D, U) = \frac{up}{rr'} - \frac{up}{t'r_0},$	$\cos(D', U) = \frac{up}{tr'} + \frac{up}{r'r_0},$
$\cos(D, U') = \frac{vp}{rr_0} + \frac{up}{t'r'},$	$\cos(D', U') = \frac{up}{t'r_0} - \frac{up}{r'^2},$
$\cos(D, V) = \frac{vp}{rr'} - \frac{vp}{t'r_0},$	$\cos(D', V) = \frac{vp}{tr''} + \frac{vp}{r''r_0},$
$\cos(D, V') = -\frac{vp}{rr_0} - \frac{vp}{t'r''},$	$\cos(D', V') = -\frac{vp}{tr_0} + \frac{vp}{r'^2}.$

Ces valeurs sont indépendantes de tout système de coordonnées.

On s'est aidé pour les calculer de ce que l'on a (n° 14)

$$\frac{r}{t} = \frac{r'}{t'} = \frac{r''}{t''}.$$

Quant aux cosinus des angles que font MD et MD' avec les lignes coordonnées, on trouve

$$\cos(D, T_1) = -\frac{p}{r} \sin \theta_1 - \frac{p}{r} \cos \theta_1,$$

$$\cos(D, T_2) = \frac{p}{r} \sin \theta_2 - \frac{p}{r} \cos \theta_2;$$

$$\cos(D', T_1) = \frac{p}{r'} \sin \theta_1 - \frac{p}{r'} \cos \theta_1,$$

$$\cos(D', T_2) = -\frac{p}{r'} \sin \theta_2 - \frac{p}{r'} \cos \theta_2.$$

17. *Troisièmes courbures dérivées.* — Considérons maintenant les courbures relatives à la variation de MU qui est la direction de $\frac{1}{u}$ et de $\frac{1}{w}$, et à celle de MV qui est la direction de $\frac{1}{v}$ et de $\frac{1}{\omega}$. Nous avons

$$\sum \left(\frac{da_u}{ds} \right)^2 = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} = \frac{1}{q^2},$$

$$\sum \left(\frac{da_v}{ds} \right)^2 = \frac{1}{v^2} + \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Il y aurait donc lieu de construire deux nouveaux trièdres analogues au trièdre MLDD' et dont la troisième arête serait, pour chacun, la droite rectifiante *dérivée* de ces nouvelles courbures.

On pourrait enfin dresser, pour ces courbures rectifiantes *extrinsèques*, deux tableaux qui auraient de grandes analogies avec le précédent. Nous nous contenterons d'écrire les trois formules qui suivent et dont la composition symétrique suffira pour justifier, à vue, pour ainsi dire, notre assertion :

$$\frac{1}{p^2} = \left(\frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r''^2} \right) + \left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{r_0} \right)^2,$$

$$\frac{1}{q^2} = \left(\frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r_0^2} \right) + \left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{r'} \right)^2,$$

$$\frac{1}{r^2} = \left(\frac{1}{r''^2} + \frac{1}{r_0^2} \right) + \left(\frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{r'} \right)^2.$$

Que si maintenant on convient de porter ces trois courbures

sur les arêtes d'un trièdre trirectangle quelconque, on aura pour la courbure résultante ou *totale* de la ligne S

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2}.$$

Elle sera donc parfaitement déterminée en grandeur et en direction.

XI.

Première application des théories précédentes à diverses lignes remarquables et d'une définition généralisée. — Lignes géodésiques, lignes asymptotiques, etc.

18. *Lignes géodésiques.* — Par analogie avec ce qui a lieu pour les surfaces, nous appellerons lignes géodésiques de tout système défini par la variation du trièdre MNT, T, donné celles pour lesquelles la première courbure horizontale ou de niveau $\frac{1}{r'}$ est nulle en chacun de leurs points. Leur équation est donc

$$\frac{1}{L'_1} + \frac{d\theta_1}{ds} = 0$$

ou, plus explicitement;

$$\left(\frac{1}{r'_1} + \frac{\partial \theta}{\partial s_1} \right) ds_1 = \left(\frac{1}{r'_2} + \frac{\partial \theta}{\partial s_2} \right) ds_2.$$

On remarquera, en effet, que, dans tous les calculs qui nous ont donné la valeur de $\frac{1}{r'}$, nous nous sommes constamment affranchi de la condition $\frac{1}{\rho'_1} = \frac{1}{\rho'_2}$ qui, comme on le verra dans la suite, est la condition caractéristique des surfaces.

19. *Indicatrice.* — Reprenons l'expression de la première courbure verticale (15), savoir

$$\frac{\sin \theta}{r''} = \frac{\sin \theta_2}{L''_1} + \frac{\sin \theta_1}{L''_2}$$

ou, en développant,

$$(38) \quad \frac{\sin^2 \theta}{r''} = \frac{\sin^2 \theta_2}{r''_1} + \left(\frac{1}{\rho'_1} + \frac{1}{\rho'_2} \right) \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \frac{\sin^2 \theta_1}{r''_2}.$$

Posons

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta} \sqrt{r^2} = X, \quad \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta} \sqrt{r^2} = Y;$$

il viendra

$$(39) \quad \frac{X^2}{r_1^2} + \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right) XY + \frac{Y^2}{r_2^2} = 1,$$

équation d'une conique située dans le plan T, MT_2 et qui appartient aux genres ellipse, hyperbole ou parabole, selon que la quantité

$$\frac{1}{r_1^2 r_2^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right)^2$$

est ou positive, ou négative, ou nulle.

Nous ferons observer que c'est là aussi l'indicatrice proprement dite d'une surface auxiliaire ou fictive F_μ qui aurait pour courbure normale alternante de ses lignes génératrices la moyenne arithmétique des courbures $\frac{1}{\rho_1^2}$ et $\frac{1}{\rho_2^2}$ des lignes S_1 et S_2 .

Cette surface *moyenne* pourrait, ce nous semble, être substituée avantageusement en tout point M au réseau discontinu des triangles $MM_1\mu_2, MM_2\mu_1$, dont il a été question au n° 1, s'il s'agissait, par exemple, de définir la courbure d'une pseudo-surface autour de chacun de ses points; mais de telles considérations, sur lesquelles nous comptons revenir, ne sauraient trouver place ici.

L'équation aux carrés des inverses des demi-axes de l'indicatrice (39) est

$$\frac{\sin^2 \theta}{R^2} - \left[\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right) \cos \theta \right] \frac{1}{R^2} + \left[\frac{1}{r_1^2 r_2^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right)^2 \right] = 0,$$

ce qui fournit les rayons de courbure R_1' et R_2' relatifs aux plans dits *principaux* NMA_1, NMA_2 du système rectiligne considéré, et permet d'écrire les invariants :

$$\frac{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right) \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'},$$

$$\frac{\frac{1}{r_1^2 r_2^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right)^2}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{R_1' R_2'}.$$

Rapportée à ses axes de figures, l'indicatrice prend la forme réduite

$$(39') \quad \frac{X^2}{R_1''} + \frac{Y^2}{R_2''} = 1,$$

en même temps que la courbure verticale ci-dessus s'écrit

$$(40) \quad \frac{1}{r''} = \frac{\cos^2 \theta_1}{R_1''} + \frac{\sin^2 \theta_1}{R_2''}.$$

20. *Nouvelle forme de l'équation de l'indicatrice.* — En vertu des formules (5), on a

$$\frac{1}{r_1''} = \frac{1}{r_1} (l_1 a_3 + m_1 b_3 + n_1 c_3)$$

ou bien

$$\frac{\sin \theta}{r_1''} = \frac{1}{r_1} [l_1 (b_1 c_2 - c_1 b_2) + m_1 (c_1 a_2 - a_1 c_2) + n_1 (a_1 b_2 - b_1 a_2)],$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{\sin \theta}{r_1''} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \frac{l_1}{r_1} \\ b_1 & b_2 & \frac{m_1}{r_1} \\ c_1 & c_2 & \frac{n_1}{r_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s_1} & \frac{\partial x}{\partial s_2} & \frac{\partial^2 x}{\partial s_1^2} \\ \frac{\partial y}{\partial s_1} & \frac{\partial y}{\partial s_2} & \frac{\partial^2 y}{\partial s_1^2} \\ \frac{\partial z}{\partial s_1} & \frac{\partial z}{\partial s_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial s_1^2} \end{vmatrix} = \Delta_1'.$$

On trouvera pour valeur de $\frac{\sin \theta}{r_2''}$ un nouveau déterminant Δ_2' qui ne différera du précédent qu'en ce que les éléments de la dernière colonne y seront remplacés par $\frac{\partial^2 x}{\partial s_2^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial s_2^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial s_2^2}$.

En troisième lieu, on a

$$\frac{1}{\rho_1''} = \frac{1}{\rho_1} (\lambda_1 a_3 + \mu_1 b_3 + \nu_1 c_3);$$

d'où

$$\frac{\sin \theta}{\rho_1''} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \frac{\lambda_1}{\rho_1} \\ b_1 & b_2 & \frac{\mu_1}{\rho_1} \\ c_1 & c_2 & \frac{\nu_1}{\rho_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s_1} & \frac{\partial x}{\partial s_2} & \frac{\partial^2 x}{\partial s_2 \partial s_1} \\ \frac{\partial y}{\partial s_1} & \frac{\partial y}{\partial s_2} & \frac{\partial^2 y}{\partial s_2 \partial s_1} \\ \frac{\partial z}{\partial s_1} & \frac{\partial z}{\partial s_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial s_2 \partial s_1} \end{vmatrix} = \Delta_1'.$$

Enfin, pour $\frac{\sin \theta}{\rho_2''}$, on obtiendra un quatrième déterminant ne différant du précédent qu'en ce que les éléments de la dernière colonne y sont remplacés par $\frac{\partial^2 x}{\partial s_1 \partial s_2}, \frac{\partial^2 y}{\partial s_1 \partial s_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial s_1 \partial s_2}$.

Ce n'est que lorsque les lignes S_1 et S_2 engendrent une même surface F que l'on a $\frac{\partial^2 x}{\partial s_2 \partial s_1} = \frac{\partial^2 x}{\partial s_1 \partial s_2}$, et, par suite, $\Delta_1^2 = \Delta_2^1$ ou encore $\frac{1}{\rho_1''} = \frac{1}{\rho_2''}$. Hors de là, il n'existe pas, comme on le sait, de fonction $F(x, y, z) = 0$ dont les dérivées partielles puissent servir à exprimer les coefficients différentiels qui entrent dans nos déterminants.

De ce qui précède, il résulte que, pour toute pseudo-surface ou pour tout système rectiligne, on a

$$(41) \quad r_1'' \Delta_1^1 = r_2'' \Delta_2^2 = \rho_1'' \Delta_1^2 = \rho_2'' \Delta_2^1 = \sin \theta.$$

Donc l'indicatrice correspondante peut se mettre sous la forme

$$(39'') \quad \Delta_1^1 X^2 + (\Delta_1^2 + \Delta_2^1) XY + \Delta_2^2 Y^2 = \sin \theta.$$

21. Lignes asymptotiques. — Nous appelons *lignes asymptotiques* celles pour lesquelles la première courbure verticale ou de profil $\frac{1}{r''}$ est nulle en chacun de leurs points.

Leur équation est conséquemment

$$\frac{ds_1^2}{r_1''} + \left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''} \right) ds_1 ds_2 + \frac{ds_2^2}{r_2''} = 0,$$

ou bien

$$\Delta_1^1 ds_1^2 + (\Delta_1^2 + \Delta_2^1) ds_1 ds_2 + \Delta_2^2 ds_2^2 = 0.$$

On peut obtenir immédiatement l'équation de ces lignes en posant les conditions

$$\frac{da_3}{\alpha} = \frac{db_3}{\beta} = \frac{dc_3}{\gamma},$$

et exprimant que ces rapports sont indépendants de a_1 et de a_2 . On trouve ainsi (1) et (14)

$$\frac{\frac{1}{L_1''} - \frac{\cos \theta}{L_2''}}{-\cos \theta_2} = \frac{\frac{1}{L_2''} - \frac{\cos \theta}{L_1''}}{\cos \theta_1};$$

d'où, en réduisant,

$$\frac{\sin \theta_2}{L_1} + \frac{\sin \theta_1}{L_2} = 0,$$

ce qui est la forme *primitive* de ces lignes.

22. Lignes de courbure. — L'analogie nous conduit à désigner de la sorte les lignes pour lesquelles la courbure de front $\frac{1}{r_0}$ est nulle en chaque point.

Leur équation est donc tout d'abord (16)

$$\frac{\cos \theta_2}{L_1''} = \frac{\cos \theta_1}{L_2''}.$$

Mais

$$ds \cos \theta_1 = ds_1 + ds_2 \cos \theta,$$

$$ds \cos \theta_2 = ds_2 + ds_1 \cos \theta.$$

Substituant, on a

$$(42) \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{\rho_1''} - \frac{\cos \theta}{r_1''} \right) ds_1^2 \\ &+ \left[\left(\frac{1}{r_2''} - \frac{\cos \theta}{\rho_2''} \right) - \left(\frac{1}{r_1''} - \frac{\cos \theta}{\rho_1''} \right) \right] ds_1 ds_2 - \left(\frac{1}{\rho_2''} - \frac{\cos \theta}{r_2''} \right) ds_2^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

ou bien

$$\begin{aligned} &(\Delta_1^2 - \Delta_1^1 \cos \theta) ds_1^2 \\ &+ [(\Delta_2^2 - \Delta_2^1 \cos \theta) - (\Delta_1^1 - \Delta_1^2 \cos \theta)] ds_1 ds_2 - (\Delta_2^2 - \Delta_2^1 \cos \theta) ds_2^2 = 0, \end{aligned}$$

Ces lignes de courbure, *obliques* ou *angulaires* entre elles, évidemment (1), mais toutefois d'égale inclinaison sur les axes de l'indicatrice du système rectiligne auquel elles appartiennent, sont telles que les deux pseudo-normales qui ont leur pied à l'extrémité M' de leur premier élément rencontrent la verticale MN, chacune en un point qu'en Optique on nomme *foyers du rayon* MN. Ceci est la conséquence de l'équation ou plutôt de la définition même de ces lignes.

Cherchons à déterminer ces foyers.

(1) Ce ne sont donc pas les lignes de courbure proprement dites de la surface auxiliaire F_μ , lesquelles sont représentées par l'équation bien différente

$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''} \right) - \frac{\cos \theta}{r_1''} \right] ds_1^2 + \left(\frac{1}{r_2''} - \frac{1}{r_1''} \right) ds_1 ds_2 - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''} \right) - \frac{\cos \theta}{r_2''} \right] ds_2^2 = 0.$$

Pour cela, observons que l'équation $\frac{\cos \theta_2}{L_1''} = \frac{\cos \theta_1}{L_2''}$ revient à

$$\begin{aligned} \frac{\frac{ds_1}{r_1''} + \frac{ds_2}{\rho_2''}}{ds_1 + ds_2 \cos \theta} &= \frac{\frac{ds_1}{\rho_1''} + \frac{ds_2}{\rho_2''}}{ds_2 + ds_1 \cos \theta} \\ &= \frac{\frac{ds_1^2}{r_1''} + \left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''}\right) ds_1 ds_2 + \frac{ds_2^2}{r_2''}}{ds^2} = \frac{1}{r''}; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r_1''} - \frac{1}{r''}\right) ds_1 + \left(\frac{1}{\rho_2''} - \frac{\cos \theta}{r''}\right) ds_2 &= 0, \\ \left(\frac{1}{\rho_1''} - \frac{\cos \theta}{r''}\right) ds_1 + \left(\frac{1}{r_2''} - \frac{1}{r''}\right) ds_2 &= 0. \end{aligned}$$

Pour que ces équations soient compatibles, il faut et il suffit que l'on ait

$$(43) \quad \frac{\sin^2 \theta}{r''^2} - \left[\frac{1}{r_1''} + \frac{1}{r_2''} - \left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''} \right) \cos \theta \right] \frac{1}{r''} + \left(\frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{\rho_1'' \rho_2''} \right) = 0.$$

Telle est l'équation, de même forme, mais plus simple, que celle qu'a donnée M. Kummer dans sa théorie générale des systèmes rectilignes pour la détermination des mêmes points, qui fournit les distances r_{f_1} et r_{f_2} de l'origine M à chacun des foyers.

On en déduit aussi les relations suivantes

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{f_1}''} + \frac{1}{r_{f_2}''} &= \frac{1}{R_1''} + \frac{1}{R_2''}, \\ \frac{1}{r_{f_1}'' r_{f_2}''} &= \frac{1}{R_{v_1}'' R_{v_2}''}; \end{aligned}$$

en désignant par R_{v_1} , R_{v_2} les carrés des demi-axes de l'indicatrice

$$\frac{X^2}{R_{v_1}''} + \frac{Y^2}{R_{v_2}''} = 1$$

ou

$$(44) \quad \frac{X^2}{r_1''} + 2 \frac{XY}{\sqrt{\rho_1'' \rho_2''}} + \frac{Y^2}{r_2''} = 1$$

d'une seconde surface auxiliaire F_v correspondant à la moyenne géométrique (supposée toujours réelle) des courbures normales

$\frac{1}{\rho_1''}$ et $\frac{1}{\rho_2''}$, comme l'indicatrice de la surface F_μ correspondait tout à l'heure à la moyenne arithmétique.

En introduisant ce nouvel élément de calcul, on peut dire que la condition nécessaire et suffisante pour que les lignes de courbure obliques d'un système donné soient réelles est

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1''} + \frac{1}{R_2''} \right) > \frac{1}{R_v'' R_v''}.$$

Quant à l'angle $\mathfrak{S}$ qu'elles font entre elles, on trouve aisément, pour le déterminer,

$$\tan \mathfrak{S} = \frac{\frac{1}{r_{f_1}''} - \frac{1}{r_{f_2}''}}{\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{1}{\rho_1''} - \frac{1}{\rho_2''} \right)}.$$

Les deux termes de cette expression sont des invariants, et le dénominateur, en particulier, est égal à la somme des courbures de front relatives à deux directions rectangulaires, somme nulle, on le sait (23), dans le cas des surfaces.

23. Vu l'importance des lignes qui nous occupent, nous allons indiquer brièvement deux autres méthodes pour les obtenir.

Et d'abord, il suffit de poser, par analogie avec les lignes asymptotiques,

$$\frac{da_3}{a} = \frac{db_3}{b} = \frac{dc_3}{c},$$

ce qui donne

$$\frac{\frac{1}{L_1''} - \frac{\cos \theta}{L_2''}}{\sin \theta_2} = \frac{\frac{1}{L_2''} - \frac{\cos \theta}{L_1''}}{\sin \theta_1};$$

d'où

$$\frac{\cos \theta_2}{L_1''} = \frac{\cos \theta_1}{L_2''}.$$

On les obtient aussi, et cette remarque nous sera fort utile, à l'aide des formules (24) mises sous la forme

$$(45) \quad \begin{cases} \frac{\sin^2 \theta}{\zeta_1} = \left(\frac{1}{r_2''} - \frac{\cos \theta}{\rho_2''} \right) + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{\rho_1''} - \frac{\cos \theta}{r_1''} \right), \\ \frac{\sin^2 \theta}{\zeta_2} = \left(\frac{1}{r_1''} - \frac{\cos \theta}{\rho_1''} \right) + m \left(\frac{1}{\rho_2''} - \frac{\cos \theta}{r_2''} \right), \end{cases}$$

après qu'on y a fait

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{ds_2}{ds_1} = m.$$

Il suffit effectivement d'égaliser les seconds membres pour retomber sur l'équation (42).

Enfin, il n'est pas sans intérêt d'observer que, lorsque la condition $\frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{\rho_1'' \rho_2''} = 0$ est remplie, l'équation des lignes de courbure se décompose en deux facteurs réels du premier degré et donne pour ces lignes

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho_1''} - \frac{\cos \theta}{r_1''} \right) ds_1 + \left(\frac{1}{r_2''} - \frac{\cos \theta}{\rho_2''} \right) ds_2 &= 0, \\ \left(\frac{1}{\rho_2''} - \frac{\cos \theta}{r_2''} \right) ds_1 - \left(\frac{1}{r_1''} - \frac{\cos \theta}{\rho_1''} \right) ds_2 &= 0, \end{aligned}$$

ou bien équivalamment

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r_1''} - \frac{\cos \theta}{\rho_1''} \right) ds_1 + \left(\frac{1}{\rho_2''} - \frac{\cos \theta}{r_2''} \right) ds_2 &= 0, \\ \left(\frac{1}{r_2''} - \frac{\cos \theta}{\rho_2''} \right) ds_1 - \left(\frac{1}{\rho_2''} - \frac{\cos \theta}{r_2''} \right) ds_2 &= 0. \end{aligned}$$

24. Lignes pseudo-conjuguées sous angle constant. — Pour obtenir ces nouvelles lignes, on égalera à zéro la composante $\frac{1}{v_i}$ de la déviation verticale (25'), ce qui donne

$$(46) \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{\sin i}{\rho_1''} + \frac{\sin(\theta - i)}{r_1''} \right] ds_1^2 \\ &+ \left[\frac{\sin i}{r_2''} + \frac{\sin(\theta - i)}{\rho_2''} \right] - \left[\frac{\sin i}{r_1''} - \frac{\sin(\theta + i)}{\rho_1''} \right] \{ ds_1 ds_2 \\ &\quad - \left[\frac{\sin i}{\rho_2''} - \frac{\sin(\theta + i)}{r_2''} \right] ds_2^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Ces lignes, non encore signalées, croyons-nous, généralisent les précédentes; car, pour $i = 0$, on retrouve les lignes asymptotiques, et pour $i = \frac{\pi}{2}$, on a les lignes de courbure angulaires (42).

Nous indiquerons dans l'un des paragraphes suivants une méthode plus directe pour les obtenir

Enfin, si l'on change i en $i - \frac{\pi}{2}$ dans l'équation (46), on aura

une équation de même forme représentant les courbes *complémentaires* des précédentes, c'est-à-dire des courbes qui se coupent sous le complément de l'angle constant i donné.

XII.

Examen du cas où les lignes précédentes appartiendraient à une surface.

23. Considérons, durant tout le cours de ce paragraphe, les arcs élémentaires ds_1 et ds_2 des lignes coordonnées S_1, S_2 comme fonctions des paramètres u_1 et u_2 dont nous nous sommes occupés au n° 1; on aura

$$d_1 x = a_1 ds_1, \quad d_2 x = a_2 ds_2;$$

d'où

$$\begin{aligned} d_2 d_1 x &= d_2 a_1 ds_1 + a_1 d_2 ds_1, \\ d_1 d_2 x &= d_1 a_2 ds_2 + a_2 d_1 ds_2. \end{aligned}$$

Les premiers membres étant égaux, par hypothèse, on doit avoir

$$\frac{\partial a_1}{\partial s_2} ds_1 ds_2 + a_1 d_2 ds_1 = \frac{\partial a_2}{\partial s_1} ds_1 ds_2 + a_2 d_1 ds_2.$$

Si l'on substitue à ces dérivées partielles leurs valeurs (5) et qu'on égale, dans les deux membres, les coefficients de a_1, a_2, a_3 , on trouvera

$$\begin{aligned} d_2 ds_1 &= \frac{ds_1 ds_2}{\sin \theta} \left(\frac{1}{\rho'_1} + \frac{\cos \theta}{\rho'_2} \right), \\ d_1 ds_2 &= \frac{ds_1 ds_2}{\sin \theta} \left(\frac{1}{\rho'_2} + \frac{\cos \theta}{\rho'_1} \right), \\ \frac{1}{\rho'_1} &= \frac{1}{\rho'_2}. \end{aligned}$$

Telles sont les conditions déjà connues qu'il nous faut introduire dans nos formules pour passer du cas général des systèmes rectilignes à celui des surfaces.

Voyons d'abord ce que deviennent les rayons de première courbure horizontale et verticale (qu'il conviendra d'appeler, pour la circonstance, rayons de première courbure tangentielle et normale).

Nous emprunterons la première de ces expressions à l'abbé Aoust qui, après avoir donné les conditions ci-dessus, l'en fait

sortir par un calcul facile et trouve (voir *Analyse infinitésimale des lignes tracées sur une surface*)

$$(a) \quad \frac{ds_1 ds_2 \sin \theta}{r'} = d_1(ds_2 \cos \theta_2) - d_2(ds_1 \cos \theta_1).$$

Cela étant, posons avec Gauss

$$\sum \left(\frac{\partial x}{\partial u_1} \right)^2 = E, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\partial x}{\partial u_2} = F, \quad \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u_2} \right)^2 = G;$$

il viendra

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \sin \theta = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}} = \frac{\delta}{\sqrt{EG}},$$

en faisant

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = \delta^2.$$

D'autre part,

$$ds \cos \theta_1 = ds_1 + ds_2 \cos \theta,$$

$$ds \cos \theta_2 = ds_2 + ds_1 \cos \theta.$$

Multipliant respectivement par $\frac{ds_1}{ds}$, $\frac{ds_2}{ds}$ et substituant, on aura cette forme nouvelle

$$(a') \quad \frac{\delta}{r'} = \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{F du_1 + G du_2}{ds} \right) - \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{E du_1 + F du_2}{ds} \right),$$

avec

$$ds^2 = E du_1^2 + 2F du_1 du_2 + G du_2^2.$$

Quant à la première courbure normale, si, dans son expression générale (38), on fait $\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2}$, il vient

$$(b) \quad \frac{ds^2}{r''} = \frac{ds_1^2}{r_1''} + 2 \frac{ds_1 ds_2}{\rho_1''} + \frac{ds_2^2}{r_2''};$$

d'où, par l'introduction des paramètres différentiels E, F, G,

$$\frac{ds^2}{r''} = \frac{E}{r_1''} du_1^2 + 2 \frac{\sqrt{EG}}{\rho_1''} du_1 du_2 + \frac{G}{r_2''} du_2^2.$$

Il n'y a plus qu'à trouver les valeurs de $\frac{1}{r_1''}$, $\frac{1}{\rho_1''}$, $\frac{1}{r_2''}$. Or nous

avons

$$\begin{aligned}\frac{l_1}{r_1} &= \frac{\partial^2 x}{\partial s_1^2} = \frac{1}{E} \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \\ \frac{\lambda_1}{\rho_1} &= \frac{\partial^2 x}{\partial s_2 \partial s_1} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial^2 x}{\partial u_2 \partial u_1}, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

d'où l'on voit que, si, pour abrégér, on pose

$$\Delta_{1,1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u_1^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u_1^2} \end{vmatrix},$$

puis qu'on représente par $\Delta_{1,2}$ ou $\Delta_{2,1}$, indifféremment, et par $\Delta_{2,2}$ deux autres déterminants qui ne diffèrent du précédent qu'en ce que la dernière colonne ait pour éléments $\frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial u_1 \partial u_2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u_1 \partial u_2}$ dans le premier et $\frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial u_2^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u_2^2}$ dans le second, on aura d'abord

$$(c) \quad \frac{E}{r_1^2} = \frac{\Delta_{1,1}}{\delta}, \quad \frac{\sqrt{EG}}{\rho_1^2} = \frac{\Delta_{1,2}}{\delta}, \quad \frac{G}{r_2^2} = \frac{\Delta_{2,2}}{\delta},$$

et, par suite, la valeur de la courbure normale que nous voulons obtenir pourra s'écrire

$$(d) \quad \frac{\delta}{r^2} = \frac{\Delta_{1,1} du_1^2 + 2\Delta_{1,2} du_1 du_2 + \Delta_{2,2} du_2^2}{E du_1^2 + 2F du_1 du_2 + G du_2^2}.$$

Faisons quelques applications de ces diverses formules.

26. 1° Rien ne change dans l'équation générale des *lignes géodésiques* lorsqu'on passe des systèmes rectilignes aux surfaces (n° 18); mais, outre cette forme, nous avons, par la formule (a'), celle-ci, qui est plus avantageuse pour le calcul :

$$(e) \quad \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{F du_1 + G du_2}{ds} \right) = \frac{\partial s}{\partial u_2} \left(\frac{E du_1 + F du_2}{ds} \right).$$

Premier exemple. — Posons $u_1 = x$, $u_2 = y$, $dz = p dx + q dy$; on trouve

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2.$$

Par suite, l'équation des lignes géodésiques est, dans ce cas,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{pq \, dx + (1 + q^2) \, dy}{ds} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{(1 + p^2) \, dx + pq \, dy}{ds} \right],$$

avec

$$ds^2 = (1 + p^2) \, dx^2 + 2pq \, dx \, dy + (1 + q^2) \, dy^2.$$

On en tire, en faisant

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t,$$

$$(p \, dy - q \, dx)(r \, dx^2 + 2s \, dx \, dy + t \, dy^2) - (1 + p^2 + q^2)(dx \, d^2 y - dy \, d^2 x) = c.$$

Or ceci équivaut à

$$p(dy \, d^2 z - dz \, d^2 y) + q(dz \, d^2 x - dx \, d^2 z) - (dx \, d^2 y - dy \, d^2 x) = 0,$$

si l'on a soin d'éliminer de cette dernière les différentielles totales de z . On retrouve ainsi l'équation ordinaire des lignes géodésiques.

Deuxième exemple. — Considérons, comme cas particulier, l'hélicoïde gauche à plan directeur représenté par le système

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega, \quad z = a \omega.$$

En posant $u_1 = \omega$, $u_2 = \rho$, on a.

$$E = \rho^2 + a^2, \quad F = 0, \quad G = 1$$

et, par suite,

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{d\rho}{\sqrt{d\rho^2 + (\rho^2 + a^2) d\omega^2}} \right] = \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{(\rho^2 + a^2) d\omega}{\sqrt{d\rho^2 + (\rho^2 + a^2) d\omega^2}} \right];$$

d'où, en prenant ω pour variable indépendante,

$$\left(\rho + \frac{a^2}{\rho} \right) \frac{d^2 \rho}{d\omega^2} - 2 \frac{d\rho}{d\omega} - (\rho^2 + a^2) = 0,$$

équation différentielle de la projection, sur le plan directeur, des lignes géodésiques de l'hélicoïde.

2° L'indicatrice d'une surface s'obtiendra en posant $\frac{1}{\rho_1''} = \frac{1}{\rho_2''}$ dans l'équation (39). On a donc

$$\frac{X^2}{r_1''} + 2 \frac{XY}{\rho_1''} + \frac{Y^2}{r_2''} = 1$$

ou bien

$$\Delta_{1,1} X^2 + 2 \Delta_{1,2} XY + \Delta_{2,2} Y^2 = \delta.$$

L'équation aux carrés des inverses de ses demi-axes $\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2}$ étant

$$\frac{\sin^2 \theta}{R^2} - \left(\frac{1}{r_1''} + \frac{1}{r_2''} - 2 \frac{\cos \theta}{\rho_1''} \right) \frac{1}{R} + \left(\frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{\rho_1''^2} \right) = 0,$$

on saura former l'équation réduite de l'indicatrice

$$\frac{X^2}{R_1} + \frac{Y^2}{R_2} = 1.$$

3° Pour avoir les *lignes asymptotiques* d'une surface, il suffira d'introduire l'hypothèse $\frac{1}{\rho_1''} = \frac{1}{\rho_2''}$, soit dans leur équation générale (n° 21)

$$\frac{\sin \theta_2}{L_1''} + \frac{\sin \theta_1}{L_1''} = 0,$$

soit dans les conditions

$$\frac{da_3}{\alpha} = \frac{db_3}{\beta} = \frac{dc_3}{\gamma},$$

ce qui donne

$$\frac{ds_1^2}{r_1''} + 2 \frac{ds_1 ds_2}{\rho_1''} + \frac{ds_2^2}{r_2''} = 0$$

ou encore

$$(f) \quad \Delta_{1,1} du_1^2 + 2 \Delta_{1,2} du_1 du_2 + \Delta_{2,2} du_2^2 = 0.$$

En tout ceci, nous avons fait abstraction de l'équation de l'indicatrice qui, comme on le sait, pouvait nous les donner directement.

Faisons dans cette dernière équation $u_1 = x, u_2 = y$, on aura

$$\Delta_{1,1} = r, \quad \Delta_{1,2} = s, \quad \Delta_{2,2} = t;$$

d'où la forme connue

$$r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2 = 0.$$

S'il s'agit, en particulier, de l'hélicoïde gauche,

$$\Delta_{1,1} = 0, \quad \Delta_{1,2} = -a, \quad \Delta_{2,2} = 0;$$

conséquemment il vient

$$4 \quad \rho d\rho d\omega = 0,$$

ce qui donne, sur le plan directeur, des circonférences concentriques et leurs trajectoires orthogonales qui sont les rayons.

4° Les *lignes de courbure* d'une surface, c'est-à-dire, celles pour lesquelles la courbure de front $\frac{1}{r_0}$ (bien inexactement appelée *seconde courbure géodésique* ou *torsion géodésique*) résulte, soit de leur équation générale (n° 22)

$$\frac{\cos \theta_2}{L_1^2} = \frac{\cos \theta_1}{L_2^2},$$

soit des conditions

$$\frac{da_2}{a} = \frac{db_2}{b} = \frac{dc_2}{c}.$$

On a ainsi

$$(g) \left(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{\cos \theta}{r_1^2} \right) ds_1^2 + \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) ds_1 ds_2 - \left(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{\cos \theta}{r_2^2} \right) ds_2^2 = 0,$$

ou bien, d'après les formules (c) ci-dessus,

$$(E\Delta_{1,2} - F\Delta_{1,1}) du_1^2 + (E\Delta_{2,2} - G\Delta_{1,1}) du_1 du_2 - (G\Delta_{1,2} - F\Delta_{2,2}) du_2^2 = 0.$$

En posant $u_1 = x$, $u_2 = y$, on a vu que

$$\begin{aligned} \Delta_{1,1} &= r, & \Delta_{1,2} &= s, & \Delta_{2,2} &= t, \\ E &= 1 + p^2, & F &= pq, & G &= 1 + q^2; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &[(1 + p^2)s - pqr] dx^2 \\ &+ [(1 + p^2)t - (1 + q^2)r] dx dy - [(1 + q^2)s - pqt] dy^2 = 0, \end{aligned}$$

ce qui est bien l'équation ordinaire des lignes de courbure.

Entre autres propriétés, observons que, si l'on pose $\frac{ds_2}{ds_1} = m$, l'équation (g) de ces lignes prendra la forme

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}m + \mathfrak{C}m^2 = 0;$$

la condition d'orthogonalité

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{C} - \mathfrak{B} \cos \theta = 0$$

est donc satisfaite.

Il y a plus, cette équation (g) est explicitement de la forme

$$(B - A \cos \theta) + (C - A)m - (B - C \cos \theta)m^2 = 0;$$

les lignes de courbure d'une surface sont donc tangentes aux sections principales.

Supposons que l'on ait $\frac{1}{r_1^2 r_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2} = 0$, l'indicatrice se réduira

à deux droites parallèles et l'on sera dans le cas des surfaces développables. L'équation des lignes de courbure se décompose alors en

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho_1''} - \frac{\cos \theta}{r_1''} \right) ds_1 + \left(\frac{1}{r_2''} - \frac{\cos \theta}{\rho_1''} \right) ds_2 &= 0, \\ \left(\frac{1}{\rho_1''} - \frac{\cos \theta}{r_1''} \right) ds_1 - \left(\frac{1}{r_1''} - \frac{\cos \theta}{\rho_1''} \right) ds_2 &= 0, \end{aligned}$$

et il est aisé de reconnaître dans la première équation de ce système la direction de la génératrice rectiligne ou la tangente à l'arête de rebroussement de la surface, etc.

5° Les *lignes conjuguées* qui se coupent sous un angle constant i ont pour équation (n° 24)

$$(h) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\sin i}{\rho_1''} + \frac{\sin(\theta - i)}{r_1''} \right] ds_1^2 \\ & + \left\{ \left[\frac{\sin i}{r_2''} + \frac{\sin(\theta - i)}{\rho_1''} \right] - \left[\frac{\sin i}{r_1''} - \frac{\sin(\theta + i)}{\rho_1''} \right] \right\} ds_1 ds_2 \\ & - \left[\frac{\sin i}{\rho_1''} - \frac{\sin(\theta + i)}{r_2''} \right] ds_2^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour $i = 0$, on retrouve les lignes asymptotiques et, pour $i = \frac{\pi}{2}$, les lignes de courbure.

Enfin, on obtiendrait les lignes *complémentaires* des lignes (h), en remplaçant dans leur équation i par $i - \frac{\pi}{2}$.

XIII.

Deuxième application : recherche de quelques lieux géométriques.

27. Après cette digression sur les surfaces, revenons à considérer s_1 et s_2 comme variables indépendantes.

Formules préliminaires. — Calculons, en premier lieu, les cosinus directeurs (a'_i, b'_i, c'_i) de MV' , troisième arête du trièdre trirectangle $MNVV'$ (fig. 4).

On a

$$\frac{a'_1}{v} = b_3 \frac{dc_3}{ds} - c_3 \frac{db_3}{ds},$$

et par suite (14)

$$(47) \quad \frac{a'_2}{v} \sin \theta = \frac{a_1}{l_2''} - \frac{a_2}{l_1''}.$$

Mais la première des formules (1) nous permet d'écrire

$$\frac{a'_2}{v} = \frac{\sin \theta'_2}{v} \frac{a_1}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta'_1}{v} \frac{a_2}{\sin \theta}.$$

Comparant, il vient

$$(48) \quad \begin{cases} \frac{\sin \theta'_1}{v} = -\frac{1}{L'_1}, \\ \frac{\sin \theta'_2}{v} = \frac{1}{L'_2}. \end{cases}$$

On en conclut aussitôt, en faisant $\frac{\sin \theta'_1}{\sin \theta'_2} = \frac{ds'_1}{ds'_2} = m'$,

$$(49) \quad \frac{ds'_1}{L'_1} + \frac{ds'_2}{L'_2} = 0$$

et, successivement,

$$(49') \quad \frac{ds_1 ds'_1}{r_1^2} + \frac{ds_2 ds'_1}{\rho_2^2} + \frac{ds_1 ds'_2}{\rho_1^2} + \frac{ds_2 ds'_2}{r_2^2} = 0,$$

$$\frac{1}{r_1^2} + \left(\frac{m}{\rho_2^2} + \frac{m'}{\rho_1^2} \right) + \frac{mm'}{r_1^2} = 0,$$

formule qui généralise, pour les coordonnées obliques, la relation (34), et qui, conjointement avec l'expression connue

$$\text{tang } i = \frac{(m' - m) \sin \theta}{1 + (m + m') \cos \theta + mm'},$$

fait retomber, par l'élimination de m , sur l'équation des *lignes pseudo-conjuguées* (46). C'est la solution que nous avons annoncée au même lieu.

Quant aux cosinus des angles θ'_1 et θ'_2 relatifs à MV' , on peut les tirer des valeurs (48) qui donnent (n° 9)

$$(50) \quad \begin{cases} \frac{\cos \theta'_1}{v} = \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{1}{L'_2} - \frac{\cos \theta}{L'_1} \right) = \frac{\sin \theta_1}{\zeta_1}, \\ \frac{\cos \theta'_2}{v} = -\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{1}{L'_1} - \frac{\cos \theta}{L'_2} \right) = -\frac{\sin \theta_2}{\zeta_2}. \end{cases}$$

2° Il nous sera utile de résoudre, par rapport à θ_1 et θ_2 , les formules (48) et (50).

En posant, pour abréger,

$$\frac{\sin \theta'_2}{r_1^2} + \frac{\sin \theta'_1}{\rho_1^2} = \frac{\sin \theta}{L'_1},$$

$$\frac{\sin \theta'_1}{r_2^2} + \frac{\sin \theta'_2}{\rho_2^2} = \frac{\sin \theta}{L'_2},$$

conjointement avec

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{\rho_1'' \rho_2''} \right) = k,$$

on trouve

$$(51) \quad \begin{cases} kv \sin \theta_1 = \frac{1}{L_1''}, \\ kv \sin \theta_2 = -\frac{1}{L_2''}, \end{cases}$$

résultat qui permet de mettre la relation fondamentale (49) sous la forme

$$\frac{ds_1}{L_1''} + \frac{ds_2}{L_2''} = 0,$$

et qui nous donne aussi, pour les cosinus correspondants,

$$(52) \quad \begin{cases} kv \cos \theta_1 = -\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{1}{L_2''} - \frac{\cos \theta}{L_1''} \right), \\ kv \cos \theta_2 = \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{1}{L_1''} - \frac{\cos \theta}{L_2''} \right). \end{cases}$$

Finalement, on a donc, comme nouvelle expression de la déviation verticale,

$$k^2 v^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{L_1''^2} + \frac{1}{L_2''^2} - 2 \frac{\cos \theta}{L_1'' L_2''}.$$

On verra, par l'application que nous allons en faire, l'utilité et l'importance de ces formules auxiliaires.

28. PROBLÈME I. — Ligne de striction axiale. — Cherchons, en projection horizontale, le lieu que décrit l'extrémité K de la plus courte distance de la verticale MN à la pseudo-normale M'N', lorsque celle-ci tourne autour de MN en s'appuyant sur une courbe infinitésimale située dans le plan horizontal (*fig. 4*).

On a d'abord (33)

$$d\lambda = ds \sin \omega = ds \cos(\theta'_1 - \theta_1) = ds \cos(\theta_2 - \theta'_2);$$

d'où, en développant l'une ou l'autre de ces relations,

$$(53) \quad kv d\lambda = \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\cos \theta'_2}{L_1''} - \frac{\cos \theta'_1}{L_2''} \right) ds,$$

l'arc ds n'étant assujéti qu'à la condition de rester infiniment petit.

Cette formule résout la question pour le cas très général où l'on voudrait rapporter la direction MV' du rayon vecteur MP à deux directions quelconques MT_1 et MT_2 . Mais il est plus simple de supposer ces deux directions rectangulaires entre elles, et l'on aura alors, dans le système de coordonnées polaires $d\lambda$ et θ'_1 ,

$$(53') \quad d\lambda = \frac{\frac{\sin \theta'_1}{\rho_1} + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \sin \theta'_1 \cos \theta'_1 - \frac{\cos^2 \theta'_1}{\rho_2}}{\sqrt{\left(\frac{\cos \theta'_1}{r_1} + \frac{\sin \theta'_1}{\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{\sin \theta'_1}{r_2} + \frac{\cos \theta'_1}{\rho_2}\right)^2}} ds,$$

ds étant une fonction quelconque de θ_1 et par conséquent de θ'_1 .

Sous cette forme, on voit aisément que $d\lambda$ s'annule dans la direction des trajectoires orthogonales des lignes de courbure angulaires, ainsi qu'on pouvait le prévoir.

Nous donnerons ultérieurement à ce lieu une forme plus simple.

29. PROBLÈME II. — Conoïde de striction axiale. — Proposons-nous maintenant de trouver le lieu des perpendiculaires communes à MN et à $M'N'$.

Soit z' la distance au plan T_1MT_2 , mesurée dans le plan projetant NMV' , de la perpendiculaire IK .

Nous partirons des relations évidentes (n° 8)

$$z' = - \frac{M'P}{dz} = - v \cos \omega = \frac{v^2}{r''_T},$$

$\frac{1}{r''_T}$ désignant la courbure normale relative à la direction MT .

En exprimant cette courbure au moyen des angles θ'_1 et θ'_2 par les formules (51), on trouve

$$(54) \quad \left(\frac{1}{r_1 r_2} - \frac{1}{\rho_1 \rho_2}\right) z' = \frac{\sin^2 \theta'_2}{r_1} + \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) \sin \theta'_1 \sin \theta'_2 + \frac{\sin^2 \theta'_1}{r_2} = \frac{\sin^2 \theta}{r_1},$$

$\frac{1}{r_1}$ désignant la courbure normale relative à la direction MV' pseudo-conjugnée de MT .

Cette équation représente le lieu demandé.

En cherchant par la méthode ordinaire les valeurs limites de z' .

on trouve qu'elles sont fournies par l'équation quadratique

$$(55) \quad \begin{cases} (kz')^2 \sin^2 \theta - \left[\frac{1}{r_1''} + \frac{1}{r_2''} - \left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''} \right) \cos \theta \right] kz' \\ + \left[\frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''} \right)^2 \right] = 0. \end{cases}$$

Celle que donne, pour le même objet, M. Kummer, dans sa *Théorie générale des systèmes rectilignes*, bien qu'équivalente à la précédente, est moins simple; car elle renferme, comme éléments surabondants, les déviations verticales relatives aux lignes coordonnées. Elle peut s'écrire, en effet, ainsi

$$\frac{\sin^2(\nu_1, \nu_2)}{\nu_1^2 \nu_2^2} z'^2 - \left[\frac{1}{r_1'' \nu_2^2} + \frac{1}{r_2'' \nu_1^2} - \left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''} \right) \frac{\cos(\nu_1, \nu_2)}{\nu_1 \nu_2} \right] z' + \left[\frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''} \right)^2 \right] = 0.$$

Cette équation, avons-nous dit, est équivalente à la nôtre (55), comme on peut le vérifier, en s'aidant des relations suivantes, faciles à établir :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\nu_1, \nu_2)}{\nu_1 \nu_2} &= \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{\rho_1'' \rho_2''} \right) = k \sin \theta, \\ \frac{\cos(\nu_1, \nu_2)}{\nu_1 \nu_2} &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\frac{1}{r_1''} \left(\frac{1}{\rho_2''} - \frac{\cos \theta}{r_2''} \right) + \frac{1}{\rho_1''} \left(\frac{1}{r_2''} - \frac{\cos \theta}{\rho_2''} \right) \right]. \end{aligned}$$

Lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, la somme $\left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''} \right)$ relative aux plans principaux est nulle et l'on a, au lieu de l'équation (54), les axes de l'indicatrice servant d'axes de coordonnées,

$$\left(\frac{1}{R_1'' R_2''} - \frac{1}{P_1'' P_2''} \right) z' = \frac{\cos^2 \theta_1'}{R_1''} + \frac{\sin^2 \theta_1'}{R_2''} = \frac{1}{r_v''}.$$

Mais l'invariant $\frac{1}{R_1'' R_2''} - \frac{1}{P_1'' P_2''}$ peut être remplacé par l'invariant $\frac{1}{r_{f_1}'' r_{f_2}''}$ relatif aux foyers (n° 22); on a donc, pour le maximum z'_1 et pour le minimum z'_2 (R_2'' étant supposé plus grand que R_1''),

$$z'_1 = \frac{r_{f_1}'' r_{f_2}''}{R_1''}, \quad z'_2 = \frac{r_{f_1}'' r_{f_2}''}{R_2''}.$$

Ces formules nous paraissent plus simples que toutes celles qui ont été présentées jusqu'ici, à notre connaissance du moins.

30. PROBLÈME III. — *Surface d'un pinceau circumaxial de pseudo-normales.* — Il nous reste à trouver l'équation de la surface gauche, lieu des pseudo-normales M'N'.

En représentant par $d\xi$, $d\eta$ et ζ les coordonnées courantes, et cela à cause du peu d'écart des droites M'N' par rapport à la verticale MN, on aura, pour les équations de l'une quelconque d'entre elles, les axes étant supposés obliques sur le plan des XY,

$$\frac{d\xi \sin \theta - ds \sin \theta_2}{d\lambda \sin \theta'_2 - ds \sin \theta_2} = \frac{d\eta \sin \theta - ds \sin \theta_1}{d\lambda \sin \theta'_1 - ds \sin \theta_1} = \frac{\zeta}{s'}.$$

En supprimant, dans ces trois dénominateurs, le facteur commun M'P ou $ds \cos \omega$ qui s'y trouve impliqué sous les formes équivalentes $ds \sin(\theta_2 - \theta'_2)$ et $ds \sin(\theta'_1 - \theta_1)$, il vient

$$\frac{d\xi \sin \theta - ds \sin \theta_2}{-\cos \theta'_2} = \frac{d\eta \sin \theta - ds \sin \theta_1}{\cos \theta'_1} = \frac{\zeta ds}{-s'};$$

puis, finalement, au moyen des formules (50) :

$$\begin{aligned} & \frac{d\xi - ds_1}{\left(\frac{1}{r_1''} - \frac{\cos \theta}{\rho_1''}\right) ds_1 + \left(\frac{1}{r_2''} - \frac{\cos \theta}{r_2''}\right) ds_2} \\ &= \frac{d\eta - ds_2}{\left(\frac{1}{\rho_1''} - \frac{\cos \theta}{r_1''}\right) ds_1 + \left(\frac{1}{r_2''} - \frac{\cos \theta}{\rho_2''}\right) ds_2} = \frac{\zeta}{-\sin^2 \theta}. \end{aligned}$$

On en tire

$$(56) \quad \begin{cases} \Delta_\mu ds_1 = \left[1 - \frac{\zeta}{\sin^2 \theta} \left(\frac{1}{r_2''} - \frac{\cos \theta}{\rho_2''}\right)\right] d\xi + \frac{\zeta}{\sin^2 \theta} \left(\frac{1}{\rho_2''} - \frac{\cos \theta}{r_2''}\right) d\eta, \\ \Delta_\mu ds_2 = \frac{\zeta}{\sin^2 \theta} \left(\frac{1}{\rho_1''} - \frac{\cos \theta}{r_1''}\right) d\xi + \left[1 - \frac{\zeta}{\sin^2 \theta} \left(\frac{1}{r_1''} - \frac{\cos \theta}{\rho_1''}\right)\right] d\eta, \end{cases}$$

en posant

$$(57) \quad \Delta_\mu = \frac{\zeta^2}{\sin^2 \theta} \left(\frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{\rho_1'' \rho_2''}\right) - \frac{\zeta}{\sin^2 \theta} \left[\frac{1}{r_1''} + \frac{1}{r_2''} - \left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''}\right) \cos \theta\right] + 1,$$

ou bien (43)

$$(57') \quad \Delta_\mu = \left(1 - \frac{\zeta}{r_1''}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{r_2''}\right).$$

Il n'y aura plus qu'à substituer ces trois expressions dans l'équation $F_0(ds_1, ds_2) = 0$ de la directrice donnée pour avoir, dans chaque cas, la surface du pinceau correspondant.

Les sections horizontales de tels pinceaux de droites jouissent de cette propriété, que le rapport de leur aire à celle de la directrice plane donnée est égal à Δ_μ ; mais cette propriété, toute remarquable qu'elle est, n'est qu'un cas particulier d'un théorème général que nous établirons à la fin de ce paragraphe.

Supposons que la directrice soit le cercle

$$ds_1^2 + ds_2^2 = ds^2,$$

ce qui suppose $\theta = \frac{\pi}{2}$, la surface du pinceau correspondant sera

$$\begin{aligned} & \left[\left(1 - \frac{\zeta}{r_2''} \right) d\xi + \frac{\zeta}{\rho_2''} d\eta \right]^2 + \left[\frac{\zeta}{\rho_1''} d\xi + \left(1 - \frac{\zeta}{r_1''} \right) d\eta \right]^2 \\ & = \left[\zeta^2 \left(\frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{\rho_1'' \rho_2''} \right) - \zeta \left(\frac{1}{r_1''} + \frac{1}{r_2''} \right) + 1 \right]^2 ds^2, \end{aligned}$$

et l'on vérifie aisément, pour l'aire A_ζ , que l'on a bien

$$\frac{A_\zeta}{\pi ds^2} = \Delta_\mu.$$

Le cône des directions asymptotiques, qui est le cône directeur du pinceau, ayant pour équation

$$\left(\frac{d\xi}{r_2''} - \frac{d\eta}{\rho_2''} \right)^2 + \left(\frac{d\xi}{\rho_1''} - \frac{d\eta}{r_1''} \right)^2 = \left(\frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{\rho_1'' \rho_2''} \right)^2 \zeta^2 ds^2,$$

l'aire a_ζ de sa section par le plan $z = \zeta$ donnera de même, comparée au cercle directeur,

$$\frac{a_\zeta}{\pi ds^2} = \zeta^2 \left(\frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{\rho_1'' \rho_2''} \right) = k \zeta^2,$$

et, si l'on pose $\zeta = 1$, ce rapport sera égal à k , propriété connue (n° 5, *Application*).

31. On peut se demander, comme développement de la question présente, si la surface d'un pinceau est susceptible d'être engendrée, dans tous les cas, par le mouvement d'une droite s'appuyant sur une courbe infinitésimale plane et sur deux droites obliques entre elles et parallèles au plan de la courbe.

Pour le reconnaître, reportons-nous aux formules (45). Si l'on y fait $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{\rho_1''} = \frac{1}{\rho_2''} = 0$, il vient $\zeta_1 = R_2$ et $\zeta_2 = R_1$, ce qui est le cas des vraies normales, s'appuyant toujours sur deux droites rec-

tangulaires parallèles aux tangentes des sections principales (Sturm).

Mais, dans tout ce travail, le § XII excepté, nous avons supposé que $\frac{1}{\rho_1''} \geq \frac{1}{\rho_2''}$, d'où l'on voit que ζ_1 et ζ_2 ne peuvent devenir simultanément constants que de deux manières : ou bien parce que m et $\frac{1}{m}$ sont eux-mêmes constants, ou bien parce que les coefficients de ces quantités sont nuls.

1° Si m est constant, le pied de la pseudo-normale $M'N'$ parcourt l'élément fixe MM' ou ds et le lieu de cette génératrice doit, *a priori*, être un parabolôïde hyperbolique.

Effectivement, les équations de $M'N'$ pouvant s'écrire, *dans le cas le plus général*,

$$\begin{aligned} d\xi &= \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_1}\right) ds_1, \\ d\eta &= \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_1}\right) ds_2; \end{aligned}$$

on en déduit, pour le cas présent, le parabolôïde hyperbolique

$$(58) \quad \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_1}\right) d\eta = m \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_1}\right) d\xi.$$

2° Si les coefficients de m et de $\frac{1}{m}$, dans les équations (45) sont nuls, c'est que l'on a

$$(59) \quad \frac{r_1''}{\rho_1} = \frac{r_2''}{\rho_2} = \cos \theta,$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= r_2'', \quad \zeta_2 = r_1'', \quad \Delta_\mu = \left(1 - \frac{\zeta}{r_1''}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{r_2''}\right), \\ ds_1 &= \frac{d\xi}{1 - \frac{\zeta}{r_1''}}, \quad ds_2 = \frac{d\eta}{1 - \frac{\zeta}{r_2''}}; \end{aligned}$$

d'où l'on voit que, dans ce cas du moins, le lieu est produit par mouvement d'une droite s'appuyant sur la directrice donnée sur les droites ($x = 0, z = r_1''$) et ($y = 0, z = r_2''$) respectivement situées dans les plans des coordonnées. Or il est aisé de prouver que ces plans ne sont actuellement autres que les *plans focaux*.

En effet, les conditions (59) pourront s'écrire :

$$\frac{1}{\rho_1''} - \frac{\cos \theta}{r_1''} = 0,$$

$$\frac{1}{\rho_2''} - \frac{\cos \theta}{r_2''} = 0.$$

On en conclut (23)

$$\frac{1}{r_{0,1}} = \frac{1}{r_{0,2}} = 0.$$

Ainsi, les courbures de front relatives aux lignes coordonnées sont nulles. Les axes OX et OY sont donc tangents *aux lignes de courbure obliques* du système, ce qui démontre la propriété.

Il devient dès lors nécessaire de remplacer dans nos dernières formules r_1'' et r_2'' par r_{f_1}'' et r_{f_2}'' , et θ par Ξ , qui désigne déjà l'angle des plans focaux.

32. Venons enfin au théorème que nous avons annoncé (n° 30).

THÉORÈME. — Soient deux courbes fermées $F_0(x, y) = 0$ et $\mathfrak{F}_0(x, y) = 0$, situées dans un même plan Π_0 et rapportées à des axes obliques d'angle θ pris dans ce plan.

Supposons que les aires A_0 et $\mathfrak{A}_0$ de ces courbes soient égales et considérons les deux surfaces représentées par les équations

$$(60) \quad F_0\left(\frac{Mx+Ny}{D}, \frac{Px+Qy}{D}\right) = 0, \quad \mathfrak{F}_0\left(\frac{\mathfrak{M}x+\mathfrak{N}y}{\mathfrak{D}}, \frac{\mathfrak{P}x+\mathfrak{Q}y}{\mathfrak{D}}\right) = 0,$$

dans lesquelles

$$D = \begin{vmatrix} M & N \\ P & Q \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{D} = \begin{vmatrix} \mathfrak{M} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{P} & \mathfrak{Q} \end{vmatrix},$$

et où, l'axe des z ayant une direction quelconque, les coefficients M, N, P, Q et $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ sont des fonctions continues de cette variable, telles que, pour $z = 0$, on ait les valeurs correspondantes

$$\left. \begin{array}{l} M_0 = Q_0 = D_0 = 1 \\ \mathfrak{M}_0 = \mathfrak{Q}_0 = \mathfrak{D}_0 = 1 \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} N_0 = P_0 = 0, \\ \mathfrak{N}_0 = \mathfrak{P}_0 = 0; \end{array} \right.$$

Le rapport des aires des sections faites dans ces deux surfaces par un même plan parallèle au plan donné est égal à $\frac{D}{\mathfrak{D}}$.

Coupons, en effet, la première surface par le plan $z = \zeta$ et désignons, pour un instant par ξ' , η' les coordonnées d'un point quelconque de la section produite.

La différentielle de son aire aura pour valeur

$$dA_\zeta = \frac{1}{2} (\xi' d\eta' - \eta' d\xi') \sin \theta;$$

or, à cause des relations

$$x = \frac{M\xi' + N\eta'}{D}, \quad y = \frac{P\xi' + Q\eta'}{D},$$

ceci revient à

$$dA_\zeta = \frac{1}{2} D (x dy - y dx) \sin \theta = D dA_\zeta.$$

On en conclut, en supposant la constante nulle,

$$\frac{A_\zeta}{A_0} = D;$$

mais la seconde surface donnera à son tour

$$\frac{\mathfrak{A}_\zeta}{\mathfrak{A}_0} = \mathfrak{D},$$

et puisque, par hypothèse, $A = \mathfrak{A}_0$, on a donc

$$\frac{A_\zeta}{\mathfrak{A}_\zeta} = \frac{D}{\mathfrak{D}}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire I. — Soient $m, n, p, q, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ les termes qu'il faut prendre dans les fonctions de z correspondantes pour constituer les cônes des directions asymptotiques respectifs, ces termes étant, comme on le sait, ceux du degré le plus élevé lorsqu'il s'agit de fonctions algébriques. Si l'on pose

$$d = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{d} = \begin{vmatrix} \mathfrak{m} & \mathfrak{n} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{q} \end{vmatrix},$$

les équations des cônes considérés pouvant s'écrire généralement

$$F_0 \left(\frac{mx + ny}{d}, \frac{px + qy}{d} \right) = 0, \quad \mathfrak{F}_0 \left(\frac{\mathfrak{m}x + \mathfrak{n}y}{\mathfrak{d}}, \frac{\mathfrak{p}x + \mathfrak{q}y}{\mathfrak{d}} \right) = 0.$$

il suit de la démonstration précédente que le rapport des aires des sections produites dans ces cônes par le plan $z = \zeta$ est égal à $\frac{d}{\mathfrak{d}}$.

Corollaire II. — Prenons deux surfaces réglées ayant pour génératrices, l'une, un système de pseudo-normales relatives à l'indicatrice de la surface F_μ (n° 19), l'autre un système de vraies normales relatives à l'indicatrice de la surface F_ν (n° 22), leurs directrices planes respectives étant supposées à aires égales. Coupons les deux surfaces par le plan $z = \zeta$; il résulte du théorème précédent que l'on aura

$$\frac{A_\zeta}{\sin^2 \theta} = \frac{\Delta_\mu}{\Delta_\nu},$$

proportion dans laquelle on a posé (n° 30)

$$\begin{aligned} \Delta_\mu &= \frac{\zeta^2}{\sin^2 \theta} \left(\frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{\rho_1'' \rho_2''} \right) - \frac{\zeta}{\sin^2 \theta} \left[\frac{1}{r_1''} + \frac{1}{r_2''} - \left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''} \right) \cos \theta \right] + 1, \\ \Delta_\nu &= \frac{\zeta^2}{\sin^2 \theta} \left(\frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{\rho_1'' \rho_2''} \right) - \frac{\zeta}{\sin^2 \theta} \left(\frac{1}{r_1''} + \frac{1}{r_2''} - 2 \frac{\cos \theta}{\sqrt{\rho_1'' \rho_2''}} \right) + 1, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \Delta_\mu &= \left(1 - \frac{\zeta}{r_{f_1}''} \right) \left(1 - \frac{\zeta}{r_{f_2}''} \right), \\ \Delta_\nu &= \left(1 - \frac{\zeta}{R_{v_1}''} \right) \left(1 - \frac{\zeta}{R_{v_2}''} \right), \end{aligned}$$

$\frac{1}{r_{f_1}''}, \frac{1}{r_{f_2}''}$ étant les courbures normales des lignes de courbure obliques, et $\frac{1}{R_{v_1}''}, \frac{1}{R_{v_2}''}$ les courbures normales principales de la surface F_ν au point M.

Lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, on voit que $\Delta_\mu = \Delta_\nu$. Donc aussi $A_\zeta = A_\nu$, propriété remarquable qui n'appartient qu'à ce cas.

Quant aux cônes directeurs, comme le rapport des aires des sections faites dans chacun d'eux par le plan $z = \zeta$ à l'aire commune des directrices planes est égal à $K_\mu \zeta^2$, dans tous les cas, ces sections sont équivalentes.

Cas particulier. — Lorsque les équations (60) sont de la forme

$$F_0 \left(\frac{x}{1 - \frac{x}{r_\alpha}}, \frac{y}{1 - \frac{y}{r_\beta}} \right) = 0, \quad f_0 \left(\frac{x}{1 - \frac{x}{r_\gamma}}, \frac{y}{1 - \frac{y}{r_\delta}} \right) = 0,$$

elles représentent deux surfaces réglées produites par le mouvement de deux droites s'appuyant respectivement sur les directrices

planes F_0 et F_0' , et sur deux parallèles au plan commun de ces courbes (n° 31). Comme le théorème est applicable à cette catégorie de surfaces, il l'est aussi aux pincesaux de pseudo-normales à *lignes de courbure réelles* qui rentrent toutes dans ce type.

33. Nous terminerons ce paragraphe par la remarque suivante :

La pseudo-normale $M'N'$ est une génératrice commune à trois paraboloides hyperboliques ayant, pour l'un de leurs plans directeurs, les plans des $x'y'$. Le premier de ces paraboloides (58) qui contient l'axe des z a son équation à coefficients réels ou imaginaires, selon que les lignes de courbure obliques sont réelles ou imaginaires. Quant aux deux autres, qui passent respectivement par les horizontales ($d\xi = ds_1, \zeta = 0$) et ($d\tau_1 = ds_2, \zeta = 0$), ils sont toujours réels : seulement ils dégénèrent en deux couples de plans sécants lorsque les lignes de courbure sont réelles.

XIV.

Étude nouvelle des foyers et des plans focaux.

34. I. *Transformation préalable de nos principales formules.* — Examinons d'abord ce que deviennent nos plus importantes formules, lorsqu'on prend pour plans des ZX et des ZY les plans focaux du système donné, lesquels sont supposés faire entre eux l'angle aigu $\mathfrak{S}$.

Il suffira d'introduire, dans chacune, les conditions (59).

D'après cela, la première courbure de profil (15), et la première courbure de front (16) devront s'écrire, en posant $\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}$,

$$(61) \quad \begin{cases} \frac{\sin \mathfrak{S}}{r''} = \frac{\cos \mathfrak{S}_1}{r''_{f_1}} \sin \mathfrak{S}_2 + \frac{\cos \mathfrak{S}_2}{r''_{f_2}} \sin \mathfrak{S}_1, \\ \frac{\sin \mathfrak{S}}{r_0} = \left(\frac{1}{r''_{f_2}} - \frac{1}{r''_{f_1}} \right) \sin \mathfrak{S}_1 \sin \mathfrak{S}_2, \end{cases}$$

ce qui généralise les formules d'Euler et de M. Bertrand.

De même, la déviation verticale prendra, entre autres formes (voir 21'''), la suivante

$$(62) \quad \frac{\sin^2 \mathfrak{S}}{v^2} = \frac{\sin^2 \mathfrak{S}_2}{r''_{f_1}{}^2} + \frac{\sin^2 \mathfrak{S}_1}{r''_{f_2}{}^2} + 2 \frac{\sin \mathfrak{S}_1 \sin \mathfrak{S}_2}{r''_{f_1} r''_{f_2}} \cos \mathfrak{S}_1$$

et ses composantes générales (25''') et (26''') pourront, tout spécialement, s'écrire, à cause de $\zeta_1 = r_{f_1}'$ et $\zeta_2 = r_{f_2}'$,

$$(63) \quad \begin{cases} -\frac{\sin \vartheta}{\nu_i} = \frac{\cos i}{\zeta_j} \sin \vartheta = \frac{\cos(\vartheta_1 + i)}{r_{f_1}'} \sin \vartheta_2 + \frac{\cos(\vartheta_2 - i)}{r_{f_2}'} \sin \vartheta_1, \\ -\frac{\sin \vartheta}{\nu_j} = \frac{\sin i}{\zeta_i} \sin \vartheta = \frac{\sin(\vartheta_1 + i)}{r_{f_1}'} \sin \vartheta_2 - \frac{\sin(\vartheta_2 - i)}{r_{f_2}'} \sin \vartheta_1. \end{cases}$$

Quant aux lignes pseudo-conjuguées (46) qui se coupent sous l'angle i , leur équation deviendra

$$\frac{\cos i}{r_{f_1}'} ds_1^2 + \left[\frac{\cos(\vartheta + i)}{r_{f_1}'} + \frac{\cos(\vartheta - i)}{r_{f_2}'} \right] ds_1 ds_2 + \frac{\cos i}{r_{f_2}'} ds_2^2 = 0,$$

et ainsi de suite.

35. II. *Propriétés diverses.* — 1° L'équation de la ligne de striction axiale (53) se transformant en

$$d\lambda = \frac{(r_{f_2}' - r_{f_1}') \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{\sqrt{r_{f_1}'^2 \cos^2 \vartheta_2 + r_{f_2}'^2 \cos^2 \vartheta_1 - 2 r_{f_1}' r_{f_2}' \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \cos \vartheta}} ds,$$

il s'ensuit que, tandis que l'arc ds tourne autour du point M, le point *représentatif* de M. Mannheim, c'est-à-dire, le point x de IK, tel que $Mx = \nu$, et par conséquent tel que

$$Ix = r' = \nu \sin \omega \frac{\nu^2}{r_0},$$

décrit, en projection horizontale, la courbe

$$(x) \quad r' \sin \vartheta = (r_{f_2}' - r_{f_1}') \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2;$$

et comme, d'autre part, on a aussi

$$Ix = \frac{ds}{dt} \sin \omega = \frac{d\lambda}{dt},$$

on voit que le lieu obtenu de la sorte mesure, par ses rayons vecteurs successifs, la variation du *paramètre de distribution* des plans centraux des *pseudo-normalies* MNM'N'.

2° Quant au point χ de IK, à partir duquel on aperçoit constamment le segment *focal*, $r_{f_2}' - r_{f_1}'$, sous un angle droit, on trouve à l'aide des relations

$$\begin{aligned} r'^2 &= (r_{f_2}' - z')(z' - r_{f_1}'), \\ z' \sin \vartheta &= r_{f_1}' \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + r_{f_2}' \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1, \end{aligned}$$

dont la seconde n'est que la formule (54) transformée, on trouve, dis-je, que le lieu que ce point décrit sur le plan horizontal est la courbe

$$(\chi) \quad r'^2 \sin^2 \vartheta = \frac{1}{4} (r''_{f_1} - r''_{f_2})^2 \sin 2\vartheta_1 \sin^2 \vartheta_2.$$

3° Lorsque $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire, dans le cas des surfaces, les deux lieux (x) et (χ) se transforment simultanément en la rosace à quatre branches,

$$r' = \frac{1}{2} (R_2 - R_1) \sin 2\theta'_1.$$

4° Si l'on cherche, au moyen de la seconde des formules (63), l'équation du conoïde que décrit l'horizontale $I_i K_i$ (fig. 4) durant la rotation de l'arc ds , on trouvera

$$\frac{\xi^2 + \eta^2 + 2\xi\eta \cos \vartheta}{\xi} = \frac{\xi^2}{r''_{f_1}} + \left[\frac{\sin(\vartheta + i)}{\sin i} \frac{1}{r''_{f_1}} - \frac{\sin(\vartheta - i)}{\sin i} \frac{1}{r''_{f_2}} \right] \xi\eta + \frac{\eta^2}{r''_{f_2}}.$$

Le conoïde décrit par l'horizontale $I_j K_j$ peut s'en déduire en changeant i en $i - \frac{\pi}{2}$.

Enfin, on peut remarquer que, lorsqu'il s'agit d'une surface, le premier de ces deux lieux géométriques devient

$$\frac{X^2 + Y^2}{Z} = \frac{X^2}{R_2} + \cot i \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) XY + \frac{Y^2}{R_1}.$$

36. III. *Formule d'Hamilton.* — Reprenons la valeur de z écrite plus haut. En annulant sa dérivée, on est conduit à résoudre l'équation

$$\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0.$$

Cette équation fournit un maximum z'_1 correspondant à la direction $\frac{\vartheta_1}{2} - \frac{\pi}{4}$, et un minimum z'_2 correspondant à la direction $\frac{\vartheta_1}{2} + \frac{\pi}{4}$. Donc ces valeurs limites correspondent aux plans principaux NMA_1 et NMA_2 , ce que l'on savait déjà par l'équation (55).

Du reste, ces valeurs maxima et minima, déduites de la valeur générale de z' , vérifient le système

$$\begin{aligned} z'_1 + z'_2 &= r''_{f_1} + r''_{f_2}, \\ z'_1 - z'_2 &= \frac{r''_{f_2} - r''_{f_1}}{\sin \vartheta}. \end{aligned}$$

Rappelant que l'on a aussi (n° 29)

$$z'_1 = \frac{r''_{f_1} r'_{f_2}}{R''_1}, \quad z'_2 = \frac{r''_{f_1} r'_{f_2}}{R''_2},$$

on en conclut

$$\begin{aligned} z' &= z'_1 \cos^2 \left[\vartheta'_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right) \right] \\ &+ z'_2 \sin^2 \left[\vartheta'_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right) \right] = z'_1 \cos^2 \theta'_1 + z'_2 \sin^2 \theta'_1, \end{aligned}$$

l'angle polaire θ'_1 étant compté à partir du premier plan principal NMA_1 . C'est la formule d'Hamilton.

Il en résulte qu'on peut écrire ces relations nouvelles

$$k = \frac{1}{r''_{f_1} r'_{f_2}} = \frac{1}{R''_1 R''_2} = \frac{1}{R'_1 z'_1} = \frac{1}{R'_2 z'_2} = \frac{1}{r'' z'}.$$

37. Comme complément, proposons-nous aussi de fixer les traces horizontales des pseudo-normales limites, c'est-à-dire de celles qui correspondent aux valeurs limites de z' .

En désignant par m_1 et m_2 les coefficients angulaires des rayons vecteurs qui aboutissent à ces traces, un calcul direct donne d'abord

$$\begin{aligned} m_1 &= -\frac{r''_{f_2}}{r''_{f_1}} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2} \right), \\ m_2 &= -\frac{r'_{f_2}}{r'_{f_1}} \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2} \right). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que ces quantités sont les racines de l'équation du second degré

$$r''_{f_1}{}^2 m^2 + 2 \frac{r''_{f_1} r'_{f_2}}{\cos \vartheta} m + r'_{f_1}{}^2 = 0.$$

On en déduit facilement, pour les angles que les deux rayons vecteurs font soit entre eux, soit avec la trace du plan principal le plus voisin,

$$\begin{aligned} \tan(m_1, m_2) &= -\frac{2 r''_{f_1} r'_{f_2}}{(r''_{f_1} - r'_{f_1})^2} \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta}, \\ \frac{\tan(m_1, A_1)}{z'_1} &= \frac{\tan(A_2, m_2)}{z'_2} = \frac{\tan \vartheta}{\frac{1}{2}(r''_{f_1} - r'_{f_1})}, \end{aligned}$$

ce qu'on peut vérifier directement par des considérations géométriques analogues à celles du n° 9.

38. IV. *Formule de Kummer. — Son extension.* — Considérons les deux plans normaux NM_i et NMT_j dont il a été question au n° 12. Ces plans interceptent sur la pseudo-normale $M'N$ (*fig.* 4) un segment K_iK_j dont la projection sur MN est I_iI_j . Soient ζ_i et ζ_j les deux segments partiels (le premier positif et le second négatif, tant que l'angle donné i satisfait à la condition $\omega + i > \frac{\pi}{2}$), suivant lesquels le plan horizontal T, MT_2 coupe le segment total. Il s'agit d'évaluer ζ_i et ζ_j en fonction de l'angle constant i et des valeurs maxima et minima que prennent ces deux segments partiels, lorsque MM' ou ds tourne autour du point M .

C'est, au fond, l'étude de l'intervalle compris entre les deux co-noïdes *co-segmentaires*, que nous avons fait connaître dans la quatrième des propriétés signalées au n° 35, qu'il s'agit d'opérer sommairement.

A cet effet, nous partirons successivement de chacune des équations (63).

1° On a d'abord

$$\frac{\sin i}{\zeta_i'} \sin \vartheta = \frac{\sin(\vartheta_1 + i)}{r_{f_1}''} \sin \vartheta_2 - \frac{\sin(\vartheta_2 - i)}{r_{f_2}''} \sin \vartheta_1.$$

Différentiant, on trouve que les valeurs limites de $\frac{1}{\zeta_i'}$ correspondent à l'équation

$$\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2 + i) = 0,$$

c'est-à-dire aux angles $\vartheta_1 - \vartheta_2 + i = 0$ et $\vartheta_1 - \vartheta_2 + i = \pi$.

Soient $\frac{1}{\zeta_i'}$ et $\frac{1}{\zeta_i''}$ le maximum et le minimum de $\frac{1}{\zeta_i'}$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\sin i}{\zeta_i'} \sin \vartheta &= \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\vartheta + i)}{r_{f_1}''} - \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\vartheta - i)}{r_{f_2}''}, \\ \frac{\sin i}{\zeta_i''} \sin \vartheta &= -\frac{\cos^2 \frac{1}{2}(\vartheta + i)}{r_{f_1}''} + \frac{\cos^2 \frac{1}{2}(\vartheta - i)}{r_{f_2}''}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{f_1}''} &= \frac{\cos^2 \frac{1}{2}(\vartheta - i)}{\zeta_i'} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\vartheta - i)}{\zeta_i''}, \\ \frac{1}{r_{f_2}''} &= \frac{\cos^2 \frac{1}{2}(\vartheta + i)}{\zeta_i'} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\vartheta + i)}{\zeta_i''}. \end{aligned}$$

Substituant dans l'expression de $\frac{1}{\zeta_i}$, en ayant soin de remplacer les produits et les puissances des lignes trigonométriques par les sommes (algébriques) qui leur sont équivalentes, on aura, après réduction,

$$\frac{1}{\zeta_i} = \frac{\cos^2[\vartheta_1 - \frac{1}{2}(\vartheta - i)]}{\zeta_i'} + \frac{\sin^2[\vartheta_1 - \frac{1}{2}(\vartheta - i)]}{\zeta_i''}.$$

Mais, si l'on prend la trace MA, pour axe polaire, on a

$$\vartheta_1 = \theta_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right),$$

donc

$$\frac{1}{\zeta_i} = \frac{\cos^2\left[\theta_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - i\right)\right]}{\zeta_i'} + \frac{\sin^2\left[\theta_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - i\right)\right]}{\zeta_i''}.$$

C'est la célèbre formule de Kummer sur les segments relatifs au rayon axial d'une congruence élémentaire.

2° Considérons, en second lieu, la première des équations (63)

$$\frac{\cos i}{\zeta_j} \sin \vartheta = \frac{\cos(\vartheta_1 + i)}{r_{f_1}'} \sin \vartheta_2 + \frac{\cos(\vartheta_2 - i)}{r_{f_1}''} \sin \vartheta_1.$$

Ici les valeurs limites de $\frac{1}{\zeta_j}$ dépendent de l'équation

$$\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2 + i) = 0,$$

c'est-à-dire des angles $\vartheta_1 - \vartheta_2 + i = \pm \frac{\pi}{2}$, directions perpendiculaires à celles trouvées dans le premier cas.

En désignant par $\frac{1}{\zeta_j}$ le minimum et par $\frac{1}{\zeta_j'}$ le maximum de $\frac{1}{\zeta_j}$ et substituant inversement, si l'on veut, les sommes algébriques aux produits, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{2}{r_{f_1}''} &= \frac{1 - \sin(\vartheta - i)}{\zeta_j'} + \frac{1 + \sin(\vartheta - i)}{\zeta_j''}, \\ \frac{2}{r_{f_1}'} &= \frac{1 + \sin(\vartheta + i)}{\zeta_j'} + \frac{1 - \sin(\vartheta + i)}{\zeta_j''}, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{\zeta_j} = \frac{\cos^2\left[\vartheta_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta - i\right)\right]}{\zeta_j'} + \frac{\sin^2\left[\vartheta_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta - i\right)\right]}{\zeta_j''}.$$

et, finalement,

$$\frac{1}{\zeta_j} = \frac{\sin^2\left(\theta_1 + \frac{i}{2}\right)}{\zeta_j'} + \frac{\cos^2\left(\theta_1 + \frac{i}{2}\right)}{\zeta_j''}.$$

C'est la formule *complémentaire* de celle de Kummer, qui n'avait pas encore été remarquée, croyons-nous.

39. Il ne sera pas inutile de montrer, en terminant, comment on pourrait parvenir aux mêmes résultats en prenant comme point de départ la formule (58), savoir :

$$\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_2}\right) d\eta = m \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_1}\right) d\xi.$$

Il suffit d'observer pour le premier cas, par exemple, que $d\xi$ et $d\eta$ ne différant pas des coordonnées horizontales de l'extrémité K_i de $I_i K_i$, on doit avoir

$$m = \frac{ds_2}{ds_1} = \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2}, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\sin(\vartheta_1 + i)}{\sin(\vartheta_2 - i)}.$$

Faisant, après cela, $\zeta = \zeta_i$, $\zeta_1 = r_{f_i}'$ et $\zeta_2 = r_{f_i}''$, afin de prendre pour plans des coordonnées les plans focaux, on retombera sur la seconde des formules (63).

Pour le second cas, il faudra remplacer i par $i - \frac{\pi}{2}$ dans le rapport $\frac{d\eta}{d\xi}$, poser $\zeta = \zeta_j$ avec $\zeta_1 = r_{f_j}'$ et $\zeta_2 = r_{f_j}''$, et ces hypothèses, introduites dans l'équation (58), feront obtenir la première des formules (63). Les calculs s'achèveront ensuite comme précédemment.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages
Objet du Mémoire.....	19
I. Préliminaires : Définitions et notations.....	21
II. Relations de première espèce (valeurs finies).....	23
III. Relations de deuxième espèce (dérivées partielles) : Application.....	25
IV. Relations de troisième espèce (dérivées totales) : Identité.....	28
V. Application des relations précédentes à l'analyse des premières courbures composées ou déviations d'une ligne quelconque : Déviation initiale ou donnée. Déviation horizontale. Déviation verticale. Théorème des trois tangentes trigonométriques. Corollaire.....	30
VI. De quelques formes remarquables de la déviation verticale : Triple expression générale de cette courbure.....	36
VII. Des composantes générales de la déviation verticale et de leurs propriétés.....	39
VIII. Deuxièmes courbures ou flexions d'une ligne quelconque (méthode géométrique).....	41
IX. Expressions analytiques des trois flexions et de leurs composantes orthogonales : Flexion de front (ou torsion) de la ligne donnée. Flexion de profil. Flexion de niveau ou courbure pseudo-conjuguée.....	42
X. Troisièmes courbures ou courbures rectifiantes : Troisième courbure absolue. Droite rectifiante absolue. Troisièmes courbures et droites rectifiantes dérivées. Leurs propriétés. Courbure totale.....	46
XI. Première application des théories précédentes à diverses lignes remarquables et d'une définition généralisée : Lignes géodésiques. Indicatrice; double forme de son équation. Lignes asymptotiques. Lignes de courbures obliques. Foyers et plans focaux. Double méthode pour obtenir facilement ces dernières lignes. Lignes pseudo-conjuguées sous angle constant.....	49
XII. Examen du cas où les lignes précédentes appartiendraient à une surface : Expressions diverses de ces mêmes lignes. Application à des exemples.....	57
XIII. Deuxième application : recherche de quelques lieux géométriques : Formules préliminaires. Ligne de striction axiale. Conoïde de striction axiale. Surface d'un pinceau circumaxial de pseudo-normales. Théorème général sur une certaine classe de surfaces réglées. — Corollaires. Application aux pincesaux de droites.....	63
XIV. Étude nouvelle des foyers et des plans focaux : Transformation préalable de nos principales formules. Propriétés diverses. Formule d'Hamilton complétée. Formule de Kummer : son extension. Autre méthode pour retrouver les derniers résultats.....	74

Sur l'identité des péninvariants des formes binaires avec certaines fonctions des dérivées unilatérales de ces formes;
par M. R. PERRIN.

(Séance du 21 décembre 1887.)

1. Dans un travail récent ⁽¹⁾, M. Hilbert a établi que tout covariant ou invariant d'une forme binaire, écrite avec une seule variable non homogène, peut s'exprimer en fonction de cette forme et de ses dérivées unilatérales (c'est-à-dire prises par rapport à cette variable unique); et que, réciproquement, toute fonction homogène et isobarique de la forme et de ses dérivées unilatérales est un invariant ou un covariant de la forme, pourvu qu'elle satisfasse à une certaine équation différentielle.

Cette propriété est particulièrement curieuse en ce qui concerne les invariants, car chaque invariant fournit ainsi une fonction de la forme et de ses dérivées, d'où la variable disparaît d'elle-même. M. Hilbert a, d'ailleurs, indiqué l'existence de théorèmes analogues pour les systèmes de formes binaires, ainsi que pour les formes ternaires, quaternaires, etc. Mais il ne paraît pas avoir remarqué que les *péninvariants*, tant des formes binaires que des formes à un nombre quelconque de variables et des systèmes de formes, jouissent de propriétés tout à fait semblables, ainsi que je me propose de le montrer.

2. Considérons d'abord une forme binaire unique f , écrite sous forme non homogène,

$$(1) \quad f = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_2 x^{n-2} + \dots + a_n.$$

Soient $f_1, f_2, \dots, f_n$ ses dérivées successives. On a identiquement, pour $p = 0, 1, \dots, n$,

$$(2) \quad \frac{n!}{p!} a_p = f_{n-p} - \frac{x}{1} f_{n-p+1} + \frac{x^2}{2!} f_{n-p+2} - \dots + (-1)^p \frac{x^p}{p!} f_n,$$

pourvu que l'on convienne que $f_0 = f$ et $0! = 1$.

⁽¹⁾ Ueber eine Darstellungsweise der invarianten Gebilde im binären Formengebiet (Mathematische Annalen, t. XXX; 1887).

En effet, prenons la dérivée totale du second membre; puisque $f_{n+1} = 0$, les termes obtenus se détruisent deux à deux : ce second membre a donc une valeur indépendante de x , et l'on reconnaît immédiatement, en faisant $x = 0$, que cette valeur est bien $\frac{n!}{p!} a_p$.

Désignons maintenant par $\frac{da_p}{dx}$ la dérivée partielle de a_p , prise en considérant les quantités f comme constantes. La relation identique (2) donne

$$\frac{n!}{p!} \frac{da_p}{dx} = -f_{n-p+1} + \frac{x}{1} f_{n-p+2} - \frac{x^2}{2!} f_{n-p+3} + \dots = -\frac{n!}{p-1!} a_{p-1},$$

et, par suite.

$$(3) \quad \frac{da_p}{dx} = -p a_{p-1}.$$

Soit enfin v un péninvariant quelconque de f , écrit en fonction de $a_0, a_1, \dots, a_n$,

$$v = \varphi(a_0, a_1, \dots, a_n).$$

Remplaçons dans l'expression de ce péninvariant $a_0, a_1, \dots, a_n$ par leurs valeurs respectives, tirées de (2), en fonction de x et des f . Je dis que la variable x disparaîtra d'elle-même du résultat. Il suffit, pour l'établir, de montrer que la dérivée partielle de v , prise par rapport à x , en traitant les f comme des constantes, sera identiquement nulle. Or cette dérivée partielle sera évidemment

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d\varphi}{da_0} \frac{da_0}{dx} + \frac{d\varphi}{da_1} \frac{da_1}{dx} + \dots + \frac{d\varphi}{da_n} \frac{da_n}{dx},$$

ou, en vertu de (3),

$$(4) \quad \frac{dv}{dx} = -\left(a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + 2a_1 \frac{d\varphi}{da_2} + 3a_2 \frac{d\varphi}{da_3} + \dots + na_{n-1} \frac{d\varphi}{da_n}\right).$$

Mais l'évanouissement identique du second membre de (4) est précisément la condition nécessaire et suffisante pour que φ (supposée, bien entendu, homogène et isobarique) soit un péninvariant de f .

Dès que x doit disparaître du résultat, il est clair qu'on obtiendra l'expression du péninvariant v en fonction de $f, f_1, \dots, f_n$, en remplaçant simplement dans φ chaque coefficient a_p par le premier terme de sa valeur tirée de (2), c'est-à-dire par $\frac{p!}{n!} f_{n-p}$.

Dès lors, l'équation différentielle

$$(5) \quad a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + \dots + na_{n-1} \frac{d}{da_n} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d}{d\zeta} = 0,$$

qui définit les péninvariants comme fonctions de $a_0, a_1, \dots$, devient, lorsqu'on les regarde comme fonctions de $f, f_1, \dots$,

$$(6) \quad f_1 \frac{d}{df} + f_2 \frac{d}{df_1} + f_3 \frac{d}{df_2} + \dots + f_n \frac{d}{df_{n-1}} = 0.$$

Réciproquement, si une fonction homogène et isobarique $\psi(f, f_1, \dots, f_n)$ satisfait à la condition (6), la fonction des a , obtenue en remplaçant f_p par $\frac{n!}{n-p!} a_{n-p}$, satisfera à la condition (5) et sera, par suite, un péninvariant de f , et ce péninvariant donnera bien ψ lorsqu'on y remplacera les a par leurs valeurs complètes (2) en fonction des f et des x . Nous pouvons donc dire :

THÉORÈME I. — *Tout péninvariant (coefficient de la plus haute puissance de x dans un covariant) ou invariant d'une forme binaire f est identique à une fonction de f et de ses dérivées unilatérales $f_1, f_2, \dots, f_n$ (c'est-à-dire prises par rapport à la seule variable x), satisfaisant à l'équation (6); et, réciproquement, toute fonction homogène et isobarique de f et de ses dérivées par rapport à x qui satisfait à l'équation (6) est identique à un péninvariant ou à un invariant de f . Le passage d'une expression à l'autre s'obtient en échangeant a_p et $\frac{p!}{n!} f_{n-p}$.*

3. Si, au lieu d'un péninvariant, nous avons pris un covariant

$$w = \varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_n),$$

nous aurions été conduit, en suivant la même marche, à la relation

$$(7) \quad \frac{dw}{dx} = \frac{d\varphi}{dx} - \left(a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + 2a_1 \frac{d\varphi}{da_2} + \dots + na_{n-1} \frac{d\varphi}{da_n} \right),$$

au lieu de la relation (4), $\frac{d\varphi}{dx}$ étant la dérivée partielle de φ par rapport à x , prise en traitant les a comme des constantes. Mais, en vertu de la propriété bien connue que M. Cayley a même adoptée comme définition des covariants, le second membre de (7)

est identiquement nul : w ne contiendra donc explicitement que $f, f_1, \dots, f_n$, et non plus x . Dès lors, pour obtenir l'expression d'un covariant en fonction des f , il suffit d'y supposer $x = 0$, ce qui le réduit à son dernier terme, et de remplacer a_p par $\frac{p!}{n!} f_{n-p}$; comme le dernier terme se déduit lui-même du péninvariant, source du covariant considéré, par la permutation de a_0 avec a_n , a_1 avec a_{n-1} , ... (au signe près, toutefois, s'il s'agit d'un covariant gauche), il suffit, en définitive, de prendre le péninvariant, source du covariant, et d'y remplacer a_p par $\frac{n-p!}{n!} f_p$. L'équation différentielle (5), à laquelle satisfait ce péninvariant, devient, par l'effet de cette substitution,

$$(8) \quad nf \frac{d}{df_1} + 2(n-1)f_1 \frac{d}{df_2} + 3(n-2)f_2 \frac{d}{df_3} + \dots + nf_{n-1} \frac{d}{df_n} = 0.$$

Telle est bien effectivement, en tenant compte de la différence des notations, la relation trouvée par M. Hilbert comme condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction homogène et isobarique de f et de ses dérivées unilatérales soit un covariant de f .

On peut réunir, dans l'énoncé très simple que voici, le résultat de M. Hilbert et celui que nous avons obtenu plus haut :

THÉORÈME II. — *Si, dans un péninvariant de la forme binaire f , on remplace chaque coefficient a_p par $\frac{p!}{n!} f_{n-p}$, on obtient l'expression de ce péninvariant en fonction de f et de ses dérivées unilatérales $f_1, f_2, \dots, f_n$; cette expression satisfait à l'équation (6). Si l'on remplace, au contraire, chaque coefficient a_p par $\frac{n-p!}{n!} f_p$, on obtient (au signe près) l'expression en fonction de f et de ses dérivées unilatérales du covariant complet dont le péninvariant donné est la source, et cette seconde expression satisfait à l'équation (8). Pour un invariant, les deux substitutions conduisent au même résultat (au signe près), et l'expression obtenue satisfait à la fois aux équations (6) et (8).*

Réciproquement, toute fonction homogène et isobarique de f et de ses dérivées unilatérales est un péninvariant de f , si elle satisfait à la condition (6); un covariant, si elle satisfait à la

condition (8); un invariant si elle satisfait à la fois aux conditions (6) et (8).

4. Considérons maintenant une équation différentielle

$$(9) \quad F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

où y est une fonction inconnue de la variable x , laquelle ne figure pas explicitement. Supposons que F satisfasse à la condition (6), c'est-à-dire qu'on ait identiquement

$$(10) \quad y' \frac{dF}{dy} + y'' \frac{dF}{dy'} + \dots + y^{(n)} \frac{dF}{dy^{(n-1)}} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dF}{dx} = 0.$$

Comme, d'autre part, on a, en différentiant (9),

$$y' \frac{dF}{dy} + y'' \frac{dF}{dy'} + \dots + y^{(n)} \frac{dF}{dy^{(n-1)}} + y^{(n+1)} \frac{dF}{dy^{(n)}} = 0,$$

il vient simplement, en remarquant que F contient $y^{(n)}$ par hypothèse et que $\frac{dF}{dy^{(n)}}$ ne peut donc être nul,

$$y^{(n+1)} = 0,$$

ce qui signifie que y est de la forme parabolique

$$(11) \quad y = A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n.$$

Mais alors le théorème I nous apprend que F est identique à une fonction des péninvariants de y considérée comme forme binaire, fonction facile à obtenir en remplaçant dans $F y^{(p)}$ par $\frac{n!}{n-p!} a_{n-p}$, c'est-à-dire par $p! A_p$; il suffit donc d'égaliser à zéro cette fonction des péninvariants pour que l'expression (11), où il reste n constantes arbitraires, satisfasse à l'équation (9) et en soit l'intégrale générale. Nous obtenons ainsi ce théorème :

THÉORÈME III. — Si une équation différentielle d'ordre n ,

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

où la variable ne figure pas explicitement, admet l'intégrale générale parabolique

$$y = A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n.$$

la relation qui lie les $n + 1$ arbitraires est simplement

$$F(A_0, A_1, 2!A_2, 3!A_3, \dots, n!A_n) = 0.$$

Réciproquement, si dans la forme binaire générale d'ordre n , écrite avec une seule variable non homogène, on suppose donnée une relation entre les coefficients et qu'on calcule l'équation différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre à laquelle satisfait la forme après élimination de tous ses coefficients, la condition nécessaire et suffisante pour que cette équation différentielle ne contienne pas explicitement la variable est que la relation donnée entre les coefficients se réduise à une relation entre des péninvariants (ou invariants) de la forme.

Il n'est nullement nécessaire que F soit homogène ni isobarique par rapport à y et ses dérivées.

Soit, comme exemple, l'équation différentielle

$$(12) \quad m(2y''y''' - y''^2)^{\alpha} + p(y''^2 - 2y'y''' + 2yy''')^{\beta} + q = 0,$$

où m, p, q, α, β sont des constantes quelconques. Son premier membre satisfait à la condition (10). Elle admet donc pour intégrale générale

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4,$$

les cinq arbitraires a, b, c, d, e étant liées par l'équation

$$(13) \quad 2^{\alpha} 3^{\alpha} m(8ce - 3d^2)^{\alpha} + 2^{\beta} p(c^2 - 3bd + 12ae)^{\beta} + q = 0,$$

comme il est d'ailleurs facile de le vérifier directement.

5. Si l'on cherchait à intégrer, par un procédé analogue, une équation différentielle dont le premier membre satisferait non plus à la condition (10), mais à la condition

$$(14) \quad ny \frac{d}{dy} + 2(n-1)y' \frac{d}{dy^2} + 3(n-2)y'' \frac{d}{dy^3} + \dots = 0,$$

équivalente à (8), pour une certaine valeur de n , on serait conduit à prendre pour intégrale une forme binaire non homogène du $n^{\text{ième}}$ ordre et à écrire $r + 1$ relations entre les coefficients de cette forme, r étant l'ordre de celui des covariants qui est de l'ordre le plus élevé parmi ceux dont la somme est identique au premier membre de l'équation différentielle donnée. Le plus sou-

vent donc on n'obtiendrait pas l'intégrale générale; il pourrait même arriver qu'on n'en obtint aucune.

Soit donnée, par exemple, l'équation différentielle

$$(15) \quad 3yy'' - 2y'^2 - q = 0,$$

qui ne satisfait pas à la condition (10), mais qui satisfait à la condition (14) pour $n = 3$. Posons donc

$$y = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3,$$

et exprimons que le covariant de y , qui est identique à $3yy'' - 2y'^2$, est égal à q , quel que soit x . La source de ce covariant s'obtiendra, d'après le théorème II, en remplaçant respectivement y , y' , y'' par a_0 , $\frac{3!}{2!}a_1$, $\frac{3!}{1!}a_2$, ce qui donne $18(a_0 a_2 - a_1^2)$. Ce covariant est donc le hessien, et les relations demandées sont, par suite, au nombre de trois, savoir

$$\begin{aligned} a_0 a_2 - a_1^2 &= 0, \\ a_0 a_3 - a_1 a_2 &= 0, \\ a_1 a_3 - a_2^2 &= \frac{1}{18} q. \end{aligned}$$

Mais on voit sans peine que, si $q \geq 0$, ces trois relations sont incompatibles : il n'existe donc pas d'intégrale de forme parabolique. Si $q = 0$, les trois relations se réduisent à deux, savoir

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \lambda,$$

et l'on obtient l'intégrale

$$y = a_0(x + \lambda)^3,$$

qui renferme deux arbitraires et est bien l'intégrale générale, comme on le savait d'avance.

Soit, au contraire, l'équation différentielle du troisième ordre

$$(16) \quad 9y^2 y''' - 9yy' y'' + 4y'^3 = 0.$$

En appliquant le même procédé, on est conduit à annuler les quatre coefficients du covariant cubique de la forme générale du troisième ordre; d'où quatre conditions qui se réduisent à deux, et l'on arrive finalement à la même intégrale que pour l'équation précédente; seulement, ici ce n'est plus qu'une intégrale particulière à deux constantes arbitraires. Et, en effet, l'intégrale géné-

rale serait

$$y = (ax^2 + bx + c)^{\frac{3}{2}}$$

et l'intégrale particulière trouvée correspond au cas où $b^2 = 4ac$.

Il existe d'ailleurs des équations différentielles dont le premier membre (ne contenant pas la variable) satisfait à la condition (14) pour une valeur fractionnaire ou négative de n et dont l'intégrale générale peut être obtenue en posant $y = z^a$ et disposant convenablement de z . Ainsi, l'équation différentielle des coniques

$$(17) \quad 9y''^2y' - 45y''y'''y^{iv} + 40y'''^2 = 0,$$

lorsqu'on y regarde y'' comme la fonction cherchée, satisfait à la condition (14) pour $n = -3$, et s'intègre en posant $y'' = z^{-\frac{3}{2}}$, z étant un polynôme arbitraire du second degré en x . Ainsi encore l'équation

$$(18) \quad yy^{iv} + 4y'y''' + 3y''^2 = 0$$

satisfait à la condition (14) pour $n = \frac{3}{2}$ et s'intègre en posant $y = z^{\frac{1}{2}}$, z étant un polynôme arbitraire du troisième degré en x ; cette équation différentielle est celle des cubiques qui admettent l'axe des x pour axe de symétrie.

Mais ce sujet nous entraînerait trop loin et demande une étude spéciale.

6. Outre les covariants, invariants et péninvariants, il existe encore d'autres fonctions des coefficients et de la variable d'une forme binaire, qui jouissent de la propriété dont nous nous occupons, savoir d'être identiques à une fonction de la forme et de ses dérivées unilatérales, sans que la variable apparaisse explicitement. Ce sont les fonctions que M. Deruyts a étudiées sous le nom de *semi-covariants* dans un travail récent [*Développements sur la théorie des formes binaires* (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*; 1887)]. Les semi-covariants sont définis comme satisfaisant à l'une seulement des deux équations auxquelles satisfont les covariants : la démonstration donnée plus haut au n° 3 pour les covariants ne suppose précisément qu'une seule de ces deux équations; elle s'applique donc aussi aux semi-covariants. Seulement, un semi-covariant n'est complètement dé-

terminé que si l'on connaît son dernier terme. Soit r l'ordre du semi-covariant par rapport aux variables, l'opération $\frac{d}{dx_i}$, appliquée r fois successivement au coefficient de ce dernier terme, donne, à des facteurs numériques près, les coefficients des autres termes; appliquée une fois de plus, elle donne zéro.

On en conclut immédiatement que, si $\frac{d^r}{dx^r}$ représente le résultat de l'opération

$$f_1 \frac{d}{df} + f_2 \frac{d}{df_1} + \dots + f_n \frac{d}{df_{n-1}} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx},$$

répétée r fois sur une fonction de f et de ses dérivées unilatérales $f_1, f_2, \dots, f_n$, l'expression d'un semi-covariant d'ordre r en fonction de $f, f_1, \dots, f_n$ satisfait à la condition

$$(19) \quad \frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}} = 0$$

(il en est, d'ailleurs, évidemment de même de l'expression d'un covariant d'ordre r); et que cette expression s'obtiendra en remplaçant a_p par $\frac{p!}{n!} f_{n-p}$ dans le coefficient du dernier terme du semi-covariant. Réciproquement, toute fonction homogène et isobarique de f et de ses dérivées unilatérales qui satisfait à la condition (19) est identique à un semi-covariant ou à un covariant de f , d'ordre r ; dans ce dernier cas, elle satisfait aussi, comme nous l'avons vu, à la condition (14).

On peut réunir comme suit, sous un énoncé unique, les propriétés que nous venons de considérer relativement à toutes les formations invariantes ou semi-invariantes qui dépendent d'une forme binaire :

THÉOREME IV. — *Toute formation déduite d'une forme binaire d'ordre n , et qui possède le caractère d'invariance par rapport à l'une x_1 des deux variables, est identique à une fonction de la forme et de ses dérivées successives par rapport à cette variable seule, divisée par une certaine puissance de la seconde variable x_2 . Cette fonction satisfait à la condition (19), r étant l'ordre de la formation considérée; on l'obtient en remplaçant simplement a_p , coefficient de x_2^p dans la forme*

binaire, par $\frac{p!}{n!} f_{n-p}$, dans le coefficient du dernier terme de la formation considérée.

Réciproquement, toute fonction homogène et isobarique de la forme et de ses dérivées unilatérales (par rapport à la variable x_1), si elle satisfait à la condition (19), est identique, à une certaine puissance près de x_2 , à une formation d'ordre r possédant le caractère d'invariance par rapport à x_1 : savoir un semi-covariant si $r > 0$, un péninvariant si $r = 0$, un covariant si la fonction satisfait à la condition (14) en même temps qu'à (19) pour $r > 0$, un invariant si elle satisfait à la fois à (14) et à (19) pour $r = 0$.

Il est clair qu'on peut aussi donner l'énoncé général suivant pour ce qui se rapporte à l'intégration sous forme parabolique des équations différentielles où la variable ne figure pas explicitement :

THÉOREME V. — Si une équation différentielle d'ordre n

$$F[y, y', y'', \dots, y^{(n)}] = 0,$$

où la variable ne figure pas explicitement, satisfait à la condition

$$\frac{d^r F}{d\theta^r} = 0,$$

l'intégrale de forme parabolique

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n,$$

la plus générale possible de cette équation, s'obtiendra en écrivant les r équations de condition

$$\begin{aligned} F &= 0, \\ \frac{dF}{d\theta} &= 0, \\ \frac{d^2 F}{d\theta^2} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d^{r-1} F}{d\theta^{r-1}} &= 0, \end{aligned}$$

et en y remplaçant $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ respectivement par $A_0, A_1, 2!A_2, 3!A_3, \dots, n!A_n$, ce qui donnera r relations entre les constantes de l'intégrale.

Prenons, par exemple, l'équation différentielle du sixième ordre

$$F = 30 y y'' - 10 y' y'' - 2 y'' y''' + 3 y'''' = 0.$$

On trouve successivement

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\theta} &= 4(5 y' y'' - 3 y'' y''' + y'''' y'''), \\ \frac{d^2 F}{d\theta^2} &= 4(2 y'' y''' - 2 y'''' y''' + y'''''), \\ \frac{d^3 F}{d\theta^3} &= 0. \end{aligned}$$

On obtiendra donc une intégrale parabolique à quatre constantes arbitraires, en prenant

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5 + A_6 x^6$$

et écrivant les trois relations de condition

$$\begin{aligned} 1800 A_0 A_6 - 100 A_1 A_5 - 8 A_2 A_4 + 9 A_3^2 &= 0, \\ 25 A_1 A_6 - 5 A_2 A_5 + A_3 A_4 &= 0, \\ 10 A_2 A_6 - 5 A_3 A_5 + 2 A_4^2 &= 0, \end{aligned}$$

comme il est d'ailleurs facile de le vérifier directement. Le semi-covariant correspondant de la forme du sixième ordre

$$(a, b, c, d, e, f, g)(x, y)^6$$

serait

$$\begin{aligned} (ae - \frac{1}{2}bd + 3c^2)x^2 + (af - 3be + 2cd)xy \\ + \frac{1}{2}(ag - 2bf - ce + 2d^2)y^2. \end{aligned}$$

7. Les résultats précédents s'étendent sans difficulté aux systèmes de formes binaires, et les théorèmes I, II, IV subsistent, avec de légères modifications d'énoncé qui se présentent d'elles-mêmes. Les théorèmes III et V pourraient également être généralisés dans cet ordre d'idées; mais il me paraît inutile d'insister sur ce sujet.

Avant de passer au cas des formes à plus de deux variables, il convient de remarquer encore que rien n'empêche de rester dans l'hypothèse des variables homogènes: il faut alors diviser l'expression différentielle trouvée pour les formations invariantes ou semi-invariantes relativement à l'une x_1 des variables par x_1^π , π étant le poids par rapport à x_1 du coefficient de la plus haute

puissance de x_1 dans cette formation; ou, ce qui revient au même, remplacer a_p par $\frac{p!}{n!} \frac{f_{n-p}}{x_1^p}$ dans le coefficient de la plus haute puissance de x_2 et multiplier par cette plus haute puissance.

Tout invariant ou covariant, pouvant être considéré à volonté comme jouissant de la propriété d'invariance à l'égard de l'une ou de l'autre des deux variables, aura deux expressions équivalentes, l'une en fonction des dérivées unilatérales par rapport à x_1 , l'autre en fonction des dérivées unilatérales par rapport à x_2 : en les égalant, on obtiendra une expression du rapport $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^\pi$ en fonction de la forme et de ses dérivées. Toutes les identités qu'on peut obtenir par cette voie découlent évidemment du théorème des fonctions homogènes, et l'on pourrait inversement, en appliquant ce théorème plusieurs fois et dans le sens convenable, obtenir *a priori* les expressions des invariants et covariants sous forme de fonctions de dérivées unilatérales.

8. Pour étendre les résultats précédents aux formes et systèmes de formes à plus de deux variables homogènes, on peut employer un mode de raisonnement calqué sur celui qui nous a servi pour les formes binaires. Soit, par exemple, f une forme d'ordre n aux p variables homogènes $x_1, x_2, \dots, x_p$, écrite avec les coefficients polynomiaux; soient $a_{i,j,\dots,k}$ le coefficient de $x_1^i x_2^j \dots x_{p-1}^k x_p^{n-\sigma}$ dans $f(\sigma = i + j + \dots + k)$, et $f_{q,r,\dots,t}$ la dérivée partielle

$$\frac{d^{q+r+\dots+t}}{dx_1^q dx_2^r \dots dx_{p-1}^t}.$$

Il est aisé de vérifier tout d'abord l'exactitude de l'identité suivante, dont (2) est le cas particulier correspondant à $p = 2$:

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-\sigma)!} x_p^{n-\sigma} a_{i,j,\dots,k} &= f_{i,j,\dots,k} - \frac{1}{1!} (x_1 f_{i+1,j,\dots,k} + x_2 f_{i,j+1,\dots,k} + \dots + x_{p-1} f_{i,j,\dots,k+1}) \\ &+ \frac{1}{2!} (x_1^2 f_{i+2,j,\dots,k} + 2x_1 x_2 f_{i+1,j+1,\dots,k} + \dots + x_{p-1}^2 f_{i,j,\dots,k+2}) \\ &- \dots \dots \dots \\ &+ \frac{(-1)^{n-\sigma}}{(n-\sigma)!} (x_1^{n-\sigma} f_{i+n-\sigma,j,\dots,k} + \dots + x_{p-1}^{n-\sigma} f_{i,j,\dots,k+n-\sigma}). \end{aligned}$$

On en conclut les $p - 1$ relations, analogues de (3),

$$(21) \quad x_p \frac{da_{i,j,\dots,k}}{dx_q} = -(n-\sigma) a_{i,j,\dots,h+1,\dots,k}, \quad (q = 1, 2, \dots, p-1),$$

une même forme f , à toutes les valeurs de $i, j, \dots, k$, telles que la somme $\sigma = i + j + \dots + k$ soit au plus égale à $n - 1$; et le second signe Σ étend l'opération à toutes les formes indépendantes.

Mais il n'est plus permis d'ajouter, comme lorsqu'il s'agissait de formes binaires, que réciproquement toute fonction homogène et isobarique de formes à p variables et de leurs dérivées par rapport à $p - 1$ de ces variables, si elle satisfait aux $p - 1$ équations (23), sera un invariant ou un péninvariant pur relatif à x_1 du système de ces formes : elle pourra être aussi bien un péninvariant relatif à x_2 , ou à x_3 , ..., x_{p-1} , ou un agrégat de péninvariants de ces diverses natures, ou peut-être même une fonction d'autre genre; car il n'est pas démontré, à notre connaissance (bien que ce soit assez probable), que les équations (22) caractérisent exclusivement les péninvariants relatifs aux variables $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$.

En raisonnant de la même manière pour les covariants purs, on verrait sans peine que tout covariant pur est identique, à une puissance près de l'une quelconque des variables, à une fonction des formes indépendantes et de leurs dérivées par rapport aux $p - 1$ autres variables; que cette fonction s'obtient en remplaçant, dans le péninvariant relatif à la $p^{\text{ième}}$ variable, $a_{ij\dots k}$ par $\frac{n-\sigma!}{n!} f_{ij\dots k}$, $i, j, \dots, k$ étant les indices relatifs aux $p - 1$ variables conservées; qu'elle satisfait à $p - 1$ équations différentielles analogues à (14); qu'enfin, si l'on considère l'ensemble des dérivées par rapport aux p variables, chaque covariant (ou invariant) possède p expressions distinctes, donnant lieu à $p - 1$ identités qui pourraient se déduire du théorème des fonctions homogènes, tandis que chaque péninvariant ne possède que $p - 1$ expressions distinctes, et ne donne lieu qu'à $p - 2$ telles identités.

9. On peut arriver aux résultats trouvés ci-dessus pour les invariants et péninvariants purs des systèmes de formes à plus de deux variables, en suivant une autre marche, qui a l'avantage de conduire à une généralisation immédiate en ce qui concerne les contrevariants et les péninvariants mixtes.

Soient $f, f', f'', \dots$ tant de formes indépendantes et simul-

tanées qu'on voudra, à p variables homogènes $x_1, x_2, \dots, x_p$, respectivement d'ordres $n, n', n'', \dots$; savoir

$$f = ax_1^n + n\varphi_1 x_1^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \varphi_2 x_1^{n-2} + \dots + \varphi_n.$$

$$f' = a'x_1^{n'} + n'\varphi'_1 x_1^{n'-1} + \dots,$$

$$\dots\dots\dots,$$

et soit ϖ le covariant identique

$$\varpi = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_p x_p.$$

J'ai montré ailleurs ⁽¹⁾ que tout invariant, contrevariant, péninvariant pur ou mixte (coefficient de la plus haute puissance de x , dans un covariant pur ou mixte) du système (A) des formes $f, f', \dots$ devient, quand on le multiplie par une puissance convenable de a , une fonction entière de $a, a', \dots$, de ξ_1 et des invariants d'un système déterminé (B) de formes aux $p - 1$ variables $x_2, x_3, \dots, x_p$, composé comme suit :

- 1° Des $n - 1$ péninvariants principaux (sources des covariants associés) de f , traitée comme forme binaire où x_1 serait le rapport des deux variables homogènes;
- 2° Des n' péninvariants, sources des jacobiens de tout ordre de f et de f' , traitées comme formes binaires;
- 3° Des $n'' + n''' + \dots$ péninvariants analogues pour $f'', f''', \dots$, combinées de même avec f ;
- 4° De la forme spéciale

$$\psi = a(\varpi - \xi_1 x_1) - \varphi_1 \xi_1,$$

cette dernière devant être traitée comme si elle était à coefficients constants.

Ceci posé, admettons pour un instant comme démontré que tout invariant d'un système de formes à $p - 1$ variables $x_2, x_3, \dots, x_p$ est identique à une fonction entière de ces formes et de leurs dérivées par rapport à $p - 2$ des variables, divisée par une certaine puissance de la $(p - 1)^{\text{ième}}$. Il suffira de montrer que chacune des formes du système (B), ainsi que $a, a', \dots$ et ξ_1 , s'expriment en fonction entière des formes du système (A), y compris ϖ , et de leurs dérivées par rapport à x_1 , pour qu'il soit établi

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CIV, p. 109, 221, 281 (1887).

que tout invariant, contrevariant, péninvariant pur ou mixte du système (A) s'exprime à son tour en fonction entière des formes du système (A) et de leurs dérivées par rapport aux $p - 1$ variables $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$, à une puissance près de x_p . Et, puisque la proposition a été démontrée directement pour $p = 2$, elle sera vraie pour $p = 3, 4, \dots$, c'est-à-dire pour un nombre quelconque de variables. Or les formes du système (B) qui sont des péninvariants construits avec les coefficients de $f, f', f'', \dots$, traitées comme formes binaires à une seule variable non homogène, remplissent bien la condition indiquée. Il en est de même de la forme spéciale ψ qui fait partie du système (B), car on peut l'écrire

$$\psi = \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx_1^n} - \frac{1}{n-1!} \frac{d\varpi}{dx_1} \frac{d^{n-1} f}{dx_1^{n-1}},$$

et il en est encore de même des quantités $\alpha, \alpha', \dots$ et ξ_1 , car on a évidemment

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx_1^n}, \\ \alpha' &= \frac{1}{n!} \frac{d^n f'}{dx_1^n}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \xi_1 &= \frac{d\varpi}{dx_1}. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME VII. — *Tout invariant, contrévariant, péninvariant pur ou mixte relatif à x_1 , d'une forme ou d'un système de formes à p variables homogènes, peut s'exprimer comme fonction entière des formes du système, du covariant identique, et des dérivées tant de ces formes que du covariant identique prises par rapport à x_1 et à $p - 2$ autres variables choisies à volonté, divisée par une certaine puissance de la $p^{\text{ième}}$ variable. On obtient l'expression dont il s'agit en remplaçant dans la formation donnée ξ_i par $\frac{d\varpi}{dx_i}$ ($i = 1, 2, \dots, p-1$); ξ_p par $\frac{\varpi}{x_p}$; et $a_{ij, \dots, k}$, coefficient de $x_1^i x_2^j \dots x_{p-1}^k x_p^{n-\sigma}$ ($\sigma = i + j + \dots + k$) dans la forme f d'ordre n (supposée écrite avec les coefficients polynomiaux), par $\frac{n-\sigma!}{n! x_p^{n-\sigma}} \frac{d^\sigma f}{dx_1^i dx_2^j \dots dx_{p-1}^k}$, ou $\frac{n-\sigma!}{n!} \frac{1}{x_p^{n-\sigma}} f_{ij, \dots, k}$.*

Par analogie, on prévoit que les covariants purs et mixtes pourront s'exprimer de la même manière, et que leur expression s'obtiendra en faisant les mêmes substitutions que ci-dessus dans le péninvariant, source du covariant par rapport à x_p , et multipliant par x_p^r , si r est l'ordre du covariant par rapport aux variables x ; ou, ce qui revient au même, en remplaçant dans le péninvariant source du covariant par rapport à x_1 , ξ_1 par $\frac{\varpi}{x_p}$; ξ_i , par $\frac{d\varpi}{dx_i}$ ($i = 2, 3, \dots, p-1$); ξ_p par $\frac{d\varpi}{dx_1}$; $a_{ij, \dots, k}$ par $\frac{i!}{n! x_p^i} f_{u-\sigma, j, \dots, k}$.

10. Comme exemple des résultats que donne l'application de ces théorèmes, voici l'une des trois expressions du contrevariant G de la forme quadratique ternaire $f = (x, y, z)^2$:

$$(24) \quad G = \frac{1}{4z^2} \left\{ \begin{aligned} & \left[2f \frac{d^2 f}{dy^2} - \left(\frac{df}{dy} \right)^2 \right] \left(\frac{d\varpi}{dx} \right)^2 \\ & + \left[2f \frac{d^2 f}{dx^2} - \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \right] \left(\frac{d\varpi}{dy} \right)^2 \\ & + \left[\frac{d^2 f}{dx^2} \frac{d^2 f}{dy^2} - \left(\frac{d^2 f}{dx dy} \right)^2 \right] \varpi^2 \\ & + 2 \left(\frac{df}{dx} \frac{df}{dy} - f \frac{d^2 f}{dx dy} \right) \frac{d\varpi}{dx} \frac{d\varpi}{dy} \\ & + 2 \left(\frac{df}{dx} \frac{d^2 f}{dx dy} - \frac{df}{dy} \frac{d^2 f}{dx^2} \right) \varpi \frac{d\varpi}{dy} \\ & + 2 \left(\frac{df}{dy} \frac{d^2 f}{dx dy} - \frac{df}{dx} \frac{d^2 f}{dy^2} \right) \varpi \frac{d\varpi}{dx}, \end{aligned} \right.$$

formule qu'il est facile de vérifier en remplaçant f , ϖ , $\frac{df}{dx}$, ... par leurs valeurs complètes.

On trouve de même pour la source (par rapport à x) du hessien de la forme cubique ternaire $f = (x, y, z)^3$

$$(25) \quad h = \frac{1}{216z^2} \left\{ \begin{aligned} & 2 \frac{df}{dx} \frac{d^2 f}{dx^2} \frac{d^2 f}{dx dy^2} - \left(\frac{d^2 f}{dx dy} \right)^2 \frac{d^2 f}{dx^2} - \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)^2 \frac{d^2 f}{dx dy^2} \\ & + 2 \frac{d^2 f}{dx^2} \frac{d^2 f}{x dy} \frac{d^2 f}{dx^2 dy} - 2 \frac{df}{dx} \left(\frac{d^2 f}{dx^2 dy} \right)^2, \end{aligned} \right.$$

et pour le hessien complet

$$(26) \quad H = \frac{1}{108z^2} \left\{ \begin{aligned} & 3f \frac{d^2 f}{dx^2} \frac{d^2 f}{dy^2} - 3f \left(\frac{d^2 f}{dx dy} \right)^2 + 4 \frac{df}{dx} \frac{df}{dy} \frac{d^2 f}{dx dy} \\ & - 2 \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \frac{d^2 f}{dy^2} - 2 \left(\frac{df}{dy} \right)^2 \frac{d^2 f}{dx^2}. \end{aligned} \right.$$

Cette dernière expression est, comme celle de G , symétrique par rapport à x et y , ainsi que cela devait être. Comme vérification, prenons l'expression du hessien sous forme de déterminant où entrent symétriquement les dérivées de f par rapport aux trois variables, d'après la définition connue de ce covariant; désignant, pour abréger, par f_{pqr} la dérivée $\frac{d^{p+q+r}f}{dx^p dy^q dz^r}$, on a, à un facteur, numérique près,

$$(27) \quad H = \begin{vmatrix} f_{200} & f_{110} & f_{100} \\ f_{110} & f_{020} & f_{010} \\ f_{100} & f_{010} & f_{000} \end{vmatrix}.$$

Mais le théorème des fonctions homogènes fournit les quatre relations

$$(28) \quad \begin{cases} 3f &= x f_{100} + y f_{010} + z f_{000}, \\ 2f_{100} &= x f_{200} + y f_{110} + z f_{101}, \\ 2f_{010} &= x f_{110} + y f_{020} + z f_{011}, \\ 2f_{000} &= x f_{101} + y f_{011} + z f_{002}. \end{cases}$$

Si l'on porte dans la dernière colonne du déterminant (27) les valeurs de $f_{101}, f_{011}, f_{002}$ tirées des trois dernières relations (28), et qu'on ajoute à cette dernière colonne les deux premières respectivement multipliées par $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$, il vient

$$H = \frac{2}{z} \begin{vmatrix} f_{200} & f_{110} & f_{100} \\ f_{110} & f_{020} & f_{010} \\ f_{101} & f_{011} & f_{001} \end{vmatrix}.$$

Remplaçons encore dans la dernière ligne de ce déterminant les f par leurs valeurs tirées des trois premières équations (28), et ajoutons à cette dernière ligne les deux premières respectivement multipliées par $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$; il vient

$$H = \frac{2}{z^2} \begin{vmatrix} f_{200} & f_{110} & f_{100} \\ f_{110} & f_{020} & f_{010} \\ 2f_{100} & 2f_{010} & 3f \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire précisément, à un facteur numérique près, l'expression (26).

On pourrait évidemment obtenir de même, au moyen du théo-

rème des fonctions homogènes, en partant de l'expression différentielle que fournit la définition ou la formule symbolique de tout covariant, son expression telle qu'elle résulte immédiatement de l'application des théorèmes donnés ci-dessus.

Sur une généralisation de la formule des accroissements finis;
par T.-J. STIELTJES.

(Séance du 21 décembre 1887.)

1. Soient $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$, $k(u)$ quatre fonctions réelles de la variable réelle u . On suppose que ces fonctions sont finies et continues, ainsi que leurs dérivées du premier et du second ordre, et enfin que

$$f'(u), g'(u), h'(u), k'(u),$$

admettent encore des dérivées

$$f''(u), g''(u), h''(u), k''(u)$$

mais qui ne sont plus nécessairement des fonctions continues.

Si maintenant x, y, z, t sont quatre nombres inégaux, nous allons considérer le rapport des deux déterminants

$$D = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(z) & g(z) & h(z) & k(z) \\ f(t) & g(t) & h(t) & k(t) \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix}.$$

Nous désignerons ce rapport par A

$$A = \frac{D}{\Delta}.$$

Il est clair que A est une fonction symétrique de x, y, z, t , et

nous pouvons supposer

$$x < y < z < t.$$

On a ainsi

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(z) & g(z) & h(z) & k(z) \\ f(t) & g(t) & h(t) & k(t) \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Remplaçons, dans le premier membre, t par une variable u , on obtiendra une fonction de u qui s'annule pour $u = z$ et pour $u = t$, et dont la dérivée s'annule par conséquent pour une valeur $u = \zeta_1 = (z, t)$, en désignant par (z, t) un nombre compris entre z et t (en excluant les limites).

On a donc

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(z) & g(z) & h(z) & k(z) \\ f'(\zeta_1) & g'(\zeta_1) & h'(\zeta_1) & k'(\zeta_1) \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 0 & 1 & 2\zeta_1 & 3\zeta_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Remplaçons, dans le premier membre, z par une variable u : on obtiendra une fonction de u qui s'annule pour $u = y$ et pour $u = z$ et dont la dérivée s'annule pour $u = \tau_1 = (y, z)$:

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f'(\tau_1) & g'(\tau_1) & h'(\tau_1) & k'(\tau_1) \\ f'(\zeta_1) & g'(\zeta_1) & h'(\zeta_1) & k'(\zeta_1) \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 0 & 1 & 2\tau_1 & 3\tau_1^2 \\ 0 & 1 & 2\zeta_1 & 3\zeta_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

En continuant ainsi, il vient

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) & k'(\xi) \\ f'(\tau_1) & g'(\tau_1) & h'(\tau_1) & k'(\tau_1) \\ f'(\zeta_1) & g'(\zeta_1) & h'(\zeta_1) & k'(\zeta_1) \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2\xi & 3\xi^2 \\ 0 & 1 & 2\tau_1 & 3\tau_1^2 \\ 0 & 1 & 2\zeta_1 & 3\zeta_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\xi = (x, y), \quad \tau_1 = (y, z), \quad \zeta_1 = (z, t).$$

$$x < \xi < \tau_1 < \zeta_1 < t.$$

Remplaçons maintenant ζ_1 par une variable u , on aura dans le premier membre une fonction de u qui s'annule pour $u = \tau_1$.

$u = \zeta_1$, et l'on en conclut

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) & k'(\xi) \\ f'(\eta_1) & g'(\eta_1) & h'(\eta_1) & k'(\eta_1) \\ f''(\zeta_2) & g''(\zeta_2) & h''(\zeta_2) & k''(\zeta_2) \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2\xi & 3\xi^2 \\ 0 & 1 & 2\eta_1 & 3\eta_1^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6\zeta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\zeta_2 = (\eta_1, \zeta_1),$$

$$x < \xi < \eta_1 < \zeta_2 < t.$$

En remplaçant encore η_1 par une variable u , on trouvera, par le même raisonnement,

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) & k'(\xi) \\ f''(\eta) & g''(\eta) & h''(\eta) & k''(\eta) \\ f''(\zeta_2) & g''(\zeta_2) & h''(\zeta_2) & k''(\zeta_2) \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2\xi & 3\xi^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6\eta \\ 0 & 0 & 2 & 6\zeta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\eta = (\xi, \eta_1),$$

$$x < \xi < \eta < \zeta_2.$$

Et, si nous remplaçons enfin ζ_2 par une variable u , on trouvera

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) & k'(\xi) \\ f''(\eta) & g''(\eta) & h''(\eta) & k''(\eta) \\ f'''(\zeta) & g'''(\zeta) & h'''(\zeta) & k'''(\zeta) \end{vmatrix} - A \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2\xi & 3\xi^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6\eta \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\zeta = (\eta, \zeta_2),$$

$$x < \xi < \eta < \zeta < t,$$

c'est-à-dire

$$(1) \quad A = \frac{1}{1! 2! 3!} \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) & k'(\xi) \\ f''(\eta) & g''(\eta) & h''(\eta) & k''(\eta) \\ f'''(\zeta) & g'''(\zeta) & h'''(\zeta) & k'''(\zeta) \end{vmatrix}.$$

Ayant $\xi = (x, y)$, $\eta_1 = (y, z)$ et $\eta = (\xi, \eta_1)$, on en conclut $\eta = (x, z)$ et l'on trouvera de même $\zeta = (x, t)$.

Le résultat que nous avons obtenu peut s'énoncer ainsi :

Le rapport A n'est pas plus grand que $\frac{M}{1! 2! 3!}$ et pas plus petit que $\frac{m}{1! 2! 3!}$, en désignant par M la plus grande, par m la plus pe-

tite des valeurs du déterminant,

$$\begin{vmatrix} f(u) & g(u) & h(u) & k(u) \\ f'(u') & g'(u') & h'(u') & k'(u') \\ f''(u'') & g''(u'') & h''(u'') & k''(u'') \\ f'''(u''') & g'''(u''') & h'''(u''') & k'''(u''') \end{vmatrix}.$$

sous les conditions

$$\begin{aligned} u &= x, \\ u &\leq u' \leq y, \\ u' &\leq u'' \leq z, \\ u'' &\leq u''' \leq t. \end{aligned}$$

C'est là un théorème qui se rapproche beaucoup d'un autre théorème donné par M. H.-A. Schwarz (*Annali di Matematica* de Brioschi, série II, t. X). La limitation que nous venons d'obtenir est un peu plus resserrée que celle donnée par M. Schwarz.

2. Notre démonstration suppose seulement que les fonctions

$$f''(u), g''(u), h''(u), k''(u),$$

admettent des dérivées

$$f'''(u), g'''(u), h'''(u), k'''(u).$$

Mais supposons maintenant en outre que ces dernières fonctions soient continues, et faisons tendre dans la formule (1) x, y, z et t vers une même limite a ; il viendra

$$(2) \quad \lim A = \frac{1}{1! 2! 3!} \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) & k(a) \\ f'(a) & g'(a) & h'(a) & k'(a) \\ f''(a) & g''(a) & h''(a) & k''(a) \\ f'''(a) & g'''(a) & h'''(a) & k'''(a) \end{vmatrix}.$$

Considérons le cas où les nombres x, y, z, t tendent de telle façon vers la limite a , que a n'est jamais en dehors de l'intervalle (x, t) . Nous allons montrer que la formule (2) subsiste alors sous des conditions bien plus larges relatives aux fonctions $f(u), g(u), h(u), k(u)$.

En effet, il suffit alors que ces fonctions soient finies ou conti-

nues ainsi que leurs dérivées du premier et du second ordre, et que les expressions

$$\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}, \quad \frac{g'(a+h)-g'(a)}{h},$$

$$\frac{h'(a+h)-h'(a)}{h}, \quad \frac{k'(a+h)-k'(a)}{h}$$

tendent pour $h = 0$ vers des limites déterminées que nous désignerons encore par $f'''(a), g'''(a), h'''(a), k'''(a)$.

On voit donc que dans la suite nous ne supposons pas l'existence des dérivées $f'''(u), g'''(u), h'''(u), k'''(u)$ pour des valeurs de la variable autres que a : la formule (1) devient donc inapplicable. Mais nous supposons toujours

$$x \leq a,$$

$$q \leq t.$$

3. La démonstration de la proposition que nous venons d'énoncer se compose de deux parties.

D'abord on démontrera que la proposition est exacte dans certains cas particuliers; ensuite on ramènera le cas général à ces cas particuliers.

Posons

$$(3) \quad \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(z) & g(z) & h(z) & k(z) \\ f(t) & g(t) & h(t) & k(t) \end{vmatrix} - (t-z)B = 0.$$

En remplaçant t par une variable u , on conclura

$$(4) \quad \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(z) & g(z) & h(z) & k(z) \\ f'(\zeta_1) & g'(\zeta_1) & h'(\zeta_1) & k'(\zeta_1) \end{vmatrix} - B = 0.$$

$$\zeta_1 = (z, t).$$

Soit maintenant

$$(5) \quad B = (z-y)C.$$

Après avoir substitué cette valeur de B dans l'équation (4), on

trouvera

$$(6) \quad \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f'(\eta_1) & g'(\eta_1) & h'(\eta_1) & k'(\eta_1) \\ f'(\zeta_1) & g'(\zeta_1) & h'(\zeta_1) & k'(\zeta_1) \end{vmatrix} - C = 0.$$

$$\eta_1 = (y, z).$$

Posons

$$(7) \quad C = (y - x)D$$

et substituons dans l'équation (6) : on conclura encore par le même raisonnement

$$(8) \quad \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) & k'(\xi) \\ f'(\eta_1) & g'(\eta_1) & h'(\eta_1) & k'(\eta_1) \\ f'(\zeta_1) & g'(\zeta_1) & h'(\zeta_1) & k'(\zeta_1) \end{vmatrix} - D = 0.$$

$$\xi = (x, y).$$

Soit encore

$$(9) \quad D = (\zeta_1 - \eta_1)E,$$

il viendra

$$(10) \quad \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) & k'(\xi) \\ f'(\eta_1) & g'(\eta_1) & h'(\eta_1) & k'(\eta_1) \\ f''(\zeta) & g''(\zeta) & h''(\zeta) & k''(\zeta) \end{vmatrix} - E = 0.$$

$$\zeta = (\eta_1, \zeta_1),$$

et si nous posons enfin

$$(11) \quad E = (\tau_1 - \xi)F,$$

on aura

$$(12) \quad \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) & k'(\xi) \\ f''(\eta) & g''(\eta) & h''(\eta) & k''(\eta) \\ f''(\zeta) & g''(\zeta) & h''(\zeta) & k''(\zeta) \end{vmatrix} - F = 0.$$

$$\eta = (\xi, \tau_1),$$

$$x < \xi < \eta < \zeta < t.$$

Les équations (3), (5), (7), (9), (11) montrent qu'on a

$$F = \frac{D}{(t-z)(z-y)(y-x)(\zeta_1 - \eta_1)(\tau_1 - \xi)},$$

et, comme on a

$$\Delta = (t-s)(t-y)(t-x) \\ \times (s-y)(s-x) \\ \times (y-x),$$

il vient

$$(13) \quad A = \left(\frac{\zeta_1 - \eta_1}{t-y} \right) \left(\frac{\eta_1 - \xi}{s-x} \right) \frac{F}{t-x},$$

et, d'après l'équation (12), on a

$$(14) \quad \frac{F}{t-x} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(\xi) & g(\xi) & h(\xi) & k(\xi) \\ f'(\eta) & g'(\eta) & h'(\eta) & k'(\eta) \\ P & Q & R & S \end{vmatrix},$$

en posant

$$P = \frac{f'(\zeta) - f'(\eta)}{t-x}, \quad Q = \frac{g'(\zeta) - g'(\eta)}{t-x}, \quad \dots$$

Remarquons d'abord que, à cause de

$$\zeta_1 = (s, t), \quad \eta_1 = (y, s), \quad \xi = (x, y),$$

on aura évidemment

$$0 < \frac{\zeta_1 - \eta_1}{t-y} < 1, \quad 0 < \frac{\eta_1 - \xi}{s-x} < 1.$$

Par conséquent, dans le cas où l'on aura

$$\lim_{t-x} \frac{F}{t-x} = 0,$$

la formule (13) permettra d'en conclure

$$\lim A = 0.$$

Examinons maintenant l'expression $\frac{F}{t-x}$ donnée par la formule (14).

La valeur de P peut s'écrire

$$P = \left(\frac{\zeta - a}{t-x} \right) \frac{f'(\zeta) - f'(a)}{\zeta - a} - \left(\frac{\eta - a}{t-x} \right) \frac{f'(\eta) - f'(a)}{\eta - a}.$$

D'après notre supposition, a n'est pas à l'extérieur de l'intervalle (x, t) , ζ et η sont à l'intérieur de cet intervalle. Par consé-

quent les valeurs absolues de $\frac{\zeta-a}{\zeta-x}$ et $\frac{\eta-a}{\eta-x}$ sont inférieures à l'unité.

D'autre part, d'après notre hypothèse,

$$\frac{f''(\zeta)-f''(a)}{\zeta-a}, \quad \frac{f''(\eta)-f''(a)}{\eta-a}$$

tendent vers une même limite $f'''(a)$.

Par conséquent, lorsque $f'''(a) = 0$, on aura certainement

$$\lim P = 0,$$

et même, lorsque $f'''(a)$ n'est pas nulle, P restera toujours fini.

Les mêmes conclusions s'appliquent évidemment aux quantités Q, R, S, et, si l'on remarque que les autres éléments du déterminant (14) tendent vers des limites finies, on arrive à cette conclusion :

1. Dans le cas particulier où l'on a

$$f''(a) = 0, \quad g''(a) = 0, \quad h''(a) = 0, \quad k''(a) = 0,$$

la proposition énoncée est certainement exacte, et l'on a dans ce cas

$$\lim A = 0.$$

Supposons maintenant que l'on ait seulement

$$f'''(a) = 0, \quad g'''(a) = 0, \quad h'''(a) = 0,$$

mais $k'''(a) > 0$. Les quantités P, Q, R tendront vers zéro, S restera fini. Or le coefficient de S, dans le déterminant (14), est

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \\ f''(\eta) & g''(\eta) & h''(\eta) \end{vmatrix},$$

et les fonctions $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$ étant finies et continues, ainsi que leurs dérivées du premier et du second ordre, ce coefficient tendra vers zéro dans le cas où l'on a

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f'(a) & g'(a) & h'(a) \\ f''(a) & g''(a) & h''(a) \end{vmatrix} = 0.$$

On en conclut :

II. Dans le cas particulier où l'on a

$$f''(a) = 0, \quad g''(a) = 0, \quad h''(a) = 0$$

et

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f'(a) & g'(a) & h'(a) \\ f''(a) & g''(a) & h''(a) \end{vmatrix} = 0,$$

la proposition énoncée est exacte, et l'on a

$$\lim A = 0.$$

Considérons enfin le cas

$$f(x) = 1, \quad g(x) = x, \quad h(x) = x^2.$$

On a identiquement

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & k(x) \\ 1 & y & y^2 & k(y) \\ 1 & z & z^2 & k(z) \\ 1 & t & t^2 & k(t) \end{vmatrix} = \frac{k''(a)}{1.2.3} \Delta + \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & k(x) - \frac{k''(a)}{1.2.3} x^3 \\ 1 & y & y^2 & k(y) - \frac{k''(a)}{1.2.3} y^3 \\ 1 & z & z^2 & k(z) - \frac{k''(a)}{1.2.3} z^3 \\ 1 & t & t^2 & k(t) - \frac{k''(a)}{1.2.3} t^3 \end{vmatrix} \\ = \frac{k''(a)}{1.2.3} \Delta + M.$$

Or on a, d'après (I),

$$\lim \frac{M}{\Delta} = 0,$$

en sorte qu'on trouve dans le cas actuel

$$\lim A = \frac{k''(a)}{1.2.3}.$$

III. Dans le cas particulier

$$f(x) = 1, \quad g(x) = x, \quad h(x) = x^2,$$

la proposition énoncée est exacte et l'on a

$$\lim A = \frac{k''(a)}{1.2.3}.$$

4. Il sera facile maintenant de traiter le cas général.

Pour abréger l'écriture, nous désignerons le déterminant D ainsi

$$|f(x), g(x), h(x), k(x)|.$$

Comme nous avons déjà traité le cas

$$f''(a) = g''(a) = h''(a) = k''(a) = 0,$$

nous pourrions supposer que l'un au moins de ces quatre nombres ne soit pas nul, soit

$$k''(a) \geq 0.$$

Posons

$$f(x) - \frac{f''(a)}{k''(a)} k(x) = f_1(x),$$

$$g(x) - \frac{g''(a)}{k''(a)} k(x) = g_1(x),$$

$$h(x) - \frac{h''(a)}{k''(a)} k(x) = h_1(x);$$

on aura identiquement

$$D = |f_1(x), g_1(x), h_1(x), k(x)|,$$

et il est clair qu'on a

$$f_1''(a) = 0, \quad g_1''(a) = 0, \quad h_1''(a) = 0.$$

Par conséquent, dans le cas où le déterminant

$$D_1 = \begin{vmatrix} f_1(a) & g_1(a) & h_1(a) \\ f_1'(a) & g_1'(a) & h_1'(a) \\ f_1''(a) & g_1''(a) & h_1''(a) \end{vmatrix}$$

est nul, on a

$$\lim_{\Delta} \frac{D}{\Delta} = \lim A = 0,$$

d'après le lemme II, ce qui est bien conforme avec la proposition générale.

Nous n'avons donc qu'à considérer le cas $D_1 \geq 0$. Or, dans ce cas, l'un au moins des mineurs de D_1 , qui sont les coefficients des éléments de la dernière ligne horizontale, doit être différent de zéro. Supposons que ce soit

$$D_2 = \begin{vmatrix} f_1(a) & g_1(a) \\ f_1'(a) & g_1'(a) \end{vmatrix},$$

qui n'est pas égal à zéro.

Un au moins des éléments $f_1(a)$, $g_1(a)$ doit être différent de zéro; supposons que ce soit

$$D_3 = f_1(a)$$

qui n'est pas nul.

Calculons encore les constantes

$$p = \frac{D_1}{D_3}, \quad q = \frac{D_2}{D_3}, \quad r = D_3.$$

On a maintenant identiquement

$$\begin{aligned} |f_1(x), g_1(x), h_1(x), k(x)| &= \frac{p}{1.2} |f_1(x), g_1(x), (x-a)^2, k(x)| \\ &\quad + |f_1(x), g_1(x), h_1(x) - \frac{p}{1.2} (x-a)^2, k(x)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f_1(x), g_1(x), (x-a)^2, k(x)| &= \frac{q}{1} |f_1(x), (x-a), (x-a)^2, k(x)| \\ &\quad + |f_1(x), g_1(x) - \frac{q}{1} (x-a), (x-a)^2, k(x)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f_1(x), x-a, (x-a)^2, k(x)| &= r |1, x-a, (x-a)^2, k(x)| \\ &\quad + |f_1(x) - r, x-a, (x-a)^2, k(x)| \end{aligned}$$

et par des substitutions successives

$$\begin{aligned} D &= \frac{p}{1.2} \frac{q}{1} r |1, x-a, (x-a)^2, k(x)| \\ &\quad + \frac{p}{1.2} \frac{q}{1} |f_1(x) - r, x-a, (x-a)^2, k(x)| \\ &\quad + \frac{p}{1.2} |f_1(x), g_1(x) - q(x-a), (x-a)^2, k(x)| \\ &\quad + |f_1(x), g_1(x), h_1(x) - \frac{p}{1.2} (x-a)^2, k(x)|. \end{aligned}$$

En divisant par Δ et en passant à la limite, on trouve directement les limites des rapports des déterminants au second membre par les lemmes II et III. En effet, ayant

$$|1, x-a, (x-a)^2, k(x)| = |1, x, x^2, k(x)|,$$

il vient d'abord, d'après III,

$$\lim |1, x, x^2, k(x)| : \Delta = \frac{1}{1.2.3} k'''(a).$$

Les trois autres rapports sont nuls d'après le lemme II; en effet, on a

$$\begin{vmatrix} f_1(a) - r & 0 & 0 \\ f'_1(a) & 1 & 0 \\ f''_1(a) & 0 & 1.2 \end{vmatrix} = 2(D_3 - r) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} f_1(a) & g_1(a) & 0 \\ f'_1(a) & g'_1(a) - q & 0 \\ f''_1(a) & g''_1(a) & 1.2 \end{vmatrix} = 2(D_2 - q D_3) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} f_1(a) & g_1(a) & h_1(a) \\ f'_1(a) & g'_1(a) & h'_1(a) \\ f''_1(a) & g''_1(a) & h''_1(a) - p \end{vmatrix} = D_1 - p D_2 = 0.$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \lim \frac{D}{\Delta} &= \frac{pqr}{1!2!3!} k'''(a) = \frac{k'''(a)}{1!2!3!} \begin{vmatrix} f_1(a) & g_1(a) & h_1(a) \\ f'_1(a) & g'_1(a) & h'_1(a) \\ f''_1(a) & g''_1(a) & h''_1(a) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{1!2!3!} \begin{vmatrix} f_1(a) & g_1(a) & h_1(a) & k(a) \\ f'_1(a) & g'_1(a) & h'_1(a) & k'(a) \\ f''_1(a) & g''_1(a) & h''_1(a) & k''(a) \\ 0 & 0 & 0 & k'''(a) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ou

$$\lim \frac{D}{\Delta} = \frac{1}{1!2!3!} \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) & k(a) \\ f'(a) & g'(a) & h'(a) & k'(a) \\ f''(a) & g''(a) & h''(a) & k''(a) \\ f'''(a) & g'''(a) & h'''(a) & k'''(a) \end{vmatrix}.$$

Notre proposition est ainsi démontrée dans toute sa généralité.

Il est clair que la condition que a n'est jamais en dehors de l'intervalle (x, t) sera toujours satisfaite si l'on suppose que l'un des nombres x, y, z, t reste constamment égal à a ; les autres peuvent alors tendre vers a d'une manière quelconque.

Nous avons considéré des déterminants du quatrième degré, mais il est à peine nécessaire de dire qu'on peut énoncer un théorème analogue dans le cas d'un nombre quelconque n de fonctions ($n \geq 2$).

5. Pour montrer une application, considérons une courbe

gauche

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

$\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ étant des fonctions réelles de la variable réelle t .

Soit M un point de la courbe, correspondant à $t = t_0$. Nous adopterons la définition suivante du plan osculateur en M : le plan osculateur en M est la position limite (s'il y en a une) d'un plan passant par M et par deux autres points de la courbe, qui sont infiniment voisins de M .

Les deux autres points correspondant à $t = t_1$ et $t = t_2$, l'équation du plan passant par les trois points est

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(t_0) & \chi(t_0) \\ 1 & \varphi(t_1) & \chi(t_1) \\ 1 & \varphi(t_2) & \chi(t_2) \end{vmatrix} [X - \varphi(t_0)] + \begin{vmatrix} 1 & \chi(t_0) & \varphi(t_0) \\ 1 & \chi(t_1) & \varphi(t_1) \\ 1 & \chi(t_2) & \varphi(t_2) \end{vmatrix} [Y - \psi(t_0)] \\ + \begin{vmatrix} 1 & \varphi(t_0) & \psi(t_0) \\ 1 & \varphi(t_1) & \psi(t_1) \\ 1 & \varphi(t_2) & \psi(t_2) \end{vmatrix} [Z - \chi(t_0)] = 0.$$

Supposons maintenant que les trois fonctions

$$\varphi, \psi, \chi$$

soient finies et continues, ainsi que leurs dérivées

$$\varphi', \psi', \chi',$$

et enfin que ces dernières fonctions admettent des dérivées, *mais pour la valeur particulière $t = t_0$ seulement.*

En divisant alors par

$$\begin{vmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 \\ 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \end{vmatrix}$$

et en faisant tendre t_1 et t_2 vers t_0 , il viendra

$$\begin{vmatrix} \psi'(t_0)\chi'(t_0) \\ \psi''(t_0)\chi''(t_0) \end{vmatrix} [X - \varphi(t_0)] + \begin{vmatrix} \chi'(t_0)\varphi'(t_0) \\ \chi''(t_0)\varphi''(t_0) \end{vmatrix} [Y - \psi(t_0)] \\ + \begin{vmatrix} \varphi'(t_0)\psi'(t_0) \\ \varphi''(t_0)\psi''(t_0) \end{vmatrix} [Z - \chi(t_0)] = 0.$$

Par conséquent, si cette équation représente un plan déterminé, c'est-à-dire si les coefficients de X , Y , Z ne s'évanouissent pas à la fois, ce plan sera, d'après notre définition, le plan osculateur

en M. Et l'on voit que l'existence de ce plan suppose seulement que

$$\frac{\varphi'(t_0+h) - \varphi'(t_0)}{h}, \quad \frac{\psi'(t_0+h) - \psi'(t_0)}{h}, \quad \frac{\gamma'(t_0+h) - \gamma'(t_0)}{h}$$

tendent vers des limites déterminées pour $h = 0$.

C'est là un fait analogue à ce qui se présente dans la théorie des courbes planes, lorsqu'on définit la tangente en un point M comme limite d'une sécante passant par M, et par un second point de la courbe infiniment voisin de M. Alors, si l'équation de la courbe est

$$y = f(x),$$

l'existence d'une tangente en $M(a, b)$ suppose seulement que

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a une limite déterminée, mais la fonction $f(x)$ peut très bien ne pas admettre une dérivée pour d'autres valeurs de la variable.

Il est clair que la proposition que nous avons établie permet d'énoncer des propriétés analogues relatives à l'existence du cercle osculateur, de la sphère osculatrice, etc.

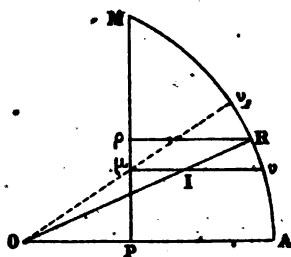
Division approximative d'un arc de cercle dans un rapport donné, à l'aide de la règle et du compas; par M. A. PELLET.

(Séance du 18 janvier 1888.)

M. Collignon a proposé au Congrès de Toulouse, de l'Association française pour l'avancement des Sciences, une méthode pour diviser approximativement un arc de cercle en un certain nombre de parties égales. Cette méthode repose sur la remarque suivante, qui lui a été suggérée par un dessinateur. Soient (*fig. 1*) $AM = a$ un arc de cercle plus petit que $\frac{\pi}{2}$, $AR = ma$, $P\mu = mPM$ et I l'intersection de OR avec $\mu\nu$, perpendiculaire sur PM. Le rapport $\frac{\mu I}{PA}$, fonction de a et de m , varie très peu lorsque a va de 0 à $\frac{\pi}{2}$,

mais il varie sensiblement lorsque m varie de 0 à $\frac{1}{2}$. Si donc on connaît la valeur de ce rapport pour une valeur de m , on pourra construire le point R, quel que soit α . Au lieu du rapport $\frac{\mu I}{PA}$, considérons le rapport $\frac{\mu I}{\rho R}$; ce rapport est toujours voisin de $\frac{2}{3}$ lorsque m est compris entre 0 et $\frac{1}{2}$ et α inférieur à $\frac{\pi}{2}$; d'où une construction uniforme pour avoir le point R, quels que soient m

Fig. 1..



et α . L'erreur commise peut facilement être rendue inférieure à $\frac{1}{1000}$ du rayon.

1. Supposons d'abord AR quelconque et désignons-le par x . On a

$$r = \frac{\mu I}{\rho R} = \frac{m \sin \alpha \cos x - \cos \alpha \sin x}{\sin x (\cos x - \cos \alpha)},$$

dont la dérivée est

$$r' = \frac{-m \sin \alpha \cos^2 x - \cos \alpha \sin^2 x + m \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 x (\cos x - \cos \alpha)^2}.$$

Cette dérivée est négative lorsque x va de 0 à l'arc dont la tangente est égale à $m \tan \alpha$; on le voit aisément en prenant la dérivée du numérateur

$$-m \sin \alpha \cos^2 x - \cos \alpha \sin^2 x + m \sin \alpha \cos \alpha,$$

qui est égale à

$$3 \sin x \cos^2 x (m \sin \alpha - \cos \alpha \tan x).$$

Ce numérateur va donc en augmentant lorsque x va de 0 à $\arctan(m \tan \alpha)$; or il est négatif pour ces valeurs extrêmes.

Donc, lorsque R va du point v au point v_1 , intersection de la circonférence avec la droite $O\mu$, le rapport $\frac{\mu I}{\rho R}$ va en diminuant de 1 à 0. Il en résulte que, si l'on se donne la valeur de ce rapport r , le point R est déterminé. Soient R_1 un point de l'arc vv' , $R_1\rho_1$ sa distance à PM; prenons $\mu I_1 = r\rho_1 R_1$, la droite OI_1 rencontre la circonférence en un point R_2 compris entre R_1 et R, et ainsi de suite. On peut approcher indéfiniment dans les deux sens du point cherché R.

2. Pour $m = \frac{1}{3}$ et $x = \frac{a}{3}$, on a $r = \frac{2}{3}$.

Supposons $m < \frac{1}{2}$ et posons $x = ma$. Le rapport devient

$$\begin{aligned} r &= \frac{m \sin a \cos ma - \cos a \sin ma}{\sin ma (\cos ma - \cos a)} \\ &= \frac{(1+m) \sin a (1-m) - (1-m) \sin a (1+m)}{\sin 2ma - \sin a (1+m) + \sin a (1-m)}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} (1+m) \sin a (1-m) - (1-m) \sin a (1+m) &= \frac{2}{3} m (1-m^2) a^3 f(a), \\ \sin 2am - \sin a (1+m) \sin a (1-m) &= m (1-m^2) a^3 \varphi(a), \end{aligned}$$

$f(a)$ et $\varphi(a)$ représentant les séries

$$\begin{aligned} f(a) &= 1 - \frac{1+m^2}{10} a^2 + \frac{(3+m^2)(1+3m^2)}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} a^4 - \dots + (-1)^i A_i a^{2i} + \dots, \\ \varphi(a) &= 1 - \frac{1+3m^2}{12} a^2 + \frac{(1+3m^2)^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^4 - \dots + (-1)^i B_i a^{2i} + \dots, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A_i &= 3 \frac{(1+m)^{2i+2} - (1-m)^{2i+2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (2i+3) 2m}, \\ B_i &= \frac{(1+m)^{2i+3} - (1-m)^{2i+3} - (2m)^{2i+3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2i+3) m (1-m^2)}. \end{aligned}$$

A_i, B_i sont des fonctions entières de m dont la différence est divisible par $1 - 9m^2$.

Le rapport $\frac{A_i}{B_i}$ est égal à

$$\frac{\frac{1}{2}(1-m)}{1 - p^{2i+3} - (1-p)^{2i+3}},$$

p désignant $\frac{1-m}{1+m}$. Pour $m < \frac{1}{3}$, p est plus grand que $\frac{1}{2}$, p^{2i+2} que

$p^{2i+3} + (1-p)^{2i+3}$, et l'on a

$$\frac{1-p^{2i+2}}{1-p^{2i+3}-(1-p)^{2i+3}} > 1;$$

la fraction $\frac{A_i}{B_i}$ est donc plus grande $\frac{3}{2}(1-m)$, qui est supérieure à 1 et s'en rapproche indéfiniment lorsque i tend vers l'infini. Si $m > \frac{1}{3}$, on verrait de même que $\frac{A_i}{B_i}$ est plus petit que $\frac{3}{2}(1-m)$, qui est inférieur à 1 et s'en rapproche indéfiniment, i tendant vers l'infini.

La fonction r est égale à

$$\frac{2}{3} \frac{f(a)}{\varphi(a)} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3} - \frac{1-9m^2}{90} a^2 - \frac{(1+3m^2)(1-9m^2)}{6^2 \cdot 7 \cdot 10} a^4 - \dots$$

Elle est égale à $\frac{2}{3}$ pour $a=0$, et, a augmentant jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, elle va en croissant si m est plus grand que $\frac{1}{3}$ et en décroissant si $m < \frac{1}{3}$; pour $a = \frac{\pi}{2}$, r est égal à $\frac{m}{\sin \frac{m\pi}{2}}$. En effet, on a, m étant plus petit que $\frac{1}{3}$ et a que $\frac{\pi}{2}$,

$$f(a) - \varphi(a) < 0, \quad f'(a) - \varphi'(a) < 0,$$

et, comme $f(a)$, $-f'(a)$, $\varphi(a)$, $-\varphi'(a)$ sont positifs, on en déduit

$$\varphi(a)f'(a) - f(a)\varphi'(a) < 0.$$

On verrait de même que, pour $m > \frac{1}{3}$, on a

$$\varphi(a)f'(a) - f(a)\varphi'(a) > 0.$$

Posons

$$r = \frac{2}{3} - \frac{1-9m^2}{90} \frac{f_1(a)}{\varphi(a)} a^2.$$

$\frac{f_1(a)}{\varphi(a)}$ croît lorsque a va de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et m de 0 à $\frac{1}{3}$. Sa valeur maximum est donc

$$-\left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{90 \cdot 16}{5 \cdot \pi^2} = 1,2$$

et r est compris entre

$$\frac{2}{3} - 0,0275(1-9m^2) \left(\frac{2a}{\pi}\right)^2, \quad \frac{2}{3} - 0,0322(1-9m^2) \left(\frac{2a}{\pi}\right)^2.$$

3. Cherchons la distance du point R_1 correspondant à $x = ma$ au point R correspondant à $r = \frac{\pi}{2}$. Lorsque $a = \frac{\pi}{2}$, le sinus de ce dernier arc est égal à $\frac{3m}{2}$ et l'arc lui-même à

$$\frac{3m}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{3m}{2} \right)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \left(\frac{3m}{2} \right)^5 + \dots$$

Posons

$$\frac{m\pi}{2} - \text{arc sin } \frac{3m}{2} = A m(1 - 9m^2).$$

A est une fonction de m^2 qui va en croissant lorsque m^2 va de 0 à $\frac{1}{9}$. On le voit aisément en remplaçant dans le premier membre de cette équation m^2 par $\frac{1}{9} + \alpha$ après l'avoir divisé par m . Les coefficients des diverses puissances de α sont tous positifs et le terme indépendant de α est nul. A est toujours inférieur à 0,1 et sa valeur est très voisine de 0,08 pour $m = \frac{1}{3}$, de 0,07 pour $m = 0$.

Supposons (*fig. 2*) $a < \frac{\pi}{2}$, $m < \frac{1}{3}$.

Alors $AR_1 > AR$. On a

$$\frac{I_1 I \sin ma}{OI} = \sin \delta,$$

δ désignant l'arc RR_1 .

Or

$$I_1 I = r \rho R - r \rho_1 R_1,$$

$$I_1 I = r(\rho R - \rho_1 R_1) + (r - r_1) \rho_1 R_1;$$

mais

$$\rho R - \rho_1 R_1 = 2 \sin \frac{2ma - \delta}{2} \sin \frac{\delta}{2};$$

par suite

$$\rho R - \rho_1 R_1 < \sin ma \sin \delta,$$

et il vient

$$\frac{(r - r_1) \rho_1 R_1 \sin ma}{OI} > \left(1 - \frac{r}{OI} \sin^2 ma \right) \sin \delta;$$

d'ailleurs

$$\rho_1 R_1 = \cos ma - \cos a, \quad \rho_1 R_1 \sin ma = \frac{m(1 - m^2)}{2} a^2 \varphi(a)$$

et

$$r - r_1 = \frac{1 - 9m^2}{90} f_1(a) \frac{a^2}{\varphi(a)}$$



d'après le n° 2; par conséquent,

$$\frac{(1-m^2)f_1(\alpha)}{180(OI-r\sin^2 ma)} m(1-9m^2)\alpha^2 > \sin \delta,$$

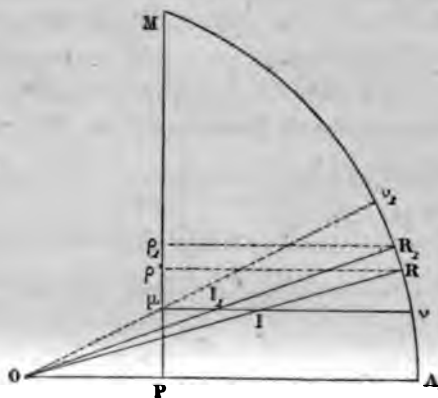
$$OI = \frac{\cos \alpha + \frac{2}{3}(\cos AR - \cos \alpha)}{\cos AR} = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{\cos \alpha}{2 \cos AR} \right).$$

La fonction

$$\frac{1-m^2}{180(OI-r\sin^2 ma)} < \frac{1-m^2}{120 \cos^2 ma}$$

atteint sa valeur maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $m = \frac{1}{3}$; $f_1(\alpha)$ est d'ail-

Fig. 2.



leurs toujours inférieur à 1 et il vient, en définitive,

$$0,1 m(1-9m^2) \left(\frac{2\alpha}{\pi} \right)^2 > \sin \delta.$$

Si $m > \frac{1}{3}$, r_1 est supérieur à $\frac{2}{3}$, $AR > AR_1$; les calculs précédents subsistent avec quelques modifications; dans le dénominateur, $OI - r \sin^2 ma$ doit être remplacé par $OI - r \sin^2 AR$, et l'on trouve que

$$\frac{1}{7}(\nu_1 - 9m^2) m \left(\frac{2\alpha}{\pi} \right)^2$$

est toujours plus grand en valeur absolue que $\sin \delta$ et de même signe.

4. Dans la pratique du dessin, toute distance inférieure à $\frac{1}{3}$ de

millimètre est négligeable. On pourra donc substituer le point R au point R₁ lorsque

$$\frac{R}{7} m(1 - 9m^2) \left(\frac{2a}{\pi} \right)^5.$$

R, désignant le rayon du cercle, sera inférieur à 0,0002. Lorsque R, le rayon, est plus petit que 0^m,50, cette limite n'est pas atteinte, quel que soit m , supposé toujours plus petit que $\frac{1}{2}$, pourvu que a soit inférieur à $\frac{\pi}{6}$; en opérant donc sur le reste de la division d'un arc par $\frac{\pi}{6}$, le résultat pourrait être considéré comme rigoureux. En outre, lorsque m est voisin de $\frac{1}{2}$ ou de $\frac{1}{6}$, il est avantageux de diviser l'arc dans le rapport $\frac{1}{2} - m$, d'où l'on déduira facilement la fraction m .

Sur les lignes de courbure de certaines surfaces gauches;
par M. CH. BIOCHE, professeur au Lycée de Douai.

(Séance du 18 janvier 1888.)

I.

On sait que, si la ligne de striction d'une surface gauche est ligne de courbure et si le paramètre de distribution des plans tangents est constant (ce qui arrive pour la surface gauche de révolution), le système des lignes de courbure auquel appartient la ligne de striction divise les génératrices en segments de longueur constante, et l'autre système détermine sur les génératrices des divisions homographiques (1).

Je me propose de faire voir que *ces surfaces sont les seules dont les lignes de courbure divisent les génératrices en segments égaux ou, plus généralement, en segments homographiques.*

Si l'on appelle s l'arc de la ligne de striction d'une surface

(1) PAUL SERRET, *Théorie géométrique et mécanique des lignes à double courbure*, p. 157.

gauche, r le segment de génératrice compris entre un point de la surface et le point central correspondant, une relation entre r et s définit une courbe sur la surface. Si l'on désigne par θ l'angle d'une génératrice avec la ligne de striction, par k le paramètre de distribution correspondant, par Ω la courbure de la section normale tangente à la ligne de striction (ces trois quantités étant fonctions de l'arc s), l'équation différentielle des lignes de courbure peut s'écrire

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & k \sin \theta \frac{dr^2}{ds^2} + \left[k^2 (\Omega - k \sin \theta \cos \theta) r^2 + \sin \theta \frac{dk}{ds} r + \Omega \right] \frac{dr}{ds} \\ & + (1 + k^2 r^2) (\Omega \cos \theta - k \sin \theta) + \cos \theta \sin \theta \frac{dk}{ds} r = 0. \end{aligned} \right.$$

Cherchons dans quels cas les génératrices d'une surface gauche sont divisées en segments de longueur constante par des lignes de courbure, ou, autrement dit, dans quels cas des solutions de l'équation (1) ne diffèrent que d'une constante.

Le premier membre de l'équation (1) est un trinôme du second degré en r dont les coefficients sont fonctions de s et de $\frac{dr}{ds}$, et par suite ne changent pas si l'on augmente r d'une constante. Pour que l'équation, étant vérifiée par $r = r'$, le soit par $r = r' + c$, quelle que soit la valeur de c , il faut et il suffit qu'elle soit vérifiée pour deux valeurs de c . On a ainsi les trois équations

$$(2) \quad (\Omega - k \sin \theta \cos \theta) \frac{dr}{ds} + \Omega \cos \theta - k \sin \theta = 0,$$

$$(3) \quad \frac{dk}{ds} \sin \theta \left(\frac{dr}{ds} + \cos \theta \right) = 0,$$

$$(4) \quad k \sin \theta \frac{dr^2}{ds^2} + \Omega \frac{dr}{ds} + \Omega \cos \theta - k \sin \theta = 0.$$

Pour une surface gauche $\theta \neq 0$, et les lignes de courbure ne pouvant pas être trajectoires orthogonales des génératrices, tout le long d'une de ces lignes $\frac{dr}{ds} + \cos \theta$ est différent de 0, de sorte que l'équation (3) ne peut être vérifiée que si $k = \text{const.}$

De plus, en combinant par soustraction les équations (2) et (4), on a

$$k \sin \theta \left(\frac{dr}{ds} + \cos \theta \right) \frac{dr}{ds} = 0;$$

les trois premiers facteurs étant différents de 0, dans les conditions du problème, les équations considérées ne peuvent être vérifiées en même temps que si $\frac{dr}{ds} = 0$, c'est-à-dire si l'on a, avec $k = \text{const.}$,

$$\Omega \cos \theta - k \sin \theta = 0.$$

D'autre part, il est évident, si l'on se reporte à l'équation (1), que ces conditions sont suffisantes. Donc, *si les lignes de courbure d'un système divisent les génératrices d'une surface gauche en segments de longueur constante, la ligne de striction est ligne de courbure et le paramètre de distribution est constant.* Alors le système de lignes de courbure auquel appartient la ligne de striction étant donné par $\frac{dr}{ds} = 0$, l'autre est donné par une équation de Riccati et, par suite, d'après un théorème connu, détermine sur les génératrices des divisions homographiques.

Cherchons maintenant à déterminer toutes les surfaces caractérisées par ce seul fait, d'avoir leurs génératrices divisées homographiquement par un système de lignes de courbure. On sait que si un système de lignes de courbure possède cette propriété, il doit être déterminé par une équation de Riccati

$$\frac{dr}{ds} + Mr^2 + Nr + P = 0.$$

On voit alors que l'équation (1), considérée comme une équation du second degré en $\frac{dr}{ds}$, donne pour $\frac{dr}{ds}$ deux expressions rationnelles et entières en r . Donc, si l'on résout l'équation (1), la quantité sous radical, qui est du quatrième degré en r , devra être carré parfait. La considération des termes du quatrième et du troisième degré montre immédiatement que sa racine est de la forme

$$(5) \quad k^2(\Omega - k \sin \theta \cos \theta)r^2 + \sin \theta \frac{dk}{ds} r + R,$$

R étant fonction de s seulement et devant vérifier simultanément trois équations de condition. On peut éviter la discussion de ce système d'équations en remarquant que le trinôme (5) ne diffère

du coefficient de $\frac{dr}{ds}$ que par le terme indépendant R ; de sorte que l'une des valeurs de $\frac{dr}{ds}$ serait

$$\frac{dr}{ds} = \frac{R - \Omega}{k \sin \theta}.$$

Le système de lignes de courbure diviserait les génératrices en segments égaux; or on a vu plus haut que cela ne peut arriver que si ce système est donné par $r = \text{const.}$ On retrouve les surfaces déjà obtenues. Donc, *si les lignes de courbure d'un système divisent homographiquement les génératrices d'une surface gauche, les autres divisent les génératrices en segments de longueur constante, et inversement* ⁽¹⁾.

On peut voir facilement que la division homographique ne peut pas se réduire à une division en segments proportionnels.

II.

On obtient des résultats qui me semblent intéressants si l'on exprime les conditions pour qu'une courbe soit à la fois ligne de courbure et ligne de striction d'une surface gauche, au moyen des éléments géométriques qui définissent cette courbe et la position de la génératrice qui s'appuie sur elle en chaque point.

Une ligne c est définie par ses deux courbures ω et ϖ ; la position d'une droite qui s'appuie sur c , par les cosinus λ , μ , ν des angles qu'elle fait avec la tangente, la normale principale et la binormale. Pour réduire au minimum le nombre des paramètres, on peut poser

$$\lambda = \cos \theta, \quad \mu = \sin \theta \cos \varphi, \quad \nu = \sin \theta \sin \varphi.$$

Avec ces notations, la condition pour que c soit ligne de striction est

$$(1) \quad \frac{d\theta}{ds} + \omega \cos \varphi = 0;$$

(¹) Ce résultat a été énoncé par M. Lelievre dans une Note parue dans les *Comptes rendus* (16 janvier 1888) au moment où je venais de terminer la rédaction de ce travail.

la condition pour que c soit ligne de courbure est

$$(2) \quad \pi - \frac{d\varphi}{ds} = 0.$$

Enfin, lorsque c est ligne de striction, le paramètre de distribution est donné par

$$(3) \quad k = \pi - \frac{d\varphi}{ds} + \omega \cot \theta \sin \varphi.$$

Des cinq quantités $k, \theta, \varphi, \omega, \pi$, fonctions de l'arc s qui entrent dans ces relations, les deux premières restent invariables lorsqu'on déforme une surface gauche. Si θ n'est pas un angle droit, les trois équations donnent φ, ω et π , autrement dit, déterminent les éléments nécessaires pour définir une surface gauche sur laquelle sont applicables toutes les surfaces (k, θ) correspondant à un système donné de fonctions k et θ , cette surface ayant sa ligne de striction pour ligne de courbure.

En effet, si $\frac{d\theta}{ds} \neq 0$, les équations peuvent s'écrire

$$\frac{d\theta}{ds} \tan \varphi + k \tan \theta = 0, \quad \frac{d\theta}{ds} + \omega \cos \varphi = 0, \quad \pi - \frac{d\varphi}{ds} = 0,$$

équations qui donnent un système unique de valeurs pour les trois inconnues.

Si $\frac{d\theta}{ds} = 0$, θ n'étant pas droit, les équations prises sous leur première forme donnent

$$\varphi = 90^\circ, \quad \pi = 0, \quad k = \omega \cot \theta;$$

les surfaces (k, θ) sont alors applicables sur une surface dont la ligne de striction est plane. En particulier, si $k = \text{const.}$, cette ligne est un cercle et la surface correspondante la surface gauche de révolution.

Si $\theta = 90^\circ$, c'est-à-dire si les surfaces (k, θ) sont des surfaces de binormales ou des conoïdes droits, les équations ne pourraient pas avoir lieu simultanément, et d'ailleurs il est évident, *a priori*, que la ligne de striction, étant orthogonale aux génératrices, ne peut devenir ligne de courbure par suite d'une déformation de la surface.

Donc, toute surface gauche qui n'est pas une surface de

binormales ou un conoïde droit peut être appliquée sur une surface gauche dont la ligne de striction est ligne de courbure, et le problème n'a qu'une solution.

Si, dans les équations (1) et (2), on considère ω et π comme connus, φ et θ se déterminent par des quadratures; ce qui montre qu'on peut toujours faire mouvoir une droite s'appuyant sur une courbe, de façon que cette courbe soit ligne de striction et ligne de courbure de la surface engendrée; on peut prendre arbitrairement une position de cette droite et alors la surface est complètement déterminée.

Sur la durée du jeu; par M. DELANNOY.

(Séance du 7 mars 1888.)

Dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 23 janvier 1888 (p. 253), M. Rouché a donné la solution du problème suivant :

Pierre et Paul jouent l'un contre l'autre avec des probabilités égales. Ils possèdent chacun n francs avant d'entrer au jeu; à chaque partie le perdant donne un franc au gagnant, et le jeu ne cesse que lorsque l'un des deux joueurs est ruiné. Quelle est la probabilité P pour que le jeu se termine juste à la fin d'une partie de rang assigné?

M. Rouché arrive, à l'aide de longs calculs, à la valeur

$$P = \frac{1 + (-1)^{\mu-n}}{2^n} \left[\sin \frac{\pi}{n} \cos^{\mu-2} \frac{\pi}{2n} - \sin \frac{3\pi}{n} \cos^{\mu-2} \frac{3\pi}{2n} + \dots \right. \\ \left. + (-1)^{r-1} \sin \frac{(2r-1)\pi}{n} \cos^{\mu-2} \frac{(2r-1)\pi}{2n} \right].$$

Reconnaissant que cette formule ne se prête pas aisément au calcul numérique, il en donne une transformation, dans les *Comptes rendus* du 30 janvier :

$$P = \frac{1 + (-1)^{\mu-n}}{2^\mu} \frac{n \Gamma(\mu)}{\Gamma\left(\frac{\mu-n}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\mu+n}{2} + 1\right)},$$

Cette valeur ne nous paraît pas exacte; l'emploi de l'échiquier nous en fournit une différente.

Soit μ le rang assigné à la partie finale. Pour que l'un des joueurs soit décavé après cette $\mu^{\text{ième}}$ partie, et pas avant, il faut et il suffit :

1° Que, pendant le cours des $\mu - 1$ premières parties, la différence entre les pertes et les gains de l'un ou l'autre joueur n'ait jamais dépassé $n - 1$. Nous obtiendrons tout à l'heure, au moyen de l'échiquier, la probabilité P_1 pour que cette condition soit satisfaite;

2° Que, après les $\mu - 1$ premières parties, la différence entre les pertes et les gains de l'un des deux joueurs soit égale à $n - 1$. La

probabilité P_2 pour qu'il en soit ainsi est égale à $\frac{2^{\frac{\mu-n}{2}} C_{\mu-1}^{\frac{\mu-n}{2}}}{2^{\mu-1}}$. Remarquons, en passant, que, $\frac{\mu-n}{2}$ devant être un nombre entier, le problème n'est possible que si μ et n sont de même parité. Nous pourrions donc poser

$$\mu + n = 2p, \quad \mu - n = 2q,$$

et nous aurons alors

$$P_1 = \frac{C_{p+q-1}^q}{2^{p+q-1}};$$

3° Il faut enfin que la dernière partie soit perdue par le joueur qui en a déjà perdu $n - 1$ de plus qu'il n'en a gagné. La probabilité pour qu'il en soit ainsi est

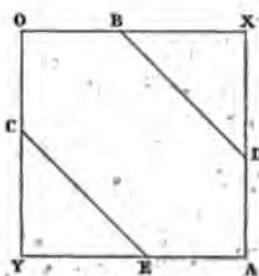
$$P_3 = \frac{1}{2}.$$

Il nous reste à déterminer la valeur de P_1 .

Soient x le nombre des pertes d'un joueur, et y le nombre de ses gains. Représentons les pertes par des pas horizontaux sur un échiquier et les gains par des pas verticaux. Le nombre des arrangements des x et des y , tels que la différence des pertes et des gains (abstraction faite du signe) ne dépasse pas $n - 1$, est égal au nombre de manières dont une tour, marchant seulement dans les sens $\rightarrow$ et $\downarrow$, peut se rendre de l'origine O sur une case x, y de l'échiquier OBDAEC, déterminé en prenant, sur les axes OX et OY , deux points B et C , dont les distances à l'origine soient égales à $n - 1$ pas, et en menant par ces points des parallèles à la diagonale OA .

Désignons respectivement par $H_{x,y}$, $R_{x,y}$ et $Q_{x,y}$ le nombre de

manières dont la tour peut aller du point O sur une case x, y de l'échiquier hexagonal OBDAEC, de l'échiquier pentagonal OBDAY et de l'échiquier carré OXAY. La probabilité P , est égale à $\frac{H_{x,y}}{Q_{x,y}}$.



Il est facile de démontrer ⁽¹⁾ que

$$R_{x,y} = Q_{x,y} - Q_{x-n,y+n}.$$

On a, d'autre part,

$$H_{x,y} = R_{x,y} - R_{y-n,x+n} + R_{x-2n,y+2n} - R_{y-3n,x+3n} + \dots \\ - R_{y-(2h-1)n,x+(2h-1)n} + R_{x-2hn,y+2hn},$$

$(2h-1)n$ et $2hn$ désignant les plus grands multiples de n qui ne rendent pas les indices négatifs.

Par suite on a

$$H_{x,y} = Q_{x,y} - Q_{x-n,y+n} - Q_{y-n,x+n} + Q_{y-2n,x+2n} + \dots \\ - Q_{y-(2h-1)n,x+(2h-1)n} + Q_{x-2hn,y+2hn}$$

ou bien encore

$$H_{x,y} = C_{x+y}^y - C_{x+y}^{x-n} - C_{x+y}^{y-n} + C_{x+y}^{x-2n} + \dots - C_{x+y}^{y-(2h-1)n} + C_{x+y}^{x-2hn},$$

car on sait que $Q_{x,y}$ est égal au nombre des combinaisons de $x+y$ lettres prises x à x ou y à y .

Pour les cases de l'échiquier hexagonal dont les coordonnées satisfont aux relations

$$(a) \quad x+y = \mu-1 = p+q-1, \quad x-y = n-1 = p-q-1,$$

⁽¹⁾ La démonstration est analogue à celle que nous avons donnée pour l'échiquier triangulaire, dans une Note sur l'emploi de l'échiquier pour la solution de problèmes arithmétiques, Note qui a été publiée dans les *Comptes rendus de l'Association française pour l'avancement des Sciences* (Congrès de Nancy, 1886).

on a

$$C_{x+y}^{x-kn} = c_{x+y}^{y-(k-1)n-1};$$

on peut donc écrire

$$H_{x,y} = C_{x+y}^y - C_{x+y}^{y-1} - C_{x+y}^{y-n} + C_{x+y}^{y-n-1} + \dots - C_{x+y}^{y-(2h-1)n} + C_{x+y}^{y-2h-1)n-1}$$

ou bien, en remplaçant x et y par leurs valeurs tirées des relations (a),

$$H_{x,y} = \frac{n}{p} C_{\mu-1}^q - \frac{3n}{p+n} C_{\mu-1}^{q-n} + \dots + (-1)^\lambda \frac{(2\lambda+1)n}{p+\lambda n} C_{\mu-1}^{q-\lambda n},$$

λn étant le plus grand multiple de n contenu dans q .

Par suite,

$$P_1 = \frac{n}{C_{\mu-1}^q} \left[\frac{1}{p} C_{\mu-1}^q - \frac{3}{p+n} C_{\mu-1}^{q-n} + \dots + (-1)^\lambda \frac{(2\lambda+1)}{p+\lambda n} C_{\mu-1}^{q-\lambda n} \right].$$

La probabilité cherchée P est égale au produit $P_1 P_2 P_3$; on a donc

$$P = \frac{n}{2^{\mu-1}} \left[\frac{1}{p} C_{\mu-1}^q - \frac{3}{p+n} C_{\mu-1}^{q-n} + \dots + (-1)^\lambda \frac{(2\lambda+1)}{p+\lambda n} C_{\mu-1}^{q-\lambda n} \right]$$

La valeur de P donnée par M. Rouché se réduit au premier terme de notre formule. Elle correspond donc à la marche de la tour sur l'échiquier pentagonal. Cette marche assure bien la condition que les pertes de l'un des joueurs ne surpassent pas ses gains de plus de $n-1$; mais elle permet à ses gains de surpasser ses pertes d'une quantité plus grande. Cela ne doit pas avoir lieu d'après l'énoncé du problème, car alors l'autre joueur serait décavé. A l'échiquier pentagonal il faut donc substituer l'échiquier hexagonal qui assure que la différence entre les gains et les pertes, abstraction faite du signe, ne dépasse jamais $n-1$. On arrive alors à notre formule.

Il nous paraît probable que M. Rouché n'a pas tenu compte, dans ses calculs, de cette condition que non seulement les pertes d'un joueur ne doivent pas dépasser les gains de plus de $n-1$, mais aussi qu'il doit en être de même pour l'excès de ses gains sur ses pertes.

La valeur assignée à P par M. Rouché correspondrait au cas où l'on permettrait au joueur, qui serait décavé le premier avant la $\mu^{\text{ième}}$ partie, de reconstituer indéfiniment sa mise.

Notre solution présente un des exemples les plus frappants que nous connaissons de l'utilité de l'échiquier pour simplifier la solu-

tion de certains problèmes. L'application de ce procédé nous a permis de trouver, presque sans calculs, la valeur de P, tandis que les méthodes ordinaires ne la fournissaient qu'au moyen de calculs aussi longs que compliqués.

Cette question de la durée du jeu a été traitée par Huygens, Moivre, Laplace, Lagrange, Ampère et par M. Joseph Bertrand sous la forme suivante :

Un joueur expose à un jeu de hasard la n^{ième} partie de sa fortune et renouvelle l'épreuve indéfiniment. Quelle est la probabilité pour qu'il se ruine et que la $(2\mu + n)$ ^{ième} partie jouée lui enlève son dernier écu?

Ce problème est plus simple que celui que nous avons traité. La solution serait donnée immédiatement par la marche de la tour sur l'échiquier pentagonal. La probabilité cherchée serait

$$\frac{\frac{n}{\mu+n} \frac{C_{2\mu+n-1}^{\mu}}{C_{2\mu+n-1}^{\mu}}}{\frac{C_{2\mu+n-1}^{\mu}}{C_{2\mu+n-1}^{\mu}}} \frac{C_{2\mu+n-1}^{\mu}}{2^{2\mu+n-1}} \frac{1}{2} = \frac{n}{\mu+n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2\mu+n} \frac{(2\mu+n-1)!}{\mu! (\mu+n)!}$$

$$= \frac{n}{2\mu+n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2\mu+n} \frac{(2\mu+n)!}{\mu! (\mu+n)!}.$$

Elle est égale au premier terme de notre formule divisé par 2. Il était facile de prévoir qu'il devait en être ainsi, puisque dans ce cas on détermine à l'avance le joueur qui doit être ruiné après la $(2\mu + n)$ ^{ième} partie, et pas avant.

Propositions et questions diverses; par M. E. CATALAN.

(Séance du 18 avril 1888.)

1. *Sur les fonctions* X_n . — Dans mon premier Mémoire sur cette théorie, j'ai démontré la formule

$$(1) \quad X_n = \text{partie réelle de } \frac{2^{n+1}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \varphi (x \cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)^n d\varphi.$$

Tout récemment, je me suis aperçu qu'on peut la remplacer par

celle-ci :

$$(2) \quad X_n = \frac{2^n}{\pi} \int_0^\pi \sin^n \varphi (x \sin \varphi + \sqrt{-1} \cos \varphi)^n d\varphi,$$

laquelle n'est soumise à aucune restriction.

Cette formule (2), beaucoup plus simple que la célèbre formule de Jacobi

$$(3) \quad X_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x - \sqrt{x^2 - 1} \sin \omega)^n d\omega,$$

est-elle *nouvelle*? Je m'adresse pour le savoir à mes confrères de la *Société mathématique*.

2. De la formule (2), on déduit, presque sans calcul, divers résultats, plus ou moins importants, que l'on trouvera dans mon *sixième* (et dernier) *Mémoire sur les fonctions X_n* , imprimé parmi ceux de l'Académie de Belgique.

3. *Quelques théorèmes empiriques*. — Le journal *Mathesis* a publié, en décembre dernier, une Question proposée par M. *Olttramare*. Cette question m'a fait songer au *théorème empirique* suivant :

n étant un nombre entier, soit n_1 la somme des diviseurs de n , inférieurs à n , soit n_2 la somme des diviseurs de n_1 , inférieurs à n_1 ; etc. Cela posé : les nombres $n, n_1, n_2, \dots$ tendent vers une limite λ , laquelle est 1 ou un nombre parfait.

Si cette proposition (vérifiée sur divers exemples) est vraie, elle doit être fort difficile à démontrer.

Dans la *Nouvelle Correspondance mathématique*, j'ai énoncé divers théorèmes empiriques; celui-ci, par exemple :

n étant un nombre entier, la quantité

$$6n^2 + 6n - 3$$

est la somme de trois carrés, entiers et positifs (¹).

(¹) Dans le *Mémoire* intitulé : *Recherche sur quelques produits indéfinis*, j'ai donné, au moyen des séries elliptiques, ce théorème remarquable :

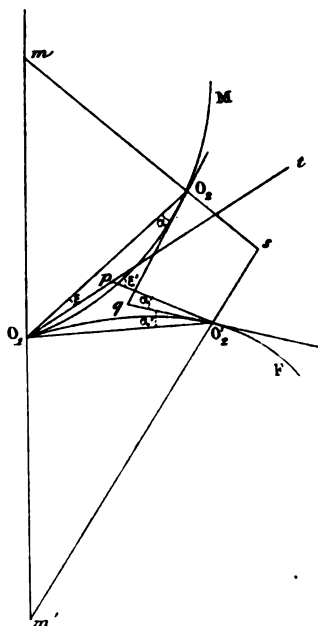
Tout multiple de 8 est la somme de huit carrés impairs.

Il serait intéressant, me semble-t-il, d'en trouver une démonstration élémentaire.

Note sur un théorème de Géométrie cinématique;
par M. J. RÉVEILLE.

(Séance du 7 mars 1888.)

La courbe M roule sur la courbe F en entraînant son plan. Prenons sur M un point O_2 infiniment voisin de O_1 et joignons tous les points d'une conique C passant par les points O_1 et O_2 à ces deux mêmes points; nous avons ainsi deux faisceaux homographiques dont les sommets sont O_1 et O_2 .



Après un déplacement infiniment petit de la courbe M , le point O_2 vient en O'_2 sur la courbe F et devient le centre instantané de rotation. Le faisceau de droites, dont le sommet est en O'_2 , est maintenant l'ensemble des normales aux trajectoires des points de la conique C . Les points de rencontre des droites du faisceau O'_2 et du faisceau O_1 sont alors les centres de courbure des trajectoires décrites par les points de la conique C , et, comme ces fais-

ceaux sont restés homographiques, ces centres de courbure sont sur une conique passant par les points O_1 et O'_2 .

Le faisceau O'_2 est égal au faisceau O_2 ; donc les rayons de ces deux faisceaux, qui sont homologues d'un même rayon du faisceau O_1 , font, avec les tangentes respectives en O_2 et O'_2 aux courbes M et F , des angles égaux.

Soit O_1t la tangente à la conique C au point O_1 ; considérons-la comme un rayon du faisceau O_1 ; le rayon homologue du faisceau O_2 est évidemment O_2O_1 , et, par suite, le rayon homologue du faisceau O'_2 , c'est-à-dire O'_2p , forme, avec la tangente O'_2q , un angle égal à l'angle $\widehat{O_1O_2q}$. Le point p est donc un point de la conique C' .

Appelons

ds la longueur commune des arcs O_1O_2 et $O_1O'_2$ des courbes M , F , C et C' ;

R_m , R_r , R et R' les rayons de courbure de ces courbes au point O_1 ;

α l'angle O_1O_2q ou $\frac{ds}{2R_m}$;

α' l'angle $O_1O'_2q$ ou $\frac{ds}{2R_r}$;

ε l'angle O_2O_1t ou $\frac{ds}{2R}$;

ε' l'angle tpO'_2 ou $\frac{ds}{2R'}$.

Dans le triangle pO'_2O_1 , l'angle O'_2 est égal à $\alpha + \alpha'$, l'angle O_1 est égal à $\alpha + \alpha' - \varepsilon$, et l'on a la relation

$$\varepsilon' = (\alpha + \alpha') + (\alpha + \alpha' - \varepsilon) = 2(\alpha + \alpha') - \varepsilon$$

ou encore

$$(1) \quad \frac{1}{R'} + \frac{1}{R} = 2 \left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_r} \right).$$

Les faisceaux O_2 et O'_2 étant égaux, l'intersection s de deux rayons homologues est sur une circonférence passant par les points O_2 , q et O'_2 ; donc les points m et m' ne peuvent se confondre que sur cette circonférence. A la limite cette circonférence, dont le rayon deviendra nul, passera par les quatre points d'intersection des coniques C et C' , qui auront alors leurs axes parallèles.

La conique C peut être remplacée par un système formé d'une droite quelconque D et de la tangente au point O, à la courbe M. La courbure de la conique, en ce point, est alors nulle, et la relation (1) devient

$$(2) \quad \frac{1}{R'} = 2 \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_r} \right).$$

Si la droite D passe à l'infini dans le plan, la conique C', qui lui correspond, la coupe alors aux points cycliques du plan et devient le cercle I, dont le rayon est donné par la relation (2) et qui contient les centres de courbure des lignes décrites simultanément par les points de l'infini.

On peut donc énoncer le théorème de Rivals :

Le lieu des centres de courbure des trajectoires de tous les points d'une droite D est une conique.

Et l'on peut ajouter :

Les coniques C' correspondant à toutes les droites D du plan ont pour cercle osculateur commun au point O, la circonférence I.

D'ailleurs, les axes de la conique C' sont parallèles aux bissectrices des angles formés par la droite D et la tangente au point O, à la courbe M.

Sur le genre des courbes planes triangulaires; par M. V. JAMET.

(Séance du 21 mars 1888.)

M. Halphen, à qui l'on doit d'importantes recherches sur le genre des courbes planes algébriques, a signalé, dans les Notes qu'il a ajoutées au *Traité des courbes planes* de Salmon, une catégorie de courbes planes dont il est facile de déterminer le genre. Ce sont les courbes définies, en coordonnées polaires, par l'équation

$$(1) \quad r^k = \cos k\theta,$$

où k désigne un nombre commensurable, précédé du signe + ou

du signe —. Ces courbes s'obtiennent en transformant, par voie d'homographie, les courbes que de la Gournerie avait étudiées en 1865-1866, sous le nom de *courbes triangulaires*. Celles-ci sont représentées, en coordonnées homogènes, par l'équation

$$(2) \quad X^h + Y^h + Z^h = 0,$$

h désignant un nombre commensurable, positif ou négatif. Si l'on y fait

$$\begin{aligned} \frac{X}{Z} &= \frac{x+yi}{a} = \frac{r}{a} (\cos \theta + i \sin \theta), \\ \frac{Y}{Z} &= \frac{x-yi}{a} = \frac{r}{a} (\cos \theta - i \sin \theta). \end{aligned}$$

Cette équation devient

$$2r^h \cos k\theta + a^h = 0$$

ou

$$r^{-h} = -\frac{a^{-h}}{2} \cos(-h\theta),$$

et, si l'on suppose $-\frac{a^{-h}}{2} = 1$, $h = -k$, on retrouve l'équation (1).

M. Halphen a montré que le genre des courbes précitées ne dépend que du numérateur de la fraction k ; peut-être n'est-il pas sans intérêt de montrer comment toute courbe triangulaire correspond, point par point, à une autre courbe triangulaire, dépourvue de points multiples, et dont l'exposant est égal au numérateur de l'exposant de la courbe donnée (1).

Soient

$$\frac{X}{Z} = x, \quad \frac{Y}{Z} = y, \quad h = \pm \frac{p}{q};$$

on peut supposer que les lettres p , q désignent des nombres entiers premiers entre eux, et l'équation (2) deviendra

$$(3) \quad x^{\pm \frac{p}{q}} + y^{\pm \frac{p}{q}} + 1 = 0.$$

Posons

$$x = u^{\pm q}, \quad y = v^{\pm p},$$

nous trouverons

$$(4) \quad u^p + v^p + 1 = 0.$$

(1) D'après les dénominations adoptées par de la Gournerie, le nombre h est l'exposant de la courbe (2).

Si, dans cette dernière équation, u, v désignent les coordonnées cartésiennes d'un point, mobile sur une courbe, on voit qu'à chaque point (u, v) pris sur la courbe (4) correspond un point (x, y) de la courbe (3). Je dis que, réciproquement, à chaque point (x, y) de la courbe (3) correspond un point (u, v) de la courbe (4), et un seul; en d'autres termes, que si les variables u, v vérifient l'équation (4), on peut regarder chacune d'elles comme une fonction rationnelle des variables x, y qui entrent dans les formules de transformation.

Supposons d'abord l'exposant de la courbe donnée positif et écrivons l'équation (4) sous la forme

$$-u^p = 1 + v^p,$$

puis élevons les deux membres de cette nouvelle équation à la puissance q ; nous trouvons, en tenant compte des formules de transformation,

$$(-1)^q x^p = 1 + qv^p + \frac{q(q-1)}{1.2} v^{2p} + \dots + qv^{(q-1)p} + y^p.$$

Pour abréger, écrivons cette équation sous la forme

$$(5) \quad A_0 + A_1 v^p + A_2 v^{2p} + \dots + A_{q-1} v^{(q-1)p} = 0.$$

A_0 désigne une fonction entière de x et de y , de degré p ; $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{p-1}$ sont des coefficients numériques. En multipliant le premier membre de cette équation par v^p et tenant compte de la condition $\gamma = v^q$, on trouvera successivement

[illegible]

Les équations (5) et (6) constituent un système de q équations linéaires par rapport aux $q - 1$ paramètres $v^p, v^{2p}, v^{3p}, \dots, v^{(q-1)p}$. Soit Δ le déterminant de tous leurs coefficients; ce polynôme est, par rapport à x, y , de degré pq , et l'équation $\Delta = 0$ n'est autre que l'équation (3), mise sous forme rationnelle; car, d'après de la Gournerie, cette équation doit être du degré pq . Il s'ensuit que, si, dans l'un quelconque des mineurs du premier ordre de Δ , on considère x, y comme les coordonnées d'un point pris au hasard sur la courbe (3), ce mineur n'est pas nul; car, s'il

était toujours nul, il y aurait, entre les coordonnées d'un point pris arbitrairement sur cette courbe, une relation de degré moindre que pq , ce qui est absurde. Donc il est possible de résoudre, par rapport à $v^p, v^{2p}, v^{3p}, \dots, v^{(q-1)p}$, le système des équations (6). On trouve ainsi des fonctions rationnelles de x et de y . Mais, parmi les nombres $p, 2p, 3p, \dots, (q-1)p$, il en est un qui, divisé par q , donne pour reste 1. Soit kp ce nombre, et soit

$$kp = aq + 1.$$

D'après ce qui précède,

$$v^{kp} = f(x, y),$$

f désignant une fonction rationnelle. On en déduit

$$v^{aq+1} = y^a \cdot v = f(x, y),$$

d'où

$$v = \frac{f(x, y)}{y^a},$$

ce qui démontre l'énoncé.

Si l'exposant de la triangulaire considérée est négatif, on observera qu'elle correspond, point par point, à une triangulaire d'exposant égal et de signe contraire, et que celle-ci correspond, point par point, à une courbe telle que la courbe (4).

On voit, en outre, que celle-ci n'a aucun multiple et que, par conséquent, elle est du genre $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$. Donc, enfin, toute triangulaire d'exposant $\pm \frac{p}{q}$ est du genre $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$.

Réductibilité des équations différentielles linéaires;

par M. FABRY.

(Séance du 21 mars 1888.)

Soit une équation différentielle linéaire homogène dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x ,

$$(1) \quad P_0 \frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + P_{m-1} \frac{dy}{dx} + P_m y = 0.$$

Il s'agit de chercher s'il existe une équation d'ordre moindre et de même forme, dont toutes les intégrales vérifient l'équation donnée (1), et de calculer ses coefficients.

Nous exposerons d'abord quelques principes sur lesquels repose la solution de la question. Soit $x = a$ une valeur singulière, une intégrale anormale de l'équation (1) est de la forme

$$(2) \quad (x-a)^r e^{\left[\varphi(x-a)^{-\frac{1}{\nu}}\right]} F[(x-a)^{\frac{1}{\nu}}, \log(x-a), (x-a)].$$

φ étant un polynôme entier en $(x-a)^{-\frac{1}{\nu}}$, ν un nombre entier,

F une fonction entière en $(x-a)^{\frac{1}{\nu}}$ et $\log(x-a)$, dont les coefficients sont des séries ordonnées suivant les puissances entières de $x-a$. Si $\log(x-a)$ entre à la puissance μ , cette intégrale est d'ordre $\mu\nu$, c'est-à-dire que l'on en déduit $\mu\nu$ intégrales distinctes de l'équation (1). Si $\nu = 1$, l'intégrale est normale; si $\varphi = 0$, elle est régulière.

Si l'on cherche les intégrales de forme précédente, on en trouve m distinctes; mais les séries qui y entrent sont, en général, divergentes. Soient $y_1, y_2, \dots, y_m$ ces fonctions mises sous la forme (2). Si l'on forme l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{d^m y}{dx^m} & \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} & \dots & \frac{dy}{dx} & y \\ \frac{d^m y_1}{dx^m} & \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} & \dots & \frac{dy_1}{dx} & y_1 \\ \frac{d^m y_2}{dx^m} & \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} & \dots & \frac{dy_2}{dx} & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^m y_m}{dx^m} & \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} & \dots & \frac{dy_m}{dx} & y_m \end{vmatrix} = 0,$$

les coefficients peuvent se développer sous la forme (2); les logarithmes disparaissent, ainsi que les exposants fractionnaires dans les séries, de sorte que ces coefficients sont de la forme

$$(x-a)^r e^{\left[\varphi\left(\frac{1}{x-a}\right)\right]} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n (x-a)^n.$$

Les séries Σ peuvent être divergentes, mais il est facile d'en calculer un nombre de termes déterminé. Soient $P_0, P_1, \dots, P_m$ ces

coefficients. Si l'on ramène le premier à une valeur P_0 en formant les quantités $P_0 \frac{P'_1}{P_0}, P_0 \frac{P'_2}{P_0}, \dots, P_0 \frac{P'_m}{P_0}$, que l'on ordonne suivant les puissances croissantes de $x - a$, on doit retrouver les mêmes termes que dans les développements de $P_1, P_2, \dots, P_m$. Si l'équation (1) a ses coefficients entiers, les fonctions $P_0, \frac{P'_n}{P_0}$ se réduiront à des polynômes limites, et les termes que l'on pourrait calculer en plus seront identiquement nuls.

Supposons que l'équation (1) admette toutes les intégrales d'une équation de même forme

$$(3) \quad q_0 \frac{d^n y}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + q_{n-1} \frac{dy}{dx} + q_n y = 0.$$

Si l'on remplace dans (1) $\frac{d^n y}{dx^n}$ et les dérivées suivantes de y par les valeurs déduites de (3), on doit trouver une identité. Les intégrales de forme (2) que l'on obtient pour l'équation (3) vérifient identiquement l'équation (1), même lorsque les séries sont divergentes; donc les n intégrales anormales de l'équation (3) sont comprises parmi les m qu'on obtient pour l'équation (1).

Connaissant l'équation (1) et l'ordre $n < m$, nous allons chercher dans quel cas l'équation (3) existe et comment on peut calculer ses coefficients. On peut toujours supposer $q_0 = 0, q_1, q_2, \dots, q_n$ étant des fractions rationnelles que l'on peut décomposer en fractions simples. Ainsi

$$q_1 = \frac{A_v}{(x-a)^v} + \frac{A_{v-1}}{(x-a)^{v-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{B_{v'}}{(x-b)^{v'}} + \dots \\ + \frac{B_v}{x-b} + \dots + C_0 + C_1 x + \dots + C_\mu x^\mu + \frac{\lambda}{x-a} + \frac{\lambda'}{x-a'} + \dots$$

$a, b, \dots$ sont les valeurs singulières de x dans l'équation (1); $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ sont des valeurs d'apparence singulière pour (3) qui ne sont pas singulières dans l'équation (1), de sorte que l'équation déterminante de (3), pour $x = \alpha$,

$$\rho(\rho-1)\dots(\rho-n+1) + \lambda \rho(\rho-1)\dots(\rho-n+2) + \dots = 0,$$

a n racines entières différentes et inférieures à m . Il en résulte que λ est un nombre entier négatif, compris entre -1 et $-n(m-n)$.

Pour $x = a$, on calculera les intégrales anormales de l'équation (1) et l'on en choisira n qui doivent vérifier l'équation (3), en remarquant que, si l'on prend une intégrale de forme (2), on doit prendre en même temps celles qui s'en déduisent.

Soit

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} & \dots & \frac{dy_1}{dx} & y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} & \dots & \frac{dy_n}{dx} & y_n \end{vmatrix} = e^{\Sigma \varphi} (x-a)^{A_1} F;$$

$\Sigma \varphi$ est un polynôme entier en $\frac{1}{x-a}$, F une série dont le premier terme n'est pas nul, mais qu'il est inutile de calculer; l'exposant A_1 diffère de Σr d'un nombre entier que l'on peut calculer facilement. Pour que ces n intégrales vérifient l'équation (3), il faudra

$$q_1 = -\frac{\Delta'}{\Delta} = -\Sigma \varphi' - \frac{A_1}{x-a} - \frac{F'}{F},$$

ce qui détermine dans q_1 les termes à exposants négatifs en $x-a$.

En général, les m intégrales anormales de l'équation (1) peuvent se grouper n à n d'un nombre limité de manières, et l'on en déduit les valeurs possibles pour les termes en $\frac{1}{x-a}$ dans q_1 . Cependant, si, parmi les m intégrales anormales de l'équation (1), on en trouve deux ayant le même facteur $(x-a)^r e^{\int [(x-a)^{-\frac{1}{2}}]}$ et qui ne se déduisent pas de la même intégrale, il faudra, dans certains des groupes de n intégrales, laisser des constantes arbitraires pour obtenir tous les groupes possibles. On pourra toujours former un nombre limité de valeurs de Δ , dans lesquelles $\Sigma \varphi$ sera complètement déterminé; A_1 sera en général déterminé et F sera une série contenant un nombre fini de constantes arbitraires; si, pour certaines valeurs des constantes, les premiers termes de F disparaissent, l'exposant A_1 sera augmenté d'un nombre entier, mais dans tous les cas on aura, pour $\Sigma \varphi$ et A_1 , un nombre limité de valeurs possibles. Dans le coefficient q_1 , on pourra donc calculer les systèmes de valeurs possibles pour les coefficients $A_v, A_{v-1}, \dots, A_1, B_v, \dots, B_1, \dots$ correspondant à chaque valeur singulière de $x, a, b, \dots$

De même, pour la valeur singulière $x = \infty$, on cherchera les

intégrales régulières, normales et anormales de l'équation (1) sous la forme

$$\left(\frac{1}{x}\right)^r e^{\varphi\left(x^{\frac{1}{v}}\right)} F\left(x^{-\frac{1}{v}}, \log x, x^{-1}\right).$$

On formera les groupes possibles de ces intégrales n à n et, pour chaque groupe, le déterminant

$$\Delta = \left(\frac{1}{x}\right)^K e^{\Sigma \varphi} F\left(\frac{1}{x}\right).$$

En ordonnant q_1 suivant les puissances décroissantes de x , on doit avoir

$$\begin{aligned} C_\mu x^\mu + \dots + C_1 x + C_0 + \sum \frac{\lambda}{x} \left[1 + \left(\frac{x}{x}\right)^2 + \dots \right] + \sum \frac{A_1}{x} \left(1 + \frac{\alpha}{x} + \dots \right) + \dots \\ = -\frac{\Delta'}{\Delta} = -\Sigma \varphi' + \frac{K}{x} - \frac{F'}{F}, \end{aligned}$$

d'où

$$C_\mu x^\mu + \dots + C_1 x + C_0 = -\Sigma \varphi', \quad \Sigma \lambda = -\Sigma A_1 + K;$$

or $\lambda, \lambda', \dots$ doivent être des nombres entiers négatifs.

On devra donc chercher, parmi les valeurs possibles de $A_1, B_1, \dots, K$, s'il existe un système tel que $+\Sigma A_1 - K$ soit un nombre entier. Pour connaître q_1 , il ne reste qu'à déterminer $\lambda, \lambda', \dots$ et $\alpha, \alpha', \dots$; pour $x = \infty$, on développera le déterminant Δ et la série $F\left(\frac{1}{x}\right)$; on doit avoir l'identité

$$\begin{aligned} q_1 = \frac{A_v}{(x-\alpha)^v} + \dots + \frac{A_1}{x-\alpha} + \dots + C_0 + C_1 x + \dots + C_\mu x^\mu + \sum \frac{\lambda}{x-\alpha} \\ = -\frac{\Delta'}{\Delta} = -\Sigma \varphi' + \frac{K}{x} - \frac{F'}{F}. \end{aligned}$$

F est en général une série divergente; mais cette égalité indique que, si l'on développe les deux membres suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$, les coefficients sont identiques. Cette condition est équivalente à la suivante :

$$-\sum \frac{\lambda}{x-\alpha} = \frac{A_v}{(x-\alpha)^v} + \dots + \frac{A_1}{x-\alpha} + \dots - \frac{K}{x} + \frac{F'}{F}$$

ou

$$\begin{aligned} & (x - \alpha)^{-\lambda} (x - \alpha')^{-\lambda'} \dots \\ &= \frac{(x - \alpha)^{A_1} (x - b)^{B_1} \dots x^{-K}}{F} F e^{-\frac{A_1}{(v+1)(x-\alpha)^{v+1}} - \dots - \frac{A_s}{x-\alpha} \dots} \\ &= x^{-\Sigma \lambda} \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{x}\right)^{A_1} \left(1 - \frac{b}{x}\right)^{A_2} \dots}{F} e^{-\frac{A_1}{(v+1)(x-\alpha)^{v+1}} - \dots - \frac{A_s}{x-\alpha} \dots} \end{aligned}$$

— $\Sigma \lambda$ est un nombre entier positif; on calculera dans la série F un nombre de termes supérieur, et l'on développera le second membre suivant les puissances de $\frac{1}{x}$; on devra trouver un polynôme entier qui est égal à $(x - \alpha)^{-\lambda} (x - \alpha')^{-\lambda'} \dots$; si l'on calcule d'autres termes en $\frac{1}{x}$, ils doivent être identiquement nuls.

Remarques. — Dans le cas particulier où la valeur $x = \infty$ n'est pas singulière pour l'équation (1), K sera un nombre entier compris entre $n(n-1)$ et $n(m-1)$; on pourra toujours développer les n intégrales et F en y laissant des constantes arbitraires, et, en exprimant que $(x - \alpha)^{-\lambda} (x - \alpha')^{-\lambda'} \dots$ se réduit à un polynôme entier, on aura, en général, des équations qui détermineront les constantes.

Dans l'équation (3), on connaîtra ainsi le coefficient q_1 , et les développements des n intégrales anormales pour chacune des valeurs singulières $a, b, \dots, \infty$. On se servira de ces développements pour calculer dans les coefficients $q_2, \dots, q_n$ les termes ayant des puissances négatives de $x - a, x - b, \dots$, et de la valeur $x = \infty$ on déduit les termes entiers en x .

Ainsi

$$\begin{aligned} q_2 = & \frac{A'_v}{(x - \alpha)^v} + \dots + \frac{A'_1}{x - \alpha} + \frac{B'_v}{(x - b)^v} + \dots + \frac{B'_1}{x - b} + \dots \\ & + C'_0 + C'_1 x + \dots + C'_\mu x^\mu + \frac{L}{(x - \alpha)^2} + \frac{M}{x - \alpha} + \frac{L'}{(x - \alpha')^2} + \frac{M'}{x - \alpha'} + \dots, \end{aligned}$$

où il ne reste d'inconnus que $LL' \dots, MM' \dots$. Mais, pour la valeur $x = \infty$, on peut développer les n intégrales anormales et, par suite, le coefficient q_2 ; on en déduira le développement de

$$\sum \frac{L}{(x - \alpha)^2} + \sum \frac{M}{x - \alpha},$$

et il suffit de calculer un nombre de termes égal à deux fois le nombre des valeurs $\alpha, \alpha', \dots$ pour en déduire les coefficients L, M.

La même méthode permet de calculer tous les coefficients de l'équation (3); il faudra ensuite vérifier si l'équation donnée (1) est une conséquence de (3).

Application. — Soit l'équation

$$(4) \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^m y}{dx^m} + (A_1 x + A'_1) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + (A_2 x^2 + A'_2 x + A''_2) \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots \\ & + y(A_m x^m - A'_m x^{m-1} + A''_m x^{m-2} + \dots) = 0, \end{aligned} \right.$$

qui n'a que la valeur singulière $x = \infty$, pour laquelle on trouve m intégrales de forme normale

$$y = e^{B \frac{x^2}{2} + Cx} x^{-\rho} \left[1 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \dots \right],$$

où B est racine de l'équation

$$B^m + A_1 B^{m-1} + \dots + A_m = \varphi(B) = 0,$$

$$C = - \frac{A'_1 B^{m-1} + A'_2 B^{m-2} + \dots + A'_m}{\varphi'(B)},$$

$$\rho = \frac{B + C^2}{2} \times \frac{\varphi''(B)}{\varphi'(B)} + \frac{C[(m-1)A'_1 B^{m-2} + (m-2)A'_2 B^{m-3} + \dots + A'_{m-1}] + A''_1 B^{m-2} + \dots + A''_m}{\varphi'(B)}.$$

Pour que l'équation donnée soit réductible au premier ordre, il faut que, parmi les m valeurs de ρ , il y en ait une entière négative; il devra, en outre, exister $m - 2$ relations entre les coefficients A, que l'on obtient en posant $y = e^{B \frac{x^2}{2} + Cx} Z$ et en exprimant que l'équation en Z admet pour intégrale un polynôme de degré $-\rho$.

Par exemple, si $m = 2$, pour que l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (A_1 x + A'_1) \frac{dy}{dx} + (A_2 x^2 + A'_2 x + A''_2) y = 0$$

soit réductible, il faut que

$$\frac{1}{\sqrt{A_1^2 - 4A_2}} \left[A_2 - \frac{A_1^2}{2} - \frac{A_1'^2}{4} + \frac{(A_1 A'_1 - 2A'_2)^2}{4(A_1^2 - 4A_2)} \right] = n + \frac{1}{2},$$

n étant un nombre entier positif ou négatif, et cette condition est suffisante.

On peut simplifier, dans bien des cas, les calculs, en remarquant que, pour qu'une équation soit réductible à l'ordre n , il faut que l'équation adjointe soit réductible à l'ordre $m - n$.

Ainsi l'équation (4) a pour adjointe

$$\frac{d^m y}{dx^m} - \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (A_1 x + A'_1) y + \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} (A_2 x^2 + A'_2 x + A''_2) y + \dots = 0,$$

dont les intégrales normales, pour $x = \infty$, seront de la forme

$$e^{-\frac{Bx^2}{2} - C} x^{-\rho'} \left[1 + \frac{C_1}{x} + \dots \right],$$

B et C ayant les valeurs précédentes et $\rho' = m - 1 - \rho$.

Ainsi, pour que l'équation (4) soit réductible à l'ordre $m - 1$, il faut que ρ' ait une valeur entière négative, c'est-à-dire que, parmi les m valeurs de ρ , il y en ait une entière supérieure à $m - 2$; il doit en outre exister $m - 2$ relations entre les coefficients A.

Par exemple, pour chercher si l'équation du troisième ordre

$$\begin{aligned} \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} (A_1 x + A'_1) + \frac{dy}{dx} (A_2 x^2 + A'_2 x + A''_2) \\ + y (A_3 x^3 + A'_3 x^2 + A''_3 x + A'''_3) = 0 \end{aligned}$$

est réductible, on formera les équations

$$\begin{aligned} B^3 + A_1 B^2 + A_2 B + A_3 &= 0, \\ C &= -\frac{A'_1 B^2 + A'_2 B + A'_3}{3B^2 + 2A_1 B + A_2}, \\ \rho &= \frac{(B + C^2)(3B + A_1) + C(2A'_1 B + A'_2) + A''_2 B + A'''_3}{3B^2 + 2A_1 B + A_2}. \end{aligned}$$

On a trois valeurs pour ρ ; pour que l'équation donnée soit réductible, il faut que l'une de ces trois valeurs soit entière (positive ou négative), mais différente de 1; en outre, il doit exister une relation entre les coefficients A.

Au sujet du développement de $\cot z$ en série de fractions;
par M. DE PRESLE.

(Séance du 18 avril 1888.)

L'application du théorème de M. Mittag-Leffler donne

$$\cot z = G(z) + \frac{1}{z} + \sum \frac{z}{n\pi(z - n\pi)},$$

$$n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$

$G(z)$ étant une fonction holomorphe de z , dont la détermination est le but de la présente Note.

Nous avons

$$G(z) = \cot z - \frac{1}{z} - \sum \frac{z}{n\pi(z - n\pi)}.$$

Proposons-nous de démontrer que $G(z)$ ne tend vers l'infini pour aucune valeur de z dont le module tende vers l'infini.

1° Remplaçons z par $x + yi$, en supposant que y ne soit pas nul,

$$G(x + yi) = \frac{\cot x \cot(yi) - 1}{\cot x + \cot(yi)} - \frac{1}{x + yi} - \sum \frac{x + yi}{n\pi(x + yi - n\pi)}.$$

Le premier terme du second membre ne tend jamais vers l'infini; en effet, si y tend vers l'infini, $\cot(yi)$ tend vers i , d'ailleurs, $\cot(yi)$ ne tend vers l'infini que si y tend vers zéro, et, si $\cot x$ tend vers l'infini, la limite de ce terme est $\cot(yi)$.

Le second terme du second membre ne tend jamais vers l'infini.

La somme qui constitue le troisième terme du second membre ne tend jamais vers l'infini, car les dénominateurs ne contiennent, comme facteur, aucune discontinuité de la fonction.

2° Il ne nous reste donc qu'à considérer le cas de y nul; on a

$$G(x) = \cot x - \frac{1}{x} - \sum \frac{x}{n\pi(x - n\pi)}.$$

Le premier terme du second membre tend vers l'infini pour toutes les valeurs de x tendant vers $m\pi$, m étant un nombre entier, positif ou négatif, et pour celles-ci seulement.

Le second terme est fini pour toutes les valeurs de x ne tendant pas vers zéro.

La somme qui constitue le troisième terme ne tend vers l'infini que pour les valeurs de x tendant vers $m\pi$; et, même pour ces valeurs, cette somme est finie, abstraction faite du terme correspondant à la discontinuité. Pour ce terme, remplaçons x par $x' + m\pi$ et considérons la différence

$$\cot(x' + m\pi) - \frac{x' + m\pi}{m\pi x'}.$$

Nous pouvons écrire cette différence

$$\cot x' - \frac{1}{x'} - \frac{1}{m\pi}.$$

Si x' tend vers zéro et m vers l'infini, cette différence tend vers zéro.

3° Ainsi $G(z)$ ne tend vers l'infini pour aucune valeur de z dont le module tend vers l'infini et, par suite, est une constante.

4° Cette constante est nulle, car pour des valeurs de x égales et de signe contraire, $G(x)$ doit avoir des valeurs égales et de signe contraire : donc

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum \frac{z}{n\pi(z - n\pi)},$$

$$n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Note sur le procédé le plus simple de calcul des nombres de Bernoulli; par M. WILLIOT.

(Séance du 6 juin 1888.)

De nombreuses méthodes ont été proposées pour simplifier, autant que possible, le calcul des nombres de Bernoulli; mais il ne semble pas que l'on ait tiré un parti suffisant des remarquables formules de Seidel, généralisées par M. Stern.

M. E. Catalan, en démontrant le théorème de Staudt et Clausen, a signalé comme avantageux (1) l'emploi des nombres entiers

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, T. IV (mars 1886).

$$\left(\frac{n}{1} + \frac{n+1}{1}\right) B_{2n} + [n_3 + (n+1)_3] B_{2n-2} + [n_5 + (n+1)_5] B_{2n-4} + \dots \left\{ \begin{matrix} B_n \\ [1 + (n+1)] B_{n+1} \end{matrix} \right. = 0,$$

selon que n est pair ou impair.

Or on a, identiquement,

$$n_p + (n+1)_p = (n+1)_p \times \frac{2n - p + 2}{n+1}.$$

On peut donc écrire, en faisant (')

$$Q_{2n} = (2n + 1)B_{2n},$$

$$\left(\frac{n+1}{n+1}\right)_1 Q_{2n} + \left(\frac{n+1}{n+1}\right)_2 Q_{2n-2} + \left(\frac{n+1}{n+1}\right)_3 Q_{2n-4} + \dots + \left\{ \frac{1}{\frac{n+1}{n+1}} Q_n \right\} = 0,$$

selon que n est pair ou impair. On supprimera le dénominateur commun $(n + 1)$, et l'on pourra, en remarquant que les Q d'indice impair sont nuls, écrire symboliquement

$$Q^n(1 + Q)^{n+1} = 0.$$

En admettant $Q_0 = 1$, $Q_1 = -1$, on peut développer en déterminant cette formule et poser

$$(2n+1)B_{2n} = Q_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)}$$

[illegible]

(¹) Euler a rencontré la série de ces nombres Q_n dans la sommation de la série

$$\frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \dots = \frac{2^{2n-1} n^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2^n + 1)} Q_{2^n}.$$

La formation de ce déterminant avec les coefficients binomiaux est des plus simples.

Cette simplification est d'ailleurs naturelle, étant donné que, suivant la loi de MM. Standt et Clausen, le dénominateur de B_{2n} ne doit contenir aucun facteur premier compris entre $(n+1)$ et $(2n+1)$.

Le desideratum serait de faire sortir du déterminant tous les facteurs non premiers compris entre 1 et $(2n+1)$; multiplions, par les facteurs non premiers

$$\begin{array}{cccccccccccc} 9, & 15, & 21, & 27, & 33, & 39, & 45, & 51, & 57, & & & \\ & & & 25, & & 35, & & & 55, & & & \\ & & & & & & & & 49, & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

les colonnes dont le dernier chiffre est l'unité et correspond au même nombre à l'extrémité de la ligne. Nous pourrons alors diviser respectivement les lignes par 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, et faire sortir des déterminants tous les nombres non premiers qui figurent au dénominateur

$${}_{n+1}B_{2n} = Q_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot \dots} \begin{vmatrix} 1 & 1 & " & " & " & " & " & " & " & " & " & \dots \\ 1 & 10 & 45 & " & " & " & " & " & " & " & " & \dots \\ " & 1 & 30 & 1 & " & " & " & " & " & " & " & \dots \\ " & 1 & 189 & 35 & 7 & " & " & " & " & " & " & \dots \\ " & " & 9 & 7 & 7 & 15 & " & " & " & " & " & \dots \\ " & " & 1 & 4 & 14 & 140 & 1 & " & " & " & " & \dots \\ " & " & " & 1 & 12 & 378 & 12 & 1 & " & " & " & \dots \\ " & " & " & 1 & 55 & 4950 & 462 & 165 & 231 & " & " & \dots \\ " & " & " & " & 1 & 275 & 66 & 66 & 385 & 1 & " & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{vmatrix}$$

Nous ne conservons ainsi au dénominateur que les nombres premiers compris entre 1 et $(n+1)$. Mais nous avons à faire disparaître, par la réduction, les facteurs 9, 15, 21, 27, ... que nous avons introduits, et nous profiterons naturellement pour cette élimination de ce que ces facteurs de la forme $(2n+1)$ doivent diviser les déterminants suivant la loi de MM. Standt et Clausen.

La réduction de ces déterminants ne présente d'ailleurs aucune difficulté. Elle conduit aux formes suivantes, dans lesquelles le dénominateur comprend les nombres premiers de 2 à $(n+1)$ et le nombre $(2n+1)$ s'il est premier.

1° De $n = 5$ à $n = 8$:

$$B_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)2.3.5} \begin{vmatrix} 5.5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -691 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 7.5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3617 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} n=5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

2° De $n = 9$ à $n = 14$:

$$B_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)2.3.5.7.11.13} \begin{vmatrix} 5.5.7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -691 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7.5.7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3617.7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 43867.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -174611.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 854513.5.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -236364091 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 8553103.5.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -23749461029.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} n=9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{matrix}$$

On trouve ainsi

$$B_{22} = \frac{854513.5.7.11}{2.3.5.7.11.23} = \frac{854513}{2.3.23},$$

$$B_{24} = -\frac{23749461029.7.11.13}{2.3.5.7.11.13.29} = -\frac{23749461029}{2.3.5.29},$$

3° De $n = 15$ à $n = 17$.

$$B_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)2.3.5.7.11.13.17} \begin{vmatrix} -3617.7.11 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 43867.5.11 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -174611.7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 854513.5.7.11 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -236364091.11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8553103.5.7.11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -23749461029.7.11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8615841276005.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7709321041217.7.11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} n=15 \\ n=16 \end{matrix}$$

$$B_{32} = -\frac{7709321041217.7.11.13}{2.3.5.7.11.13.17} = -\frac{7709321041217}{2.3.5.17}.$$

Le calcul ne comprend que des multiplications et des additions, et s'effectue aussi rapidement que le permet l'importance des nombres en question.

On trouve ainsi une confirmation de la loi de MM. Standt et Clausen. Nous avons indiqué ici une réduction successive; mais

on pourrait également calculer directement un déterminant quelconque, c'est-à-dire un nombre quelconque de Bernoulli.

Nous sommes d'ailleurs arrivé à ces déterminants en réduisant l'expression immédiate du coefficient de la formule d'Euler

$$\Delta F(x) = hF'(x) + A_1 \Delta F'(x) \frac{h}{1} \\ + A_2 \Delta F''(x) \frac{h^2}{2} + A_3 \Delta F'''(x) \frac{h^3}{3} - \dots + A_m \Delta F^m(x) \frac{h^m}{m} + \dots$$

qui est

$$m = \frac{B_m}{1.2 \dots m} = (-1)^{m-1} \begin{vmatrix} \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{1.2.3} & \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{1.2.3.4} & \frac{1}{1.2.3} & \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & \dots & 0 \\ \frac{1}{1.2.3.4.5} & \frac{1}{1.2.3.4} & \frac{1}{1.2.3} & \frac{1}{1.2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{1.2 \dots m} & \frac{1}{1.2 \dots (m-1)} & \frac{1}{1.2 \dots (m-2)} & \frac{1}{1.2 \dots (m-3)} & \dots & \frac{1}{1} \\ \frac{1}{1.2 \dots (m+1)} & \frac{1}{1.2 \dots m} & \frac{1}{1.2 \dots (m-1)} & \frac{1}{1.2 \dots (m-2)} & \dots & \frac{1}{1.2} \end{vmatrix}$$

déterminant symétrique formé avec les $(m+1)$ premières fonctions $\frac{1}{\Gamma(P)}$.

Nous ne donnons pas ces calculs, un peu étendus, qui ne font que conduire à la formule de Seidel.

Observations de M. Rouché en réponse à une Note de M. DELANNOY (1).

Je n'ai commis aucune erreur de principe. Mon travail se compose de deux parties distinctes : dans la première, j'ai donné la solution *exacte* du problème sous forme trigonométrique ; dans la seconde, tout à fait étrangère au Calcul des probabilités, j'ai

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XVI, p. 124.

cherché à mettre la solution sous forme algébrique; le raisonnement est juste, mais à la dernière ligne j'ai fait une faute de calcul en effectuant la division finale: voilà tout.

Quant à la longueur du calcul, c'est affaire d'appréciation. D'aucuns préféreront sans doute avec moi l'emploi des théories classiques des fonctions symétriques et des déterminants à celui de l'échiquier pentagonal ou hexagonal, dont je ne méconnais pas d'ailleurs l'utilité.

Remarques arithmétiques sur les nombres composés;

par M. C.-A. LAISANT.

(Séance du 6 juin 1888.)

Décomposition des nombres en facteurs.

1. Si un nombre N , décomposé en ses facteurs premiers, est égal à

$$\alpha^2 b^3 c^4 \dots l^k,$$

on sait que le nombre de ses diviseurs, $D(N)$, est

$$(1) \quad (1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma) \dots (1 + \lambda),$$

le nombre N lui-même et l'unité étant considérés comme diviseurs.

Cette formule (1) donne évidemment le nombre de façons dont le nombre N peut être décomposé en deux facteurs (parmi lesquels N et l'unité peuvent figurer) lorsque l'on considère comme différentes les deux décompositions des formes PQ et QP . Soit $n_2(N) = D(N)$ ce nombre.

2. Cherchons maintenant de combien de manières le nombre N peut être décomposé en trois facteurs, en regardant toujours comme décompositions différentes celles qui diffèrent par l'ordre des facteurs, et en admettant l'unité parmi les facteurs possibles.

Pour y arriver, nous remarquerons que, si nous prenons comme premier facteur un diviseur quelconque δ , et si $N = \delta\delta'$, nous aurons un nombre de décompositions correspondantes égal à celui

$$1 \cdot 1 + (1+1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) + (1+2) \left(1 + \frac{2}{2}\right) + \dots + (1+\alpha) \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \\ = (1+\alpha) \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right),$$

puis

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \left(1 + \frac{\beta}{3}\right), \\ & \dots\dots\dots \\ & (1 + \lambda) \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \left(1 + \frac{\lambda}{3}\right), \end{aligned}$$

et le nombre $n_1(N)$ cherché sera

$$(4) \quad n_1(N) = n_2(N) \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \left(1 + \frac{\beta}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{\lambda}{3}\right).$$

Une méthode toute pareille nous conduirait à la formule générale

$$(5) \quad n_k(N) = n_{k-1}(N) \left(1 + \frac{\alpha}{k-1}\right) \left(1 + \frac{\beta}{k-1}\right) \dots \left(1 + \frac{\lambda}{k-1}\right)$$

ou

$$(5') \quad n_k(N) = (1 + \alpha) \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{\alpha}{k-1}\right) \times \dots \times (1 + \lambda) \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{\lambda}{k-1}\right),$$

indiquant le nombre de manières de décomposer N en k facteurs.

Figuration des nombres composés.

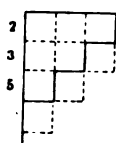
3. A ces remarques sur les décompositions des nombres en facteurs, nous croyons devoir en ajouter une sur un mode de figuration fort simple et qui n'a cependant pas été signalé jusqu'ici, du moins à notre connaissance. Il y aurait peut-être lieu d'en tirer parti pour l'enseignement des premiers principes élémentaires relatifs à la décomposition des nombres en facteurs premiers, à la formation du plus grand commun diviseur et à celle du plus petit commun multiple de deux ou plusieurs nombres.

Voici en quoi consiste cette figuration. Supposons que, un quadrillage indéfini étant tracé à la droite d'une ligne verticale, nous numérotions les bandes horizontales successives 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ..., en les affectant aux nombres premiers successifs. Si un nombre composé contient un facteur premier α à l'exposant α , on comptera α cases, à partir de la droite verticale, dans la bande qui représente le facteur α . L'ensemble de toutes les cases ainsi déterminées, et que l'on pourra limiter par le tracé du contour extérieur, figurera le nombre en question. Il est évident que ce

tracé peut suivre parfois la ligne verticale origine, lorsque certains facteurs premiers font défaut. c'est-à-dire ont l'exposant zéro.

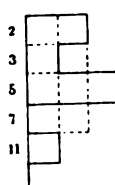
Nous nous bornons à donner comme exemple la figuration des deux nombres $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ et $16500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11$ (*fig. 1 et 2*).

Fig. 1.



$N = 360.$

Fig. 2.

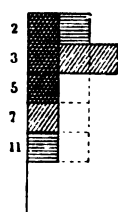


$N = 16500.$

Ce mode de représentation met en relief d'une façon saisissante la formation des diviseurs, ou, ce qui revient au même, la décomposition en deux facteurs, dont nous avons parlé ci-dessus. Le nombre des diviseurs est évidemment égal au nombre des chemins différents qu'on peut suivre pour aller de la base inférieure à la base supérieure de la figure formée, en suivant toujours les lignes du quadrillage.

Le plus grand commun diviseur de deux nombres se trouve représenté par la partie commune des figures qui représentent ces deux nombres; le plus petit commun multiple, par la figure limitée au contour extérieur dessinée par l'ensemble des deux figures. Nous donnons comme exemple (*fig. 3*) le plus grand commun divi-

Fig. 3.



$N = 1890 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7,$

$N' = 660 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11,$

$D = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$

$p = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 41580.$

seur D des deux nombres 1890 et 660, et leur plus petit commun

multiple p , en figurant les deux nombres au moyen de hachures obliques ou horizontales.

On comprend qu'en représentant par diverses valeurs plusieurs nombres, on peut ainsi figurer leurs diviseurs ou leurs multiples, soit d'ensemble, soit deux à deux. Par exemple, si trois nombres A, B, C sont figurés :

A en rouge,
B en bleu,
C en jaune,

les plus grands communs diviseurs seront figurés :

celui de A et B par la partie violette,
» de B et C » verte,
» de A et C » orangée.

Un assez grand nombre de propriétés connues peuvent avec cette figuration prendre un caractère intuitif. Il suffit pour cela de remarquer que, lorsqu'un nombre A est multiple d'un autre nombre B, le contour de figuration de A contient le contour de figuration de B, et aussi que, lorsque plusieurs nombres sont premiers entre eux deux à deux, les figurations de deux quelconques de ces nombres n'ont aucune partie commune.

4. Au fond, ce mode de figuration est en quelque sorte un système de numération dans lequel l'ordre d'un chiffre, à partir de la gauche par exemple, représenterait le rang d'un nombre premier, et le chiffre lui-même représenterait l'exposant. Ainsi, dans les exemples cités plus haut, les divers nombres s'écriraient comme suit :

360	321
16500	21301
1890	1311
660	21101
30	111
41580	23111

Le produit de deux nombres, dans ce système, s'obtiendrait par l'addition des chiffres de même rang (et il est bien entendu qu'ici nous désignons par le mot *chiffres* des nombres qui peuvent devenir aussi grands qu'on voudra).

La formation du plus petit commun multiple ou du plus grand

commun diviseur est évidente; et il apparaît non moins clairement, par exemple, que le produit de deux nombres est égal au produit de leur plus petit commun multiple par leur plus grand commun diviseur.

Tout nombre représenté par l'unité précédée d'un nombre quelconque de zéros est un nombre premier, et réciproquement.

Tout nombre dont les chiffres sont pairs est un carré.

Nous croyons devoir borner là ces observations, trop simples pour mériter d'être plus complètement développées.

Sur une propriété des systèmes de courbes algébriques;
par M. WEILL.

(Séance du 6 juin 1888.)

Si l'on considère deux courbes algébriques dont aucune ne présente d'asymptotes multiples, on sait, d'après la théorie de l'élimination, que, pour calculer les coordonnées du centre des moyennes distances de leurs points communs, on peut remplacer chacune de ces courbes par le système de ses asymptotes. Ceci posé, considérons une courbe fixe de degré m que nous réduirons à ses m asymptotes

$$\begin{aligned} y - c_1 x - d_1 &= 0, \\ y - c_2 x - d_2 &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ y - c_m x - d_m &= 0, \end{aligned}$$

et un système de courbes de degré p dont l'équation contient un paramètre variable λ au degré k ; l'équation d'une pareille courbe peut s'écrire

$$\lambda^k S_1 + \lambda^{k-1} S_2 + \dots = 0,$$

$S_1, S_2, \dots$ étant les premiers membres d'équations de courbes quelconques de degré p . Soient $x_1, x_2, \dots$ les abscisses des points de rencontre de cette courbe et de la droite

$$y - c_1 x - d_1 = 0,$$

on aura

$$x_1 + x_2 + \dots + x_p = \frac{f(\lambda)}{\varphi(\lambda)},$$

f et φ désignant des polynômes du degré k en λ , comme un calcul facile le montre. Dès lors, l'abscisse X du centre des moyennes distances des points communs à la courbe variable et à la courbe fixe a pour expression

$$X = \sum \frac{f(\lambda)}{\varphi(\lambda)}.$$

de même

$$Y = \sum \frac{f_1(\lambda)}{\varphi(\lambda)}.$$

D'ailleurs aux k racines de l'équation en λ , $\varphi(\lambda) = 0$, correspond pour le lieu une direction asymptotique multiple d'ordre k , qui n'est autre que la direction de coefficient angulaire c_1 . On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le centre des moyennes distances des points communs à une courbe fixe de degré m et à une courbe variable de degré quelconque, dont l'équation contient un paramètre variable au degré k , décrit une courbe unicursale de degré mk , qui a pour directions asymptotiques multiples d'ordre k les directions asymptotiques de la courbe fixe.*

J'ai déjà énoncé ce théorème, mais dans le cas particulier où la courbe fixe est unicursale (*Bulletin de la Société mathématique*, t. X, p. 137).

Les conséquences de ce théorème général sont nombreuses.

Dérivées successives d'une puissance entière d'une fonction d'une variable, dérivées successives d'une fonction de fonction et application à la détermination des nombres de Bernoulli; par M. DE PRESLE (1).

(Séance du 4 juillet 1888.)

1. *Rappel de la formule donnant les dérivées successives d'un produit de fonctions d'une variable.* — Soient $a, b, c, \dots, k$ n fonctions d'une variable x ; on a, d'après une formule connue,

$$(1) \quad D_{m^x}(a.b.c\dots k) = \Sigma d.e\dots g \cdot \frac{m!}{p!q!\dots t!} D_{p^x}a D_{q^x}b \dots D_{t^x}k;$$

dans cette formule

$$p + q + \dots + t = m;$$

$d, e, \dots, g$ sont les fonctions dont les dérivées ne figurent pas dans le terme considéré.

2. *Dérivées successives d'une puissance entière d'une fonction d'une variable.* — Supposons les fonctions $a, b, c, \dots, k$ identiques entre elles. Soit u leur valeur commune : nous aurons

$$D_{m^x}u^n = \Sigma j \frac{m!}{\Pi (h^l)^j} u^{n-\Sigma l} \Pi D_{h^x}u;$$

dans cette formule

$$\Sigma h.l = m, \quad \Sigma l = 1, 2, \dots, n,$$

j est un coefficient qu'il s'agit de déterminer.

Pour cela, nous chercherons le nombre des termes qui, dans l'expression de $D_{m^x}(a.b.c\dots k)$ deviennent égaux en vertu de la supposition précédente, et, pour plus de clarté, nous supposerons qu'un de ces termes soit, en supprimant l'indice x ,

$$D_s a . D_2 b . D_3 c . D_2 d . D_3 e . D_2 f . D k.$$

(1) Pour ne pas multiplier outre mesure les parenthèses, nous désignerons par $D_a^b x f$ la dérivée d'ordre a par rapport à x de f élevée à la puissance b , que l'on écrit ordinairement $(D_x^a f)^b$.

Mais on verra immédiatement que la conséquence du raisonnement que nous allons faire est générale.

Écrivons le terme en question

$$D_5 a . D_5 c . D_5 e . D_3 b . D_3 d . D_2 f . D_2 k .$$

Nous devons prendre toutes les combinaisons trois à trois des sept facteurs $Da, Db, Dc, Dd, De, Df, Dk$ et les affecter de l'indice 5, puis multiplier chacune de ces combinaisons par toutes les combinaisons une à une d'un facteur restant affectées de l'indice 3; ensuite multiplier par toutes les combinaisons deux à deux de deux facteurs restants affectées de l'indice 2; enfin multiplier par le facteur restant; donc le terme proposé donne un nombre de termes identiques égal à

$$\frac{7.6.5}{1.2.3} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{3.2}{1.2} \cdot \frac{1}{1},$$

ou à

$$\frac{7!}{3! 1! 2! 1!}.$$

Il est évident que le nombre des termes de $D_{m^x} u^n$ provenant d'une semblable analyse est

$$\frac{(\Sigma l)!}{\Pi(l)!}.$$

Mais ce qui a lieu pour le terme considéré s'applique à tous les termes de même composition d'indices, dont les lettres ne sont pas toutes les mêmes, c'est-à-dire à un nombre de termes égal au nombre des combinaisons de m lettres Σl à Σl ou à

$$\frac{m(m-1)\dots(m-\Sigma l+1)}{(\Sigma l)!};$$

donc

$$D_{m^x} u^n = \sum \frac{m(m-1)\dots(m-\Sigma l+1)}{(\Sigma l)!} \frac{(\Sigma l)!}{\Pi(l)!} \frac{m!}{\Pi(h!)^l} u^{n-\Sigma l} \Pi D_{h^x}' u,$$

ou

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_{m^x} u^n = \sum \frac{m(m-1)\dots(m-\Sigma l+1)}{\Pi(l)!} \frac{m!}{\Pi(h!)^l} u^{n-\Sigma l} \Pi D_{h^x}' u, \\ \Sigma h l = m, \quad \Sigma l = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right.$$

3. *Remarque.* — Supposons m égal à n

$$D_{m^x} u^m = \sum \frac{m(m-1)\dots(m-\Sigma l+1)}{\Pi(l)!} \frac{m!}{\Pi(h!)^l} u^{m-\Sigma l} \Pi D_{h^x}' u.$$

mais

$$D_{\Sigma l} u^m = m(m-1) \dots (m-\Sigma l+1) u^{m-\Sigma l},$$

donc

$$(3) \quad \begin{cases} D_{m^x} u^m = \sum \frac{m!}{\Pi(l!) \Pi(h!)'} D_{\Sigma l} u^m \Pi(h^x) u, \\ \Sigma h l = m, \quad \Sigma l = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

4. *Remarque.* — Il résulte de l'équation (3) que $\frac{m!}{\Pi(l!) \Pi(h!)'}$ est un nombre entier; on peut le démontrer directement. Remarquons d'abord qu'en décomposant l'expression précédente en facteurs de la forme $\frac{(k+1)(k+2) \dots (k+hl)}{l!(h!)'}$, k étant un nombre entier, il suffira de démontrer que ces facteurs sont entiers; en outre, l'un d'eux peut s'écrire $\frac{(k+1)(k+2) \dots (k+hl)}{(hl)!} \times \frac{(hl)!}{l!(h!)'}$. Le premier de ces nouveaux facteurs étant entier, nous nous proposerons de démontrer qu'il en est de même du second.

Nous prendrons un cas particulier, mais il sera évident que la démonstration est générale.

Considérons le quotient

$$\frac{1.2.3 \dots 14.15}{(1.2.3.4.5)^2 \cdot 1.2.3}.$$

Nous pouvons l'écrire

$$\frac{1.2.3.4}{1.2.3.4} \cdot \frac{5.1}{5.1} \times \frac{6.7.8.9}{1.2.3.4} \cdot \frac{5.2}{5.2} \times \frac{11.12.13.14}{1.2.3.4} \cdot \frac{5.3}{5.3}.$$

Or les fractions $\frac{1.2.3.4}{1.2.3.4}$, $\frac{6.7.8.9}{1.2.3.4}$, $\frac{11.12.13.14}{1.2.3.4}$ sont entières; donc le quotient proposé est entier.

5. *Dérivées successives d'une fonction de fonction.* — Considérons une fonction de u , $\varphi(u)$; u étant une fonction de x ,

$$\begin{aligned} D_x \varphi &= D_u \varphi D_x u, \\ D_{2^x} \varphi &= D_u \varphi D_{1^x} u + D_{2^u} \varphi D_x^2 u, \\ D_{3^x} \varphi &= D_u \varphi D_{3^x} u + 3 D_{2^u} \varphi D_x u D_{1^x} u + D_{3^u} \varphi D_x^3 u. \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

nous reconnaissons la loi suivante, dont la généralité s'aperçoit immédiatement,

$$D_{m^x} \varphi = A_1 D_u \varphi + A_2 D_{2^u} \varphi + \dots + A_m D_{m^u} \varphi,$$

les coefficients $A_1, A_2, \dots, A_m$ étant indépendants de la fonction φ , mais ne dépendant que de la fonction u .

Il en résulte que les coefficients de $D_m^x u^m$, que nous avons trouvés (3), sont ceux de $D_m^x \varphi$; donc

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} D_m^x \varphi &= \sum \frac{m!}{\Pi(l!) \Pi(h!)^l} D_{\Sigma l}^m \varphi \Pi D_h^l u, \\ \Sigma h l &= m, \quad \Sigma l = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right.$$

6. *Application.* — Nous allons appliquer cette formule à un cas particulier $D_7^x \varphi$; nous formerons des suites de nombre par ordre décroissant avec répétition, telles que la somme des nombres de chaque suite soit 7,

$$\begin{aligned} &7, \quad 6.1, \quad 5.2, \quad 5.1.1, \quad 4.3, \quad 4.2.1, \quad 4.1.1.1, \\ &3.3.1, \quad 3.2.2, \quad 3.2.1.1, \quad 3.1.1.1.1, \quad 2.2.2.1, \quad 2.2.1.1.1, \\ &2.1.1.1.1.1, \quad 1.1.1.1.1.1.1; \end{aligned}$$

nous transformerons ces suites en produits affectés d'exposants

$$\begin{aligned} &7, \quad 6.1, \quad 5.2, \quad 5.1^2, \quad 4.3, \quad 4.2.1, \\ &4.1^3, \quad 3^3.1, \quad 3.2^2, \quad 3.2.1^2, \quad 3.1^4, \quad 2^3.1, \quad 2^2.1^2, \quad 2.1^5, \quad 1^7. \end{aligned}$$

Nous formerons des produits de dérivées de u par rapport à x , dont les indices seront les facteurs précédents, et les exposants ceux de ces facteurs, enfin nous multiplierons chaque produit par une dérivée de φ par rapport à u d'indice égal au degré de ce produit et par le coefficient que donne l'équation (4).

Considérons, par exemple, dans la suite précédente le produit 3.2^2 ; il donne d'abord

$$D_{3^x} u D_{2^x}^2 u;$$

puis

$$D_3^u \varphi D_{3^x} u D_{2^x}^2 u;$$

et enfin

$$\frac{7!}{2! 3! (2!)^2} D_3 u \varphi D_{3^x} u D_{2^x}^2 u$$

ou

$$105. D_3^u \varphi D_{3^x} u D_{2^x}^2 u.$$

En faisant un semblable calcul pour tous les termes, nous obtenons pour $D_7^x \varphi$ l'expression suivante, dans laquelle nous n'indiquerons pas les quantités par rapport auxquelles les dérivées sont prises, les dérivées de φ étant toujours prises par rapport à u et

celles de u par rapport à x

$$\begin{aligned} & D\varphi D_7 u + 7 \cdot D_2 \varphi D_6 u Du + 21 \cdot D_2 \varphi D_5 u D_3 u + 21 \cdot D_3 \varphi D_5 u D^2 u \\ & + 35 \cdot D_2 \varphi D_4 u D_3 u + 105 \cdot D_3 \varphi D_4 u D_2 u Du + 35 \cdot D_4 \varphi D_4 u D^2 u \\ & + 70 \cdot D_3 \varphi D_3^2 u Du + 105 \cdot D_3 \varphi D_3 u D_2^2 u + 210 \cdot D_4 \varphi D_3 u D_2 u D^2 u \\ & + 35 \cdot D_5 \varphi D_3 u D^2 u + 105 \cdot D_4 \varphi D_2^2 u Du + 105 \cdot D_5 \varphi D_2^2 u D^2 u \\ & + 21 \cdot D_6 \varphi D_2 u Du^2 + D_7 \varphi D^3 u. \end{aligned}$$

On peut vérifier l'exactitude de ce résultat en formant successivement les dérivées de φ .

7. Application aux nombres de Bernoulli. — L'expression d'un nombre de Bernoulli B_n est la suivante :

$$(5) \quad \begin{cases} B_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{(2^{2n} - 1) 2^{2n-1}} D_{2n-1} (\tan x)_0 \\ = (-1)^{n+1} \frac{n}{(2^{2n} - 1) 2^{2n-1}} D_{2n-2} (\cos^{-2} x)_0. \end{cases}$$

Supposons dans la formule précédente

$$\varphi = u^{-2}, \quad u = \cos x,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} D_{k^u} \varphi &= (-1)^k (k+1)! u^{-(k+2)}, & D_{2k+1} u &= (-1)^k \sin x, & D_{2k} u &= (-1)^k \cos x, \\ D_{k^u} (\varphi)_{x=0} &= (-1)^k (k+1)!, & D_{2k+1} (u)_0 &= 0, & D_{2k} (u)_0 &= (-1)^k, \\ D_{2^p} (\cos^{-2} x)_0 &= \sum \frac{(2p)! (\Sigma l + 1)!}{\Pi(l!) \Pi(h!)^l} \Pi D_{h^x} (u)_0, \end{aligned}$$

dans laquelle formule

$$h \text{ pair}, \quad \Sigma hl = 2p, \quad \Sigma l = 1, 2, \dots, p,$$

donc

$$B_n = \frac{(-1)^{n+1} n}{(2^{2n} - 1) 2^{2n-1}} \sum \frac{(-1)^{\Sigma l} (2n-2)! (\Sigma l + 1)!}{\Pi(l!) \Pi(h!)^l},$$

dans laquelle formule

$$h \text{ pair}, \quad \Sigma hl = 2n-2, \quad \Sigma l = 1, 2, \dots, (n-1).$$

8. Calcul d'un nombre particulier de Bernoulli. — Proposons-nous le calcul de B_6

$$B_6 = - \frac{3}{(2^{12} - 1) 2^{10}} \sum \frac{(-1)^{\Sigma l} 10! (\Sigma l + 1)!}{\Pi(l!) \Pi(h!)^l};$$

ou

$$B_6 = -\frac{1}{1397760} \Sigma$$

On aura d'abord pour $\Pi h'$, les valeurs

$$10, 8.2, 6.4, 6.2^2, 4^2.2, 4.2^3, 2^5,$$

puis pour Πl les valeurs

$$1, 2.2, 1.3, 1.2, 2.1, 1.3, 5.$$

Les valeurs de Σl sont

$$1, 2, 2, 3, 3, 4, 5,$$

celles de $\Sigma l + 1$ sont

$$2, 3, 3, 4, 4, 5, 6.$$

donc la somme Σ aura pour expression

$$-\frac{10!2!}{10!} + \frac{10!3!}{8!2!} + \frac{10!3!}{6!4!} - \frac{10!4!}{2!6!(2!)^2} - \frac{10!4!}{2!(4!)^2 2!} + \frac{10!5!}{3!4!(2!)^2} - \frac{10!6!}{5!(2!)^2}$$

ou

$$-2 + 270 + 1260 - 15120 - 37800 + 378000 - 680400,$$

ou enfin

$$-353792.$$

On obtient ainsi pour B_6 la valeur $\frac{353792}{1397760}$.

Le plus grand commun diviseur des deux termes de B_6 étant 512, on obtient le résultat connu

$$B_6 = \frac{691}{2730}.$$

Des systèmes des coordonnées qui déterminent le plus simplement un point par une construction; par M. E. LEMOINE.

(Séance du 18 juillet 1888.)

A la suite de la Communication que j'ai faite au Congrès d'Oran, cette année, sur la *mesure* de la simplicité dans les Sciences ma-

thématiques et, en particulier, sur la *mesure* de la simplicité dans les constructions géométriques, je me suis demandé quel était, au point de vue graphique, le système le plus simple de coordonnées, c'est-à-dire quel était le moyen le plus simple de déterminer un point par une construction.

Si un point *M* est déterminé par ses coordonnées x', y' , relatives à deux axes donnés ox, oy , l'expression de la construction de ce point s'obtient ainsi : prendre la longueur x' avec le compas, $2 C_1$; porter cette longueur en m à partir de o sur ox , $C_1 + C_3$; par le point m mener une parallèle à oy ; si les axes sont obliques,

$$2 R_1 + R_2 + 5 C_1 + 3 C_3,$$

ou s'ils sont rectangulaires, mener par ce point une perpendiculaire à ox ,

$$4 R_1 + 2 R_2 + C_1 + C_3,$$

prendre avec le compas la longueur y' , $2 C_1$, porter cette longueur à partir de m sur la parallèle à oy ,

$$C_1 + C_3.$$

En résumé, axes obliques :

$$2 R_1 + R_2 + 11 C_1 + 5 C_3;$$

simplicité, 19.

Axes rectangulaires :

$$4 R_1 + 2 R_2 + 7 C_1 + 3 C_3;$$

simplicité, 16 ⁽¹⁾.

Soit maintenant un point *M* déterminé par ses coordonnées normales, c'est à-dire par les lignes α, β, γ qui représentent

(1) Nous rappelons que nous désignons par :

R, l'opération qui consiste à faire passer le bord de la règle par un point donné ;

R, l'opération du tracé de la droite, quelle que soit sa longueur ;

C, c'est mettre une pointe du compas en un point donné ;

C, c'est mettre une pointe du compas en un point indéterminé d'un ligne donnée ;

C, c'est tracer le cercle complètement ou en partie.

Pour calculer la simplicité nous admettons à chacune de ces opérations une valeur égale à l'unité et nous faisons la somme du nombre d'opérations ; rien n'empêcherait du reste de leur donner des coefficients particuliers déterminés expérimentalement.

les rapports de ses distances aux trois côtés BC, CA, AB d'un triangle de référence ABC.

Voici la construction la plus simple qui en résulte pour obtenir le point M :

J'élève une perpendiculaire sur AC et une sur AB en me servant pour cela d'une seule circonférence passant par A.

Ce cercle mené par A coupe AB en B', AC en C' et BC en A' et A₁ ; soit o son centre.

L'extrémité du diamètre opposé à A est A₁,

B'A' est perpendiculaire sur BA,
C'A' " " " " AC.

Cela exige

$$6R_1 + 3R_2 + C_1 + C_2.$$

J'élève une perpendiculaire sur BC en A' en me servant du même cercle que précédemment :

$$4R_1 + 2R_2.$$

Je prends avec le compas la longueur α , $2C_1$.

Je la porte à partir de A' en A'' sur la perpendiculaire à BC,

$$C_1 + C_2,$$

par A'' je mène une perpendiculaire à A'A'', c'est-à-dire une parallèle à BC :

$$4R_1 + 2R_2 + C_1 + C_2;$$

en résumant ces différentes opérations, depuis que j'ai élevé une perpendiculaire sur BC en A', cela fait

$$8R_1 + 4R_2 + 4C_1 + 2C_2.$$

Il en faut autant pour mener une parallèle à AC à la distance β , et autant pour mener une parallèle à AB à la distance γ , c'est-à-dire qu'il y a à ajouter

$$16R_1 + 8R_2 + 8C_1 + 4C_2.$$

La parallèle à CB à la distance α coupe en N la parallèle à AC à la distance β et en M la parallèle à AB à la distance γ .

Je trace CL :

$$2R_1 + R_2 :$$

je trace BM :

$$2R_1 + R_2.$$

Ces deux droites se coupent en M, qui est ainsi déterminé. La construction est donc exprimée par

$$34R_1 + 17R_2 + 13C_1 + 7C_3,$$

la simplicité par 71.

Nous ne multiplierons pas les exemples : nous dirons seulement que la manière la plus simple que nous ayons trouvée de déterminer un point M, c'est de donner ses distances λ , λ' à deux points fixes F et F'.

La construction du point M est exprimée alors par

$$6C_1 + 2C_3 \text{ ou par } 8.$$

La manière la plus simple ensuite est celle-ci : je prends deux axes fixes CA, CB :

$$\begin{array}{lcl} \text{A est un point fixe sur CA,} \\ \text{B} & \text{»} & \text{»} \quad \text{CB.} \end{array}$$

Je joins AM qui coupe CB en A' et BM qui coupe CA en B'.

Soient

$$CA' = x, \quad CB' = y.$$

Si je donne x et y , le point M est déterminé par la construction

$$4R_1 + 2R_2 + 6C_1 + 2C_3,$$

dont la simplicité est 14.

Le système de coordonnées le plus simple pour la détermination du point est donc celui où le point est déterminé par ses distances à deux points fixes; il est fort connu, malheureusement il se prête *en général* assez mal aux études analytiques; celui que nous signalons ensuite l'est beaucoup moins; nous ne savons même pas s'il a été remarqué et c'est de lui que nous allons dire quelques mots, parce que les coordonnées cartésiennes usuelles en sont un cas particulier.

Généralisation du système cartésien de coordonnées.

Soient (*fig. 1*)

CA et CB deux droites fixes;

A point fixe sur CA, soit $CA = b$;

B point fixe sur CB, soit $CB = a$;

M un point quelconque;

AM coupant CB en X;

BM coupant CA en Y;

CX et CY peuvent être considérées comme les coordonnées de M;

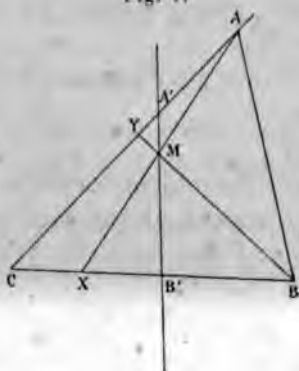
CX sera l' x du point M;

CY sera l' y du point M.

Le sens positif des x est le sens CB, le sens positif des y est le sens CA.

Si A et B s'éloignent à l'infini respectivement sur CA et sur CB,

Fig. 1.



CX et CY deviennent les coordonnées cartésiennes ordinaires.

Cherchons, dans le système que nous considérons, l'équation générale de la droite.

Soit $A'B'$ une droite quelconque déterminée par $CB' = a'$,

B' est sur CB,

et par $CA' = b'$,

A' est sur CA.

Soit M un point quelconque de $A'B'$.

Le triangle $A'CB'$ coupé par la transversale AMX donne

$$(1) \quad \frac{CX}{XB'} \cdot \frac{B'M}{MA'} \cdot \frac{AA'}{AC} = 1;$$

de même A'CB', coupé par BMY, donne

$$(2) \quad \frac{B'B}{CB} \frac{MA'}{B'M} \frac{YC}{A'Y} = 1;$$

multipliant (1) et (2) membre à membre, on a

$$\frac{CX}{XB'} \frac{AA'}{AC} \frac{B'B}{CB} \frac{YC}{A'Y} = 1$$

ou

$$\frac{x}{a'-x} \frac{-(b-b')}{-b} \frac{a-a'}{a} \frac{-y}{-(b'-y)} = 1$$

ou

$$(3) \quad \frac{xy}{(a'-x)(b'-y)} = \frac{ab}{(a-a')(b-b')}$$

ou

$$xy(a'b' - ab' - a'b) + aa'by + abb'x - aa'bb' = 0 :$$

c'est l'équation de A'B', elle est du second degré et de la forme

$$Axy + By + Cx + D = 0.$$

Remarquons qu'elle est toujours satisfaite par $x = a$, $y = b$, coordonnées qui représentent un point quelconque de la droite AB et par suite le point d'intersection de AB et de A'B'.

L'équation (3) peut s'écrire

$$\frac{xy}{(a'-x)(b'-y)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{a'}{a}\right) \left(1 - \frac{b'}{b}\right)};$$

si a et b deviennent infinis, l'équation devient

$$\frac{xy}{(a'-x)(b'-y)} = 1$$

ou

$$\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1,$$

ce qui est en effet la forme connue de l'équation cartésienne ordinaire de la droite.

Si A'B' passe en C, l'équation (3) devient une identité, puisque $a' = b' = 0$.

Voici alors l'équation d'une droite passant par l'origine.

Soit (fig. 2) N le point où CM coupe AB, soit

$$\widehat{BCM} = \alpha,$$

$$\widehat{BCA} = \theta.$$

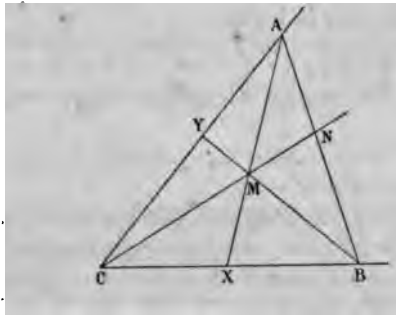
On a

$$(4) \quad \frac{CX}{XB} \frac{BN}{NA} \frac{AY'}{YC} = 1,$$

$$\frac{BN}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \angle CNB},$$

$$\frac{NA}{\sin(\theta - \alpha)} = \frac{b}{\sin \angle CNA};$$

Fig. 2



mais $\sin \angle CNB = \sin \angle CNA$: donc

$$\frac{BN}{NA} = \frac{a}{b} \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \alpha};$$

l'équation (4) devient donc

$$\frac{x}{a-x} \frac{b-y}{y} = \frac{b}{a} \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)}$$

ou

$$(5) \quad \frac{x}{y} \frac{b-y}{a-x} = \frac{b}{a} \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)},$$

ce qui est l'équation cherchée d'une droite passant par l'origine.

L'équation (5) peut s'écrire

$$\frac{x}{y} \frac{1 - \frac{y}{b}}{1 - \frac{x}{a}} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)};$$

si a et b s'éloignent à ∞ , elle devient

$$\frac{x}{y} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)},$$

ce qui est bien la forme de l'équation d'une droite passant à l'origine dans le système cartésien ordinaire.

Point d'intersection de deux droites. — Soient les deux droites

$$\frac{xy}{(a' - x)(b' - y)} = \frac{ab}{(a - a')(b - b')},$$

$$\frac{xy}{(a'' - x)(b'' - y)} = \frac{ab}{(a - a'')(b - b'')},$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$ab(a'b' - b'x) = y[(a'b' - ab' - a'b)x + aa'b],$$

$$ab(a''b'' - b''x) = y[(a''b'' - ab'' - a''b)x + aa''b];$$

on tire de là

$$x^2[a'b'(b' - b) - a''b(b'' - b)]$$

$$+ x[a'a''b(b'' - b) - aa'b'(b' - b)]$$

$$- aa'a''b(b'' - b') = 0.$$

Si l'on résout cette équation, on voit que la quantité sous le radical est un carré parfait; on trouve que l'une des deux valeurs de x qui annulent cette équation est $x = a$, et la valeur correspondante de y est b , ainsi que nous devions nous y attendre, puisque l'équation générale d'une droite est toujours satisfaite par

$$x = a, \quad y = b.$$

Cette solution ne donne pas les coordonnées de l'intersection de AB et de A'B'.

L'autre valeur de x qui annule l'équation est

$$(6) \quad x = \frac{a'a''b(b' - b'')}{a'b'(b' - b) - a''b'(b'' - b)},$$

la valeur correspondante de y est

$$(7) \quad y = \frac{ab'b''(a' - a'')}{a'b'(a' - a) - a''b'(a'' - a)},$$

l' x et l' y ne dépendent, l' x que de a , l' y que de b .

Si l'on met ces valeurs sous la forme

$$x = \frac{a' a'' (b' - b'')}{a' b'' \left(\frac{b'}{b} - 1 \right) - a'' b' \left(\frac{b''}{b} - 1 \right)},$$

$$y = \frac{b' b'' (a' - a'')}{a'' b' \left(\frac{a'}{a} - 1 \right) - a' b'' \left(\frac{a''}{a} - 1 \right)},$$

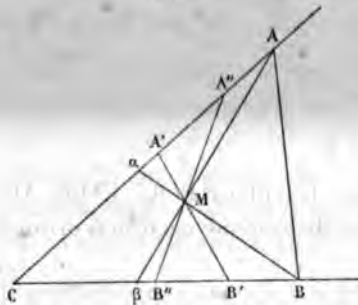
et que l'on fasse a et b infinis, on retrouve l'expression dans le système cartésien ordinaire de l'intersection des deux droites

$$\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1,$$

$$\frac{x}{a''} + \frac{y}{b''} = 1.$$

Les expressions (6) et (7) peuvent s'écrire, en appelant α et β les points (*fig. 3*) où les droites AM , BM coupent respectivement

Fig. 3.



CA et CB , M étant le point commun des droites $A'B'$, $A''B''$,

$$C\beta = \frac{CA \cdot CB' \cdot CB'' \cdot A'A''}{CB'' \cdot CA' \cdot AA'' - CB' \cdot CA'' \cdot AA'},$$

$$C\alpha = \frac{CB \cdot CA' \cdot CA'' \cdot B'B''}{CA'' \cdot CB' \cdot BB'' - CA' \cdot CB'' \cdot BB'},$$

relations métriques remarquables.

La même extension du système de coordonnées cartésiennes a lieu dans l'espace.

Soient trois points fixes (*fig. 4*) A , B , C , pris sur trois axes

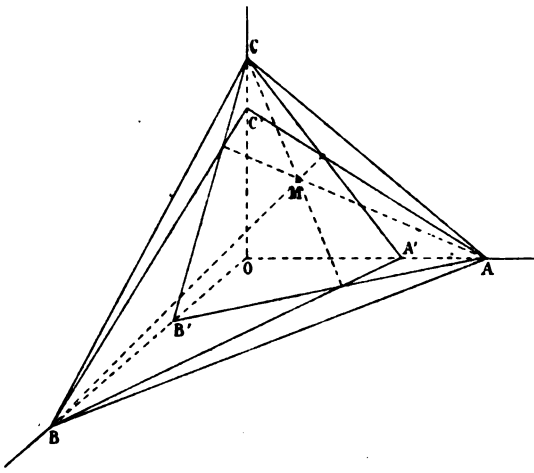
fixes OA, OB, OC; soit M un point quelconque de l'espace :

Le plan MBC coupe OA en A',
 » MAC » OB » B',
 » MBA » OC » C';

OA', OB', OC' sont en grandeur et en signe les coordonnées x , y , z du point M.

Il est clair que, si les droites BC, CA, AB s'éloignent à l'infini

Fig. 4.



respectivement dans les plans BOC, COA, AOB, le système de coordonnées devient le système cartésien ordinaire.

Si l'on pose

$$\begin{aligned} OA &= a, & OB &= b, & OC &= c, \\ OA' &= a', & OB' &= b', & OC' &= c', \end{aligned}$$

l'équation du plan A'B'C' sera

$$\begin{aligned} xyz(\Sigma ac'b' - 2a'b'c') + \Sigma aa'yz(b'c' - bc' - cb') \\ + abc \Sigma xb'c' - abc a'b'c' = 0; \end{aligned}$$

elle est toujours satisfaite par

$$\begin{aligned} x &= a, \\ y &= b, \\ z &= c, \end{aligned}$$

comme il est facile de le prévoir.

Si l'on fait tendre a, b, c vers ∞ , cette équation devient

$$\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = 1,$$

ce qui est l'équation du plan dans le système cartésien ordinaire.

Nous ne nous étendrons pas davantage; nous n'avons même fait ces très simples observations que parce que cette généralisation du système cartésien ne nous semble pas avoir été remarquée et qu'elle peut être utile dans certaines questions.

Note sur un système de deux courbes planes;

par M. C.-A. LAISANT.

(Séance du 18 juillet 1888.)

Soient, dans un même plan, deux courbes quelconques. A partir d'une origine, choisie arbitrairement sur chacune d'elles, portons des arcs égaux, dont les extrémités X, Y (*fig. 1*) sont variables avec la longueur commune des arcs.

Prenons le milieu Z de la droite XY . Nous nous proposons de déterminer la tangente et le rayon de courbure de la courbe (Z) décrite par ce point.

Rapportant les points à une origine quelconque, nous avons

$$(1) \quad 2z = y + x,$$

d'où

$$2dz = dy + dx.$$

Mais, les arcs décrits par X et Y étant égaux en longueur,

$$(2) \quad dx = \varepsilon\xi ds, \quad dy = \varepsilon\eta ds;$$

donc

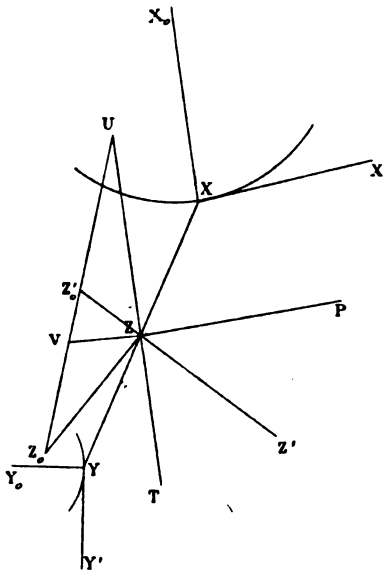
$$(3) \quad dz = \frac{ds}{2} (\varepsilon\xi + \varepsilon\eta) = ds \cos \frac{\xi - \eta}{2} \varepsilon \frac{\xi + \eta}{2}.$$

La tangente à la courbe (Z) a par conséquent pour inclinaison $\frac{\xi + \eta}{2}$; c'est-à-dire que si nous menons ZP, ZT parallèles aux tan-

gentes en X et Y, la tangente cherchée sera la bissectrice ZZ' de l'angle PZT.

Il est à remarquer que, si l'on vient à changer le sens suivant lequel sont comptés les arcs sur l'une des courbes, on aura pour la tangente une direction perpendiculaire à la précédente, puisque

Fig. 1.



l'angle PZT se trouvera remplacé par son adjacent supplémentaire.

Soient maintenant X_0, Y_0, Z_0 les centres de courbure en X, Y, Z des courbes (X), (Y), (Z) respectivement.

Nous avons

$$(4) \quad XX_0 = i \frac{ds}{d\xi} \varepsilon \xi, \quad YY_0 = i \frac{ds}{d\eta} \varepsilon \eta.$$

De plus, la longueur de l'élément d'arc dz étant, d'après la formule (3), $ds \cos \frac{\xi - \eta}{2}$, et l'inclinaison de ce même élément $\frac{\xi + \eta}{2}$,

$$(5) \quad ZZ_0 = 2i \frac{ds \cos \frac{\xi - \eta}{2}}{d\xi + d\eta} \varepsilon \frac{\xi + \eta}{2}.$$

Des relations (4) et (5) on déduit

$$\frac{d\xi}{ds} XX_0 + \frac{dy}{ds} YY_0 = \left(\frac{d\xi}{ds} + \frac{dy}{ds} \right) ZZ_0,$$

c'est-à-dire, en traçant ZU, ZV respectivement équipollentes à XX_0, YY_0 ,

$$(6) \quad \frac{d\xi}{ds} ZU + \frac{dy}{ds} XV = \left(\frac{d\xi}{ds} + \frac{dy}{ds} \right) ZZ_0.$$

Le point Z_0 , centre de courbure cherché, est donc situé sur la droite UV. Nous savons en outre qu'il est situé sur la perpendiculaire à ZZ' , c'est-à-dire sur la normale, ce qui le détermine complètement.

Pour la courbe résultant du changement de sens des arcs sur l'une des courbes données (X) et (Y), il n'y aurait rien de changé, si ce n'est, comme nous l'avons vu plus haut, que ZZ' deviendrait maintenant la normale. Le nouveau centre de courbure Z'_0 serait donc à la rencontre des droites UV et ZZ' .

Cette construction très simple se prête à une généralisation assez facile de la manière suivante. Supposons que les arcs portés sur les deux courbes (X) et (Y) soient non plus égaux comme précédemment, mais dans un rapport constant, et qu'on divise la droite XY en Z dans le même rapport. On aura alors

$$(7) \quad \frac{s_x}{s_y} = \frac{XZ}{ZY} = k,$$

en désignant par s_x, s_y les arcs de deux courbes.

On reconnaît alors immédiatement que la tangente en Z, comme ci-dessus, a une inclinaison égale à la demi-somme des inclinaisons des tangentes en X et Y.

Quant à la détermination du centre de courbure, on remarquera que l'on a

$$\begin{aligned} XX_0 &= \frac{i ds_x}{d\xi} \varepsilon\xi = \frac{ik ds_y}{d\xi} \varepsilon\xi, \\ YY_0 &= \frac{i ds_y}{d\eta} \varepsilon\eta, \\ ZZ_0 &= \frac{2k}{1+k} \frac{i ds_y}{d\xi + d\eta} (\varepsilon\xi + \varepsilon\eta); \end{aligned}$$

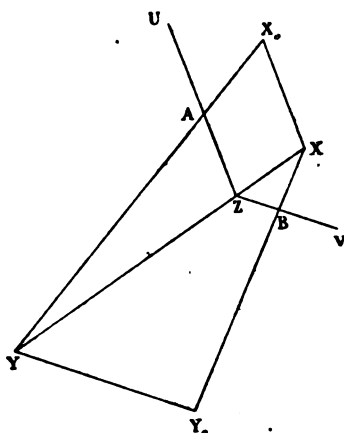
et, par un calcul tout à fait analogue à celui que nous avons in-

diqué plus haut,

$$(8) \quad (d\xi + d\tau_1)ZZ_0 - \frac{2 \cdot XX_0}{1+k} d\xi + \frac{2k \cdot YY_0}{1+k} d\tau_1.$$

Or, si par le point Z nous menons une parallèle ZA (fig. 2)

Fig. 2.



à XX_0 jusqu'à la rencontre de YX_0 , puis une parallèle ZB à YY_0 jusqu'à la rencontre de XY_0 , et si nous construisons

$$ZU = 2ZA, \quad ZV = 2ZB,$$

nous aurons

$$ZU = \frac{2 \cdot XX_0}{1+k}, \quad ZV = \frac{2k \cdot YY_0}{1+k}.$$

La relation (8) devient alors

$$(9) \quad (d\xi + d\tau_1)ZZ_0 = d\xi ZU + d\tau_1 ZV,$$

c'est-à-dire que le centre de courbure en Z est situé sur la droite joignant les deux points U et V, dont nous venons d'indiquer la construction.

Sur la numération factorielle, application aux permutations;
par M. C.-A. LAISANT.

(Séance du 21 novembre 1888.)

Numération factorielle.

1. Un nombre entier quelconque étant donné, il tombe nécessairement entre les deux factoriellés consécutives

$$\begin{aligned} n! &= 1.2.3 \dots n, \\ (n+1)! &= 1.2.3 \dots n(n+1), \end{aligned}$$

ou bien il est exactement égal à une factorielle, ce que nous ne supposons pas pour l'instant.

En le divisant par $n!$, nous obtiendrons un quotient nécessairement inférieur à $n+1$, sans quoi le nombre donné N serait égal ou supérieur à $(n+1)!$

Si R est le reste de la division, nous avons donc

$$N = \alpha_n n! + R.$$

R étant inférieur à $n!$, nous pouvons le diviser par $(n-1)!$, ce qui donnera un quotient α_{n-1} qui peut être nul, mais est, en tous cas, inférieur à n , et un certain reste R_1 . Répétant la même opération sur R_1 , et ainsi de suite, nous voyons qu'en fin de compte le nombre N peut être mis sous la forme

$$(1) \quad N = \alpha_n \cdot n! + \alpha_{n-1} \cdot (n-1)! + \dots + \alpha_3 \cdot 3! + \alpha_2 \cdot 2! + \alpha_1,$$

chacun des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ pouvant prendre respectivement les valeurs entières

$$\begin{aligned} &0, 1, \\ &0, 1, 2, \\ &\dots\dots\dots, \\ &0, 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

sans jamais dépasser la valeur de son indice, c'est-à-dire de son rang, compté à partir de la droite.

On peut convenir d'écrire ce nombre N sous la forme

$$(2) \quad (\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1),$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ représentant alors des *chiffres*, respectivement limités comme nous venons de le dire, et nous avons ainsi un système particulier de numération, que nous nommerons *numération factorielle*.

Si le nombre N , ou l'un des restes obtenus ci-dessus, se trouvait justement égal à une factorielle, hypothèse que nous avons tout d'abord écartée, il est clair que le quotient obtenu serait 1 et le reste 0, c'est-à-dire qu'à partir de ce reste ce qu'on obtiendrait s'écrirait

$$1000 \dots 0.$$

2. Le plus grand nombre de n chiffres que nous puissions écrire dans le système de numération factorielle est évidemment, d'après ce qui vient d'être dit,

$$[n(n-1) \dots 3.2.]1 = 1.1! + 2.2! + 3.3! + \dots + n.n!.$$

Le plus petit nombre de $n+1$ chiffres est

$$[(n+1)0.0 \dots 0]1 = (n+1)!.$$

De là, l'identité

$$1.1! + 2.2! + 3.3! + \dots + n.n! = (n+1)! - 1,$$

d'ailleurs facile à démontrer directement.

3. Dans le système de numération factorielle, tous les nombres pairs sont terminés par 0 et tous les nombres impairs par 1.

L'addition se fera sans peine, en ayant soin de bien observer le rang de la colonne sur laquelle on opère. Si, par exemple, à la quatrième colonne, on a trouvé pour somme 23, on décomposera par la pensée 23 en $4.5 + 3$, on posera 3 et l'on retiendra 4 pour l'ajouter à la cinquième colonne.

La soustraction se fera avec non moins de facilité.

La conversion d'un nombre (74 153 201), par exemple, du système factoriel dans le système décimal se fera sans peine, soit en calculant les diverses factorielles $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, ... et les multipliant par les chiffres correspondants; soit, plus pratiquement peut-être, en multipliant le premier chiffre à gauche par son rang, ajoutant le deuxième chiffre, multipliant le résultat par le rang du deuxième chiffre, et ainsi de suite. Ainsi :

$$\begin{aligned} 7.8 + 4 &= 60, & 60.7 + 1 &= 421, & 421.6 + 5 &= 2531, & 2531.5 + 3 &= 12658, \\ 12658.4 + 2 &= 50634, & 50634.3 + 0 &= 151902, & 151902.2 + 1 &= 303805 = N. \end{aligned}$$

La conversion d'un nombre du système décimal dans le système factoriel se fera en divisant ce nombre par 2, le quotient obtenu par 3, et ainsi de suite; les chiffres cherchés seront précisément les restes successifs. L'exemple ci-dessus nous donnera de la sorte :

$$\begin{array}{r}
 303805 \mid 2 \\
 \hline
 151902 \mid 3 \\
 \hline
 19 \mid 4 \\
 10 \mid 5 \\
 12 \mid 6 \\
 0 \mid 7 \\
 26 \mid 8 \\
 23 \mid 9 \\
 34 \mid 10 \\
 2 \mid 11 \\
 8 \mid 12 \\
 3 \mid 13 \\
 11 \mid 14 \\
 5 \mid 15 \\
 13 \mid 16 \\
 2531 \mid 17 \\
 12658 \mid 18 \\
 50834 \mid 19 \\
 151902 \mid 20 \\
 303805 \mid 21
 \end{array}$$

Nous donnons ci-dessous le Tableau des 84 premiers nombres entiers écrits dans le système factoriel :

0...	0	22...	320	44...	1310	66...	2300
1...	1	23...	321	45...	1311	67...	2301
2...	10	24...	1000	46...	1320	68...	2310
3...	11	25...	1001	47...	1321	69...	2311
4...	20	26...	1010	48...	2000	70...	2320
5...	21	27...	1011	49...	2001	71...	2321
6...	100	28...	1020	50...	2010	72...	3000
7...	101	29...	1021	51...	2011	73...	3001
8...	110	30...	1100	52...	2020	74...	3010
9...	111	31...	1101	53...	2021	75...	3011
10...	120	32...	1110	54...	2100	76...	3020
11...	121	33...	1111	55...	2101	77...	3021
12...	200	34...	1120	56...	2110	78...	3100
13...	201	35...	1121	57...	2111	79...	3101
14...	210	36...	1200	58...	2120	80...	3110
15...	211	37...	1201	59...	2121	81...	3111
16...	220	38...	1210	60...	2200	82...	3120
17...	221	39...	1211	61...	2201	83...	3121
18...	300	40...	1220	62...	2210	84...	3200
19...	301	41...	1221	63...	2211		
20...	310	42...	1300	64...	2220		
21...	311	43...	1301	65...	2221		

Permutations, et leur classification.

4. Soient deux objets a, b , classés dans un certain ordre, c'est-à-dire représentés respectivement par 1 et 2, nombres qui désignent leurs rangs. On peut former avec ces deux objets les permutations ab et ba .

La première ne présente pas de dérangement ou d'inversion. Nous la figurerons par le signe 0; la seconde présente une inversion, nous la figurerons par le signe 1.

Prenons actuellement trois objets classés a, b, c ou 1, 2, 3. Ils permettent de former les six permutations

$$123, 132, 213, 231, 312, 321.$$

Si nous considérons une permutation quelconque, et si nous considérons les inversions qui existent entre le premier objet et ceux qui les suivent, elles seront au nombre de 0, 1 ou 2; 0 si le premier objet est 1; 1 si le premier objet est 2; et 2 si le premier objet est 3. Quant à la permutation de deux objets qui suit le premier, elle présente, comme nous venons de le dire, 0 ou 1 inversion. Nous pouvons donc figurer chacune des permutations par un signe composé de deux caractères, le premier étant 0, 1 ou 2 et représentant le nombre des inversions par rapport au premier objet, et le second étant 0 ou 1. Il en résulte que les signes figuratifs des six permutations ci-dessus seront respectivement

$$00, 01, 10, 11, 20, 21.$$

Ces signes représentent, dans le système de numération factorielle, les nombres

$$0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Si l'on écrit les permutations dans l'ordre que nous avons adopté plus haut, on voit donc que le rang de chacune d'elles sera $(p) + 1$, en désignant par (p) son signe figuratif, considéré comme représentant un nombre écrit dans le système factoriel.

5. Il est facile de généraliser cette notion de proche en proche, de l'étendre aux permutations d'un nombre quelconque d'objets, et d'en déduire ainsi un mode de classification invariable de ces permutations. Par exemple, soient quatre objets a, b, c, d ou 1,

2, 3, 4. Prenons une permutation quelconque $c d a b$, ou 3 4 1 2.

Le premier objet étant 3, le nombre des inversions par rapport à cet objet est 2. La permutation 4 1 2 qui reste à la droite est figurée par 20, d'après ce que nous avons dit précédemment. Donc le signe figuratif de la permutation 3412 sera 220; et son rang sera $2 \cdot 2 \cdot 0 + 1 = 17$, en lisant 2 2 0 dans le système factoriel. Il s'agit donc de la 17^e permutation des 4 objets 1, 2, 3, 4.

L'identité entre les résultats obtenus ici et le système de la numération factorielle résulte de ce que le nombre des inversions entre un objet quelconque et ceux qui le suivent ne peut varier que de zéro à n , n indiquant le nombre des objets suivants, c'est-à-dire présente justement la même propriété que les chiffres de la numération factorielle.

6. Pour que cette classification des permutations d'un nombre quelconque d'objets soit véritablement utile, il faut pouvoir résoudre facilement, et pour ainsi dire à vue, ou avec très peu de calculs, les deux problèmes suivants :

Étant donnée une permutation de m objets, trouver le rang de cette permutation ;

Étant donné le rang d'une permutation, trouver cette permutation.

Nous allons successivement les examiner en faisant immédiatement application à des exemples.

Si l'on donne une permutation quelconque de m objets 1, 2, 3, ... m , le signe du premier objet, diminué d'une unité, donnera nécessairement le premier chiffre du signe figuratif de la permutation. Dans la permutation restant à droite, nous diminuerons de 1 les signes des objets supérieurs à celui du premier, et nous appliquerons la même règle, et ainsi de suite.

Soient, par exemple, 6 objets a, b, c, d, e, f ou 1, 2, 3, 4, 5, 6 : considérons la permutation $d c f e a b$ ou 4 3 6 5 1 2. Nous ferons les transformations suivantes :

4.3 5 4 1 2

4.3.4 3 1 2

4.3.4.3.1.2

et il s'ensuit que le signe figuratif est

$$(3 \ 2 \ 3 \ 2 \ 0).$$

Le rang est donc

$$(3 \ 2 \ 3 \ 2 \ 0) + 1 = 3.5! + 2.4! + 3.3! + 2.2! + 1 = 431,$$

c'est-à-dire que la permutation donnée est la 431^e.

Passons maintenant au deuxième problème. Connaissant le rang d'une permutation, on aura immédiatement le signe représentatif en retranchant une unité, et convertissant le nombre ainsi obtenu dans le système factoriel.

Ayant obtenu ce symbole, on en augmentera tous les chiffres d'une unité; puis on écrira dans leur ordre tous les objets. Si le premier chiffre du résultat ainsi obtenu est c_4 , on prendra l'objet du rang c_1 , et on l'effacera de la liste pour le mettre en tête de la permutation; si le deuxième chiffre est c_2 , on prendra l'objet de rang c_2 *parmi ceux qui restent*, et ainsi de suite. Ce procédé permet, comme on le voit, d'obtenir le résultat pour ainsi dire mécaniquement et sans calcul, du moment qu'on a le signe représentatif.

On demande, par exemple, la 17^e permutation de 4 objets. Nous convertissons $17 - 1 = 16$ dans le système factoriel et nous avons $(2 \ 2 \ 0)$. Nous en formons $3 \ 3 \ 1$; puis les quatre objets

$$a \ b \ c \ d$$

étant écrits dans leur ordre, nous prenons le 3^e, c ; puis le 3^e de ceux qui restent, ou d ; puis le premier de ceux qui restent, ou a ; nous avons donc $c \ d \ a \ b$ pour la permutation cherchée.

Prenant, comme seconde application, le même exemple que plus haut, soit demandée la 431^e permutation de six objets

$$a, b, c, d, e, f.$$

Convertissant 430 dans le système factoriel, nous avons $(3 \ 2 \ 3 \ 2 \ 0)$. Nous écrivons $4 \ 3 \ 4 \ 3 \ 1$; d'où nous déduisons, comme ci-dessus,

$$d \ c \ f \ e \ a \ b$$

pour la permutation cherchée.

7. Nous donnons ci-dessous le Tableau des permutations de

quatre objets, avec l'indication de leurs rangs et leurs signes figuratifs.

1 ^{re}	1 2 3 4	0 0 0	13 ^{re}	3 1 2 4	2 0 0
2 ^{re}	1 2 4 3	0 0 1	14 ^{re}	3 1 4 2	2 0 1
3 ^{re}	1 3 2 4	0 1 0	15 ^{re}	3 2 1 4	2 1 0
4 ^{re}	1 3 4 2	0 1 1	16 ^{re}	3 2 4 1	2 1 1
5 ^{re}	1 4 2 3	0 2 0	17 ^{re}	3 4 1 2	2 2 0
6 ^{re}	1 4 3 2	0 2 1	18 ^{re}	3 4 2 1	2 2 1
7 ^{re}	2 1 3 4	1 0 0	19 ^{re}	4 1 2 3	3 0 0
8 ^{re}	2 1 4 3	1 0 1	20 ^{re}	4 1 3 2	3 0 1
9 ^{re}	2 3 1 4	1 1 0	21 ^{re}	4 2 1 3	3 1 0
10 ^{re}	2 3 4 1	1 1 1	22 ^{re}	4 2 3 1	3 1 1
11 ^{re}	2 4 1 3	1 2 0	23 ^{re}	4 3 1 2	3 2 0
12 ^{re}	2 4 3 1	1 2 1	24 ^{re}	4 3 2 1	3 2 1

8. Le nombre total des inversions d'une permutation déterminée est évidemment égal à la somme des chiffres de son signe figuratif. Cela résulte de la définition même de ce signe. En considérant le Tableau ci-dessus, ou tout simplement en ayant égard à la formation successive des nombres entiers, dans le système de numération factorielle, il est clair que ce nombre d'inversions est :

pair, lorsque le rang de la permutation est de l'une des formes $4k$ ou $4k + 1$;

impair, lorsque le rang de la permutation est de l'une des formes $4k + 2$ ou $4k + 3$.

Cette remarque est de nature à faciliter beaucoup la construction d'un déterminant, sans qu'il puisse y avoir aucune équivoque sur les signes.

Si, par exemple, nous avons à calculer

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

nous formerons, dans leur ordre, les permutations

1 2 3, 1 3 2, 2 1 3, 2 3 1, 3 1 2, 3 2 1, .

auxquelles correspondront les signes

+ - - + + - ,

c'est-à-dire que le déterminant est

$$a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1.$$

Si tous les éléments du déterminant sont positifs, il y aura avantage à écrire d'une part les permutations de rangs

$$1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16, 17, \dots,$$

qui fourniront les termes positifs; et, d'autre part, celles de rangs

$$2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, \dots,$$

qui fourniront les termes négatifs.

On remarquera enfin que la notation proposée donne pour ainsi dire à vue la décomposition d'un déterminant suivant les éléments de la première colonne, par exemple; car, si l'on a le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & l_n \end{vmatrix},$$

toute permutation dont le signe figuratif commencera par le chiffre p correspondra à un terme contenant a_{p+1} . Il n'y aura donc qu'à grouper ensemble les signes figuratifs commençant par p pour avoir, avec leurs signes, les termes contenant a_{p+1} , dans lesquels on mettra ensuite a_{p+1} en facteur commun.

Il est clair qu'on aurait de même les développements par rapport aux éléments de la deuxième, de la troisième colonne, etc., en amenant la colonne considérée au premier rang par une permutation préalable de colonnes.

Sur les systèmes de péninvariants principaux d'une forme binaire; par M. MAURICE D'OCAGNE.

(Séance du 5 décembre 1888.)

Je commencerai par définir la notation suivante :

Etant donnée une suite de quantités affectées d'indices $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, je désignerai par *la même lettre dépourvue d'in-*

dice une variable fictive par rapport à laquelle, dans la suite précédente, chaque quantité aurait pour dérivée celle qui vient immédiatement après elle, c'est-à-dire telle que

$$\frac{du_0}{du} = u_1, \quad \frac{du_1}{du} = u_2, \quad \dots, \quad \frac{du_n}{du} = u_{n+1}, \quad \dots$$

Dès lors, on voit quelle est l'opération à effectuer sur une fonction quelconque de $u_0, u_1, u_2, \dots$, que symbolise la notation $\frac{d}{du}$.

Cette définition posée, je rappellerai un théorème que j'ai obtenu jadis ⁽¹⁾ et qui a été depuis considérablement généralisé d'abord par moi-même ⁽²⁾, puis par M. Perrin ⁽³⁾. Voici ce théorème :

Pour p au moins égal à 2, l'expression

$$\varphi_p = a_0^p \frac{d^p a_0}{da^p}$$

est un péninvariant de la forme binaire représentée symboliquement par $(x + ay)^n$.

J'ai fait observer ⁽⁴⁾, en outre, que les $n - 1$ péninvariants fournis par cette expression, dans laquelle on fait $p = 2, 3, 4, \dots, n$, constituent un système de péninvariants principaux de la forme de degré n considérée. En d'autres termes, ils peuvent servir à exprimer tous les péninvariants de cette forme.

Or on sait que le système des péninvariants principaux ordinaires $v_2, v_3, \dots, v_n$ est défini par les formules

$$(1) \quad \begin{cases} v_{2p} = a_0 a_{2p} - 2p a_1 a_{2p-1} + \frac{2p(2p-1)}{1 \cdot 2} a_2 a_{2p-2} - \dots \\ \quad \pm \frac{1}{2} \frac{2p(2p-1) \dots (p+1)}{1 \cdot 2 \dots p} a_p^2, \end{cases}$$

$$(2) \quad v_{2p+1} = a_0 \frac{dv_{2p}}{da} - 2a_1 v_{2p}.$$

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, t. CII, p. 916.

⁽²⁾ *Ibid.*, t. CIV, p. 961 et 1364.

⁽³⁾ *Ibid.*, t. CIV, p. 1097 et 1258.

⁽⁴⁾ *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XI, p. 316.

Un problème se posait donc tout naturellement : *passer du système de péninvariants principaux* (φ) *au système* (v) *et réciproquement*. Ce problème présentait une réelle difficulté en raison de la discontinuité de la loi de formation des péninvariants v , et pourtant des formules ⁽¹⁾, obtenues par un calcul de proche en proche, assez laborieux, faisaient soupçonner des formules générales fort élégantes.

Ces formules générales viennent, *pour le cas des indices pairs*, d'être établies par M. E. Cesaro, avec une remarquable habileté ⁽²⁾.

Représentant par $\sum_p^i \varepsilon_r$ la somme de tous les produits analogues à $\varepsilon_{r_1} \varepsilon_{r_2} \dots, \varepsilon_{r_i}$, où $r_1 + r_2 + \dots + r_i = p$, en nombres entiers et positifs (algorithme isobarique), M. Cesaro a démontré que

$$(3) \quad v_{2p} = \frac{(2p)!}{a_0^{2p-2}} \sum_{i=1}^{i=p} \left\{ \frac{2^{i-1}}{i!} \sum_p^i \left[\frac{\varphi_{2r}}{(2r)!} \right] \right\}.$$

$$(4) \quad \varphi_{2p} = (2p)! \sum_{i=1}^{i=p} \left\{ (-2)^{i-1} \frac{a_0^{2p-2i}}{i} \sum_p^i \left[\frac{v_{2r}}{(2r)!} \right] \right\}.$$

Il restait à trouver les formules générales correspondant au cas des *indices impairs*. J'ai été assez heureux pour y parvenir en partant des résultats mêmes de M. Cesaro. En supposant v_{2p} et φ_{2p} remplacés par leurs expressions (3) et (4) et faisant usage de la notation symbolique définie en commençant, j'écris ces formules

$$(5) \quad v_{2p+1} = \frac{dv_{2p}}{d\varphi},$$

$$(6) \quad \varphi_{2p+1} = \frac{d\varphi_{2p}}{dv}.$$

Leur similitude est tout à fait frappante, étant donnée la différence qui existe entre les lois de formation des systèmes (v) et (φ). Leurs démonstrations présentent aussi une grande analogie. Je me bornerai à indiquer celle de la formule (5).

⁽¹⁾ *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XI, p. 317.

⁽²⁾ *Nouvelles Annales*, 3^e série, t. VII, p. 464.

Appliquant à l'expression (3) de v_{2p} l'opération désignée symboliquement par $\frac{d}{da}$, on a, en écrivant $\sum_p$ pour $\sum_p \left[\frac{\varphi_{2r}}{(2r)!} \right]$,

$$(7) \quad \frac{dv_{2p}}{da} = \frac{(2p)!}{a_0^{2p-1}} \sum_{i=1}^{i=p} \left\{ \frac{2^{i-1}}{i!} \left[a_0 \frac{dS}{da} - (2p-2) a_1 S \right] \right\}.$$

Si l'on porte les valeurs (3) et (7) de v_{2p} et $\frac{dv_{2p}}{da}$ dans (2), il vient

$$(8) \quad v_{2p+1} = \frac{(2p)!}{a_0^{2p-1}} \sum_{i=1}^{i=p} \left[\frac{2^{i-1}}{i!} \left(a_0 \frac{dS}{da} - 2p a_1 S \right) \right].$$

Si nous écrivons $\sum_p \left[\frac{\varphi_{2r}}{(2r)!} \right]$ sous la forme

$$S_p = \frac{\sum_{k=1}^{k=i} \varphi_{2r_1} \varphi_{2r_2} \dots \varphi_{2r_i}}{(2r_1)! (2r_2)! \dots (2r_i)!},$$

nous voyons que

$$\frac{dS}{da} = S_p \frac{\sum_{k=1}^{k=i} \varphi_{2r_1} \varphi_{2r_2} \dots \frac{d\varphi_{2r_k}}{da} \dots \varphi_{2r_i}}{(2r_1)! (2r_2)! \dots (2r_k)! \dots (2r_i)!}.$$

Mais de la définition même des φ on déduit

$$(9) \quad \frac{d\varphi_{2r_k}}{da} = \frac{\varphi_{2r_{k+1}} + 2r_k a_1 \varphi_{2r_k}}{a_0}.$$

Transformant la formule précédente au moyen de celle-ci et tenant compte de la condition $r_1 + r_2 + \dots + r_i = p$, on voit que

$$\frac{dS}{da} = \frac{1}{a_0} S_p \frac{\sum_{k=1}^{k=i} \varphi_{2r_1} \varphi_{2r_2} \dots \varphi_{2r_{k+1}} \dots \varphi_{2r_i}}{(2r_1)! (2r_2)! \dots (2r_k)! \dots (2r_i)!} + \frac{2p a_1}{a_0} S_p.$$

d'où

$$a_0 \frac{dS}{da} - 2p a_1 S = \frac{\sum_{k=1}^{k=i} \varphi_{2r_1} \varphi_{2r_2} \dots \varphi_{2r_{k+1}} \dots \varphi_{2r_i}}{(2r_1)! (2r_2)! \dots (2r_k)! \dots (2r_i)!}.$$

Or le second membre de cette expression n'est autre chose, avec notre notation, que $\frac{d^i \dot{S}}{da^p}$. La formule (8) devient donc

$$v_{2p+1} = \frac{(2p)!}{\alpha_0^{2p-2}} \sum_{i=1}^{i=p} \left(\frac{2^{i-1}}{i!} \cdot \frac{d^i \dot{S}}{da^p} \right),$$

ou, en rapprochant de (3),

$$v_{2p+1} = \frac{dv_{2p}}{da}.$$

La formule (5) se trouve ainsi établie. La démonstration de la formule (6) est analogue, avec cette différence que c'est la formule (2) qui y joue le rôle rempli ci-dessus par la formule (9).

Exemple d'application. — Les formules (3) et (4) de M. Cesaro donnent

$$v_6 = \frac{\varphi_6 + 30\varphi_2\varphi_4 + 60\varphi_2^2}{\alpha_0^4}, \quad \varphi_6 = \alpha_0^4 v_6 - 30\alpha_0^2 v_2 v_4 + 120 v_2^2.$$

Au moyen de mes formules (5) et (6), j'en déduis immédiatement

$$v_7 = \frac{\varphi_7 + 30(\varphi_2\varphi_5 + \varphi_3\varphi_4) + 180\varphi_2^2\varphi_3}{\alpha_0^5},$$

$$\varphi_7 = \alpha_0^5 v_7 - 30\alpha_0^2(v_2 v_5 + v_3 v_4) + 360 v_2^2 v_3.$$

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 2 NOVEMBRE 1887.]

PRÉSIDENCE DE M. FOURET.

Communications :

M. Poincaré : *Sur les hypothèses fondamentales de la Géométrie.*

M. Laisant : *Sur quelques formules de Trigonométrie.*

M. d'Ocagne : *Sur quelques propriétés des courbes algébriques.*

M. Kœnigs : *Sur les surfaces engendrées par deux séries de coniques.*

M. Humbert : *Sur les courbes isotropiques.*

SÉANCE DU 16 NOVEMBRE 1887.

PRÉSIDENCE DE M. FOURET.

Élections : MM. del Pezzo et Albeggiani, présentés par MM. Fouret et Guccia; M. l'abbé Issaly, présenté par MM. Jordan et Humbert, sont élus à l'unanimité.

Communications :

M. de Presle : *Sur le développement des fonctions H et Θ en produits infinis.*

M. Vicaire : *Sur la réciprocité entre la trajectoire d'un point libre sous l'action d'une fonction des forces, et la brachistochrone.*

M. Humbert : *Sur les normales menées d'un point à une courbe ou à une surface.*

SÉANCE DU 7 DÉCEMBRE 1887.

PRÉSIDENCE DE M. FOURET.

La Société procède à la discussion des modifications demandées à son Règlement par le Conseil d'État, en vue de la reconnaissance d'utilité publique.

SÉANCE DU 21 DÉCEMBRE 1887.

PRÉSIDENCE DE M. DE PRESLE.

Élection : M. Cerruti, présenté par MM. Fouret et Guccia, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. de Presle : *Sur le développement des fonctions $\tan x$ et $\cot x$.*

SÉANCE DU 4 JANVIER 1888.

PRÉSIDENCE DE M. FOURET.

La Société procède au renouvellement de son Bureau.

Communications :

M. Humbert : *Sur le lieu des foyers ou des focales d'un faisceau tangentiel de courbes ou de surfaces.*

M. Raffy : *Sur les courbes unicursales dont l'arc s'exprime par une somme de log et d'arctang.*

SÉANCE DU 18 JANVIER 1888.

PRÉSIDENCE DE M. FOURET.

Communications :

M. Humbert : *Sur l'orientation des systèmes de droites.*

M. Fourret : *Sur un mode de transformation des courbes n'altérant pas la longueur des arcs.*

SÉANCE DU 1^{er} FÉVRIER 1888.

PRÉSIDENCE DE M. LAISANT.

Élection : M. Bioche, présenté par MM. Raffy et Kœnigs, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. Fourret : *Sur les stelloïdes.*

SÉANCE DU 13 FÉVRIER 1888.

PRÉSIDENCE DE M. LAISANT.

Communications :

M. Robin : *Sur la distribution de l'électricité.*

SÉANCE DU 7 MARS 1888.

PRÉSIDENCE DE M. LAISANT.

Élections : MM. Papelier et Robin, présentés par MM. Laisant et Raffy; M. Asutosh Mukhopādhyāy, présenté par MM. Laisant et Humbert, sont élus à l'unanimité.

Communications :

M. Réveille (Note présentée par M. Fouret) : *Sur quelques points de la Géométrie cinématique.*

M. Kœnigs : *Sur une généralisation du théorème de Guldin.*

M. Humbert : *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements.*

SÉANCE DU 21 MARS 1888.

PRÉSIDENCE DE M. LAISANT.

Élections : MM. Félix Lucas et Wickersheimer, présentés par MM. Laisant et Lemoine; MM. Peigné et Canet, présentés par MM. Laisant et Humbert; MM. Pierre de Witt et Germain Bapst, présentés par MM. Humbert et Lorin, sont élus à l'unanimité.

Communications :

M. Fouret : *Sur une série d'équations dont toutes les racines sont réelles.*

M. Fouret : *Sur un caractère de convergence des séries donné par M. Jensen.*

M. Humbert : *Sur quelques propriétés métriques relatives aux faisceaux tangentiels de courbes.*

SÉANCE DU 4 AVRIL 1888.

PRÉSIDENCE DE M. ANDRÉ.

Élection : M. Vito Volterra, présenté par MM. Fouret et Guccia, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. Fouret : *Sur une série d'équations dont toutes les racines sont réelles.*

M. Bioche : *Sur les courbes de M. Bertrand.*

SÉANCE DU 18 AVRIL 1888.

PRÉSIDENCE DE M. LAISANT.

Élection : M. Fabry, présenté par MM. Poincaré et Humbert, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. Poincaré : *Sur l'invariant intégral.*

M. Catalan : *Sur les fonctions X_n , et sur quelques propositions de la théorie des nombres.*

M. de Presle : *Sur le développement de $\cot x$.*

M. Fouret : *Sur une série d'équations dont toutes les racines sont réelles.*

SÉANCE DU 2 MAI 1888.

PRÉSIDENCE DE M. LAISANT.

Communications :

M. Fouret : *Sur deux systèmes de courbes isodiques.*

M. de Presle : *Sur la résultante de deux équations à une inconnue.*

SÉANCE DU 16 MAI 1888.

PRÉSIDENCE DE M. LAISANT.

Communications :

M. André : *Sur la marche de la reine aux échecs.*

M. Lucas : *Sur certaines fonctions des racines d'une équation algébrique.*

M. Humbert : *Sur les aires sphériques.*

SÉANCE DU 6 JUIN 1888.

PRÉSIDENCE DE M. LAISANT.

Communications :

M. Weill : *Sur une propriété des systèmes de courbes algébriques.*

M. Poincaré : *Sur une généralisation du calcul des variations.*

SÉANCE DU 20 JUIN 1888.

PRÉSIDENCE DE M. LAISANT.

Communications :

M. Fouret : *Sur une classe de corps limités par une surface engendrée par une parabole.*

M. Humbert : *Sur l'extension aux cubiques gauches du théorème de Desargues.*

SÉANCE DU 4 JUILLET 1888.

PRÉSIDENCE DE M. LAISANT.

Élections : MM. Mercier et Marquiset, présentés par MM. Laisant et Lucas; M. Tracon, présenté par MM. Appell et Demartres, sont élus à l'unanimité.

Communications :

M. Rouché : *Sur une Note de M. Delannoy, relative à la durée du jeu.*

M. de Presle : *Sur les dérivées de la forme $\frac{d^m \varphi(u)}{dx^m}$.*

M. Lemoine : *Sur la mesure de la simplicité en Géométrie, et sur un nouveau système de coordonnées.*

M. Laisant : *Sur le nombre de décompositions d'un nombre en ses diviseurs.*

SÉANCE DU 18 JUILLET 1888.

PRÉSIDENCE DE M. LAISANT.

Élections : M. Dillon, présenté par MM. Laisant et Lucas, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. de Presle : *Sur les nombres de Bernoulli.*

M. Simonnet : *Sur un problème de Géométrie proposé par M. Lemoine.*

M. Laisant : *Sur un problème relatif à un système de deux courbes planes.*



TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XVI.

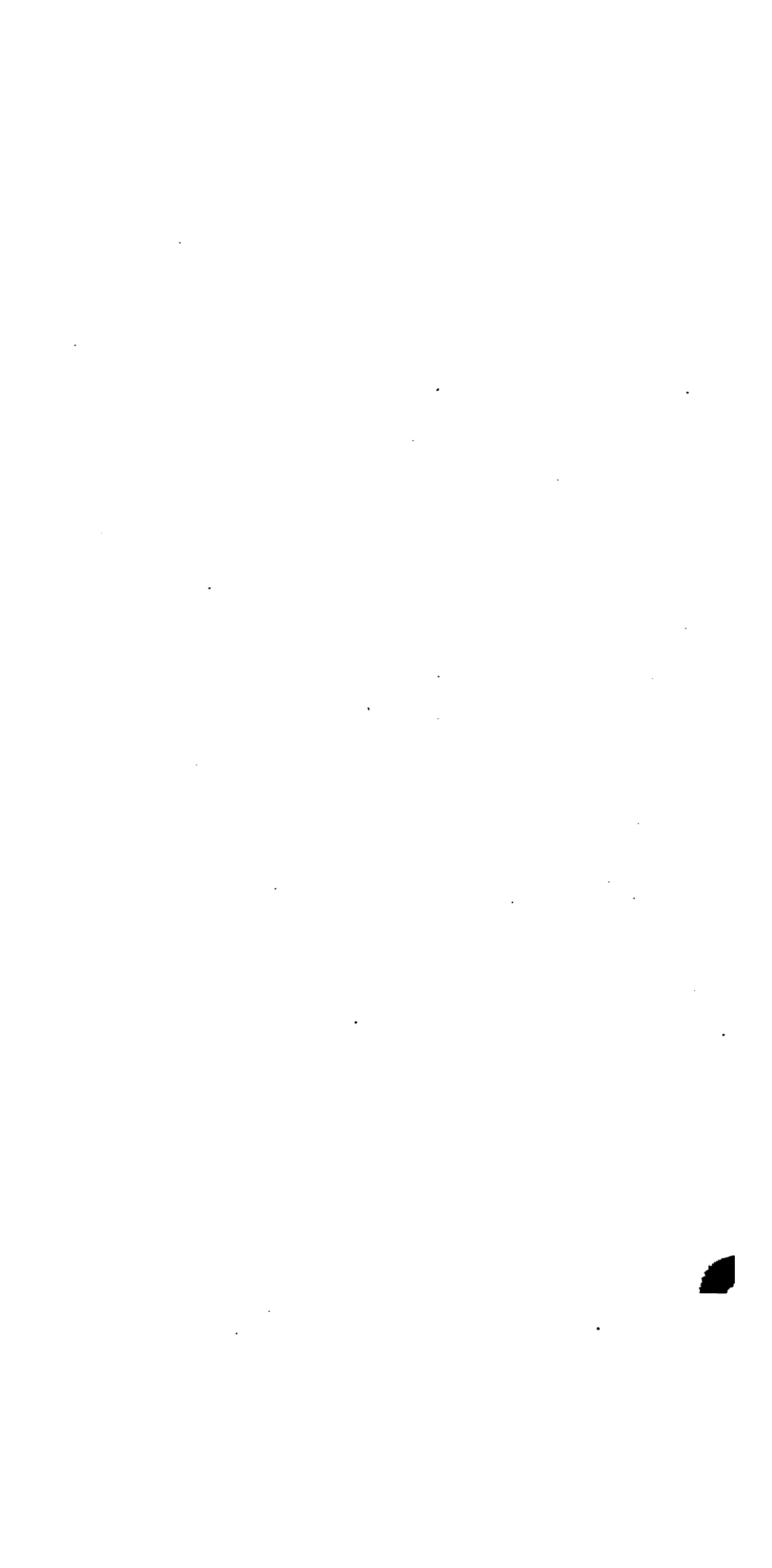
	Pages
État de la Société mathématique de France au commencement de l'année 1888.	5
Le lieu des pôles d'un plan fixe par rapport aux coniques tracées sur une surface de Steiner est une autre surface de Steiner; par M. G. KÖNIGS.	15
Nouveaux principes de la théorie des congruences de droites; par M. l'abbé ISSALY.	19
Sur l'identité des péninvariants des formes binaires avec certaines fonctions des dérivées unilatérales de ces formes; par M. R. PERRIN.	82
Sur une généralisation de la formule des accroissements finis; par M. T.-J. STIELTJES.	100
Division approximative d'un arc de cercle dans un rapport donné, à l'aide de la règle et du compas; par M. A. PELLET.	113
Sur les lignes de courbure de certaines surfaces gauches; par M. CH. BIOCHE.	119
Sur la durée du jeu; par M. DELANNOY.	124
Propositions et questions diverses; par M. E. CATALAN.	128
Note sur un théorème de Géométrie cinématique; par M. J. RÉVEILLE.	130
Sur le genre des courbes planes triangulaires; par M. V. JANET.	132
Réductibilité des équations différentielles linéaires; par M. FABRY.	135
Au sujet du développement de $\cot z$ en série de fractions; par M. DE PRESLE.	143
Note sur le procédé le plus simple de calcul des nombres de Bernoulli; par M. WILLIOT.	144
Observations de M. Rouché en réponse à une Note de M. DELANNOY.	149
Remarques arithmétiques sur les nombres composés; par M. C.-A. LAISANT.	150
Sur une propriété des systèmes de courbes algébriques; par M. WEILL.	155
Dérivées successives d'une puissance entière d'une fonction d'une variable, dérivées successives d'une fonction de fonction et application à la détermination des nombres de Bernoulli; par M. DE PRESLE.	157
Des systèmes des coordonnées qui déterminent le plus simplement un point par une construction; par M. E. LEMOINE.	162
Note sur un système de deux courbes planes; par M. C.-A. LAISANT.	172
Sur la numération factorielle, application aux permutations; par M. C.-A. LAISANT.	176
Sur les systèmes de péninvariants principaux d'une forme binaire; par M. MAURICE D'OCAGNE.	183
Extraits des procès-verbaux.	187

1856. — Paris. — Imprimerie GAUTHIER VILARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 22.

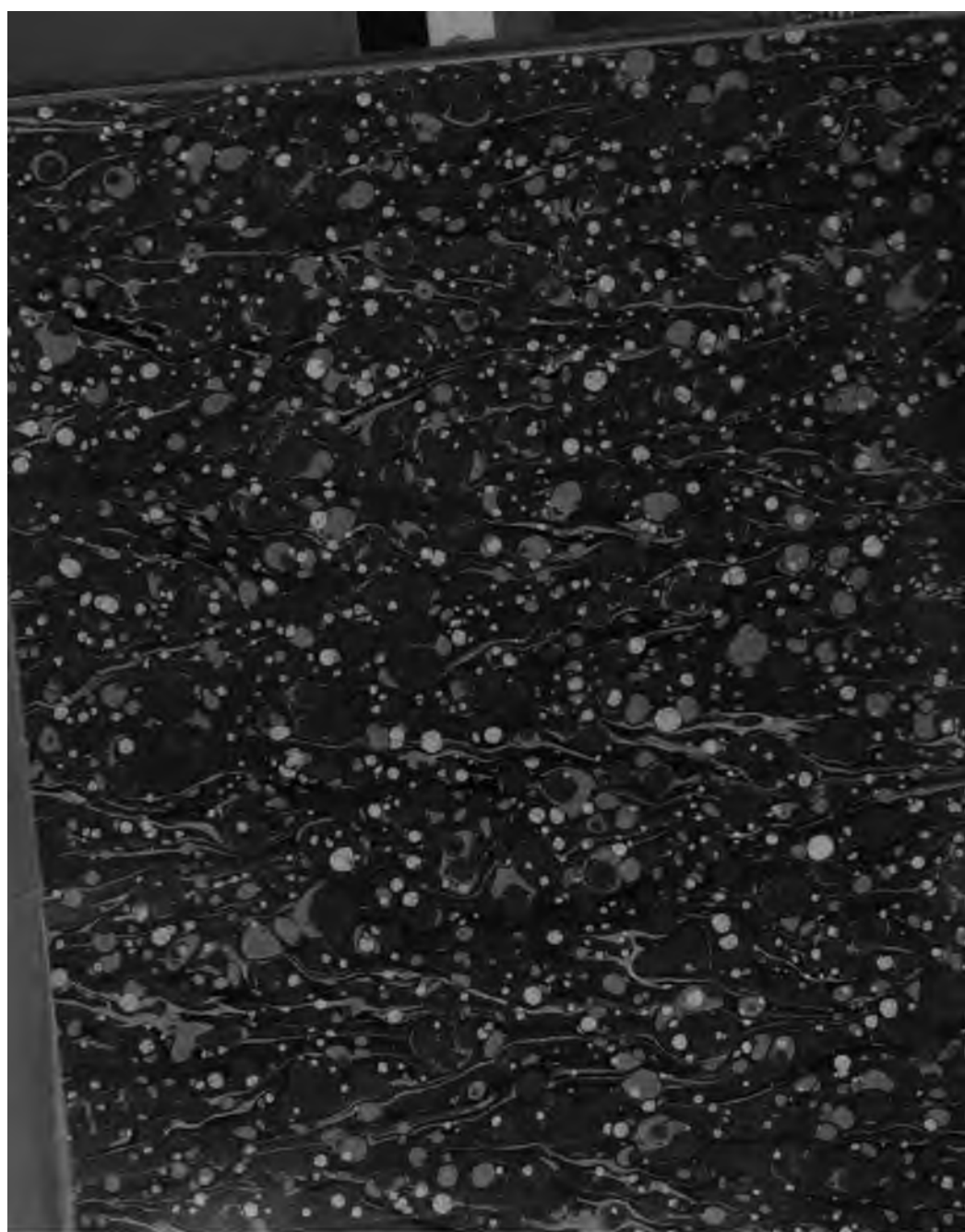


PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS L. J. FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 15.









To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below

OCT 21 49 P...
FEB 24 1981

60960

